
Inhaltsverzeichnis

1. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

1.1	Der Mannigfaltigkeitsbegriff	1
1.2	Differenzierbare Abbildungen	4
1.3	Der Rang	5
1.4	Untermannigfaltigkeiten	7
1.5	Beispiele von Mannigfaltigkeiten	9
1.6	Summen, Produkte und Quotienten von Mannigfaltigkeiten	12
1.7	Genügen uns Untermannigfaltigkeiten euklidischer Räume?	17
1.8	Test	18
1.9	Übungsaufgaben	22
1.10	Hinweise zu den Übungsaufgaben	23

2. Der Tangentialraum

2.1	Tangentialräume im euklidischen Raum ...	26
2.2	Drei Fassungen des Tangentialraumbegriffs	28
2.3	Äquivalenz der drei Fassungen	33
2.4	Definition des Tangentialraums	37
2.5	Das Differential	38
2.6	Die Tangentialräume eines Vektorraums ...	42
2.7	Geschwindigkeitsvektoren von Kurven ...	43
2.8	Ein weiterer Blick auf den Ricci-Kalkül ...	44
2.9	Test	47
2.10	Übungsaufgaben	49
2.11	Hinweise zu den Übungsaufgaben	50

3. Differentialformen

3.1 Alternierende k -Formen	52
3.2 Die Komponenten einer alternierenden k -Form	54
3.3 Alternierende n -Formen und die Determinante	56
3.4 Differentialformen	58
3.5 Einsformen	60
3.6 Test	62
3.7 Übungsaufgaben	64
3.8 Hinweise zu den Übungsaufgaben	65

4. Der Orientierungsbegriff

4.1 Einführung	68
4.2 Die beiden Orientierungen eines n -dimensionalen reellen Vektorraums	70
4.3 Orientierte Mannigfaltigkeiten	73
4.4 Konstruktion von Orientierungen	75
4.5 Test	77
4.6 Übungsaufgaben	79
4.7 Hinweise zu den Übungsaufgaben	80

5. Integration auf Mannigfaltigkeiten

5.1 Welches sind die richtigen Integranden? ...	82
5.2 Die Anschauung vom Integrationsvorgang	86
5.3 Lebesgue-Vorkenntnisse-Paket	88
5.4 Definition der Integration auf Mannigfaltigkeiten	92
5.5 Einige Eigenschaften des Integrals	96
5.6 Test	99
5.7 Übungsaufgaben	102
5.8 Hinweise zu den Übungsaufgaben	102

6. Berandete Mannigfaltigkeiten

6.1	Vorbemerkung	104
6.2	Differenzierbarkeit im Halbraum	105
6.3	Das Randverhalten der Diffeomorphismen	106
6.4	Der Begriff der berandeten Mannigfaltigkeit	108
6.5	Untermannigfaltigkeiten	109
6.6	Konstruktion berandeter Mannigfaltigkeiten	111
6.7	Tangentialräume am Rande	112
6.8	Die Orientierungskonvention	113
6.9	Test	114
6.10	Übungsaufgaben	118
6.11	Hinweise zu den Übungsaufgaben	118

7. Die anschauliche Bedeutung des Satzes von Stokes

7.1	Vergleich der Antworten auf Maschen und Spate	120
7.2	Die Strömungsbilanz einer $(n - 1)$ -Form auf einer n -Masche	121
7.3	Quellstärke und Cartansche Ableitung ...	124
7.4	Der Satz von Stokes	125
7.5	Der de Rham-Komplex	126
7.6	Simpliziale Komplexe	127
7.7	Das de Rham-Theorem	131

8. Das Dachprodukt und die Definition der Cartanschen Ableitung

8.1	Das Dachprodukt alternierender Formen	135
8.2	Eine Charakterisierung des Dachprodukts	137
8.3	Der definierende Satz für die Cartansche Ableitung	139
8.4	Beweis für ein Kartengebiet	141
8.5	Beweis für die ganze Mannigfaltigkeit	142

8.6 Die Natürlichkeit der Cartanschen Ableitung	145
8.7 Der de Rham-Komplex	146
8.8 Test	147
8.9 Übungsaufgaben	150
8.10 Hinweise zu den Übungsaufgaben	150
9. Der Satz von Stokes	
9.1 Der Satz	152
9.2 Beweis für den Halbraum	153
9.3 Beweis für ein Kartengebiet	155
9.4 Allgemeiner Fall	156
9.5 Zerlegungen der Eins	157
9.6 Integration mittels Zerlegungen der Eins	160
9.7 Test	161
9.8 Übungsaufgaben	164
9.9 Hinweise zu den Übungsaufgaben	165
10. Klassische Vektoranalysis	
10.1 Einführung	167
10.2 Die Übersetzungsisomorphismen	168
10.3 Gradient, Rotation und Divergenz	171
10.4 Linien- und Flächenelemente	173
10.5 Die klassischen Integralsätze	175
10.6 Die Mittelwerteigenschaft der harmonischen Funktionen	179
10.7 Das Flächenelement in den Koordinaten der Fläche	181
10.8 Das Flächenelement des Graphen einer Funktion von zwei Variablen	185
10.9 Der Integralbegriff der klassischen Vektoranalysis	186
10.10 Test	189
10.11 Übungsaufgaben	191
10.12 Hinweise zu den Übungsaufgaben	192

11. Die de Rham-Cohomologie

11.1	Definition des de Rham-Funktors	194
11.2	Einige Eigenschaften	196
11.3	Homotopieinvarianz: Aufsuchen der Beweisidee	198
11.4	Durchführung des Beweises	201
11.5	Das Poincaré-Lemma	203
11.6	Der Satz vom stetig gekämmten Igel	206
11.7	Test	208
11.8	Übungsaufgaben	211
11.9	Hinweise zu den Übungsaufgaben	211

**12. Differentialformen
auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten**

12.1	Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten ...	213
12.2	Skalarprodukt alternierender k -Formen ..	216
12.3	Der Sternoperator	219
12.4	Die Coableitung	223
12.5	Harmonische Formen und Hodge-Theorem	226
12.6	Die Poincaré-Dualität	229
12.7	Test	231
12.8	Übungsaufgaben	233
12.9	Hinweise zu den Übungsaufgaben	235

13. Rechnen in Koordinaten

13.1	Sternoperator und Coableitung im dreidimensionalen euklidischen Raum	237
13.2	Formen und duale Formen auf Mannigfaltigkeiten ohne Metrik	239
13.3	Drei Grundsätze des Ricci-Kalküls auf Mannigfaltigkeiten ohne Metrik	240
13.4	Tensorfelder	243
13.5	Hinauf- und Herunterziehen der Indices im Ricci-Kalkül	247
13.6	Invariante Bedeutung des Stellungwechsels der Indices	249

13.7	Skalarprodukte für Tensoren im Ricci-Kalkül	251
13.8	Dachprodukt und Sternoperator im Ricci-Kalkül	252
13.9	Divergenz und Laplace-Operator im Ricci-Kalkül	254
13.10	Ein Schlußwort	257
13.11	Test	258
13.12	Übungsaufgaben	261
13.13	Hinweise zu den Übungsaufgaben	264
14.	Anhang: Testantworten, Literatur, Register	
14.1	Antworten auf die Testfragen	266
14.2	Literaturverzeichnis	268
14.3	Register	269