

4 Der optische Resonator

Ganz allgemein formuliert, besteht ein optischer Resonator aus einer Abfolge von optischen Elementen, welche vom Licht wiederholt durchlaufen werden (siehe Figur 4-2). Ein vollständiger Umlauf im Resonator endet am selben Ort wie er begonnen hat, die dazugehörige Matrix hat deshalb die Determinante 1 (gleicher Brechungsindex am Ende wie am Anfang). Innerhalb des Resonators wird das Licht bei jedem Durchgang im Lasermedium verstärkt. Der Laserstrahl wird dann in den allermeisten Fällen durch einen teildurchlässigen Spiegel des Resonators mit dem Transmissionsgrad T ausgekoppelt (Auskoppelspiegel). Wichtig dabei ist natürlich, dass der so erzeugte Laserstrahl nach jedem vollständigen Umlauf im Resonator wieder dieselben Eigenschaften hat. In diesem Kapitel wird daher gezeigt, welche Eigenschaften die Resonatormatrix sonst noch haben muss, damit sich eine elektromagnetische Welle nach einem vollständigen Resonatorumlauf identisch reproduziert.

4.1 Die Resonatorstabilität

Im Resonator interessieren wir uns für stationäre Feldverteilungen und fordern deshalb, dass für geometrische Strahlen die Eigenwertgleichung

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} r_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} r_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \xi \mathbf{v}_1 \quad (4-1)$$

eine Lösung hat. Die Strahlmatrix in dieser Gleichung beschreibt dabei einen vollständigen Umlauf im Resonator und hat daher die Determinante $AD - BC = 1$. Betrachtet man wie in Abschnitt 3.2 die radialen Strahlen einer Kugelwelle, ist die Forderung (4-1) wegen

$$R_2 = \frac{r_2}{\alpha_2} = \frac{\xi r_1}{\xi \alpha_1} = \frac{r_1}{\alpha_1} = R_1 \quad (4-2)$$

gemäß Figur 3-9 gleichbedeutend mit der Forderung, dass der Krümmungsradius

$$R_2 = \frac{AR_1 + B}{CR_1 + D} = R_1 \quad (4-3)$$

der Kugelwelle bei einem vollständigen Umlauf im Resonator unverändert bleibt. Dies ist wiederum gleichbedeutend mit der Forderung, dass eine (Hermite- oder Laguerre-) Gauß-Mode bei einem vollständigen Resonatorumlauf unverändert bleibt:

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} = q_1 \quad (4-4)$$

Die Eigenwertgleichung (4-1) hat nur dann nichttriviale Lösungen, wenn

$$\det \begin{pmatrix} A - \xi & B \\ C & D - \xi \end{pmatrix} = \xi^2 - (A + D)\xi + 1 = 0 \quad (4-5)$$

ist, wobei berücksichtigt wurde, dass $AD - BC = 1$ gilt. Die dazugehörigen Eigenwerte sind

$$\xi_{\pm} = \frac{A+D}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A+D}{2}\right)^2 - 1} \quad (4-6)$$

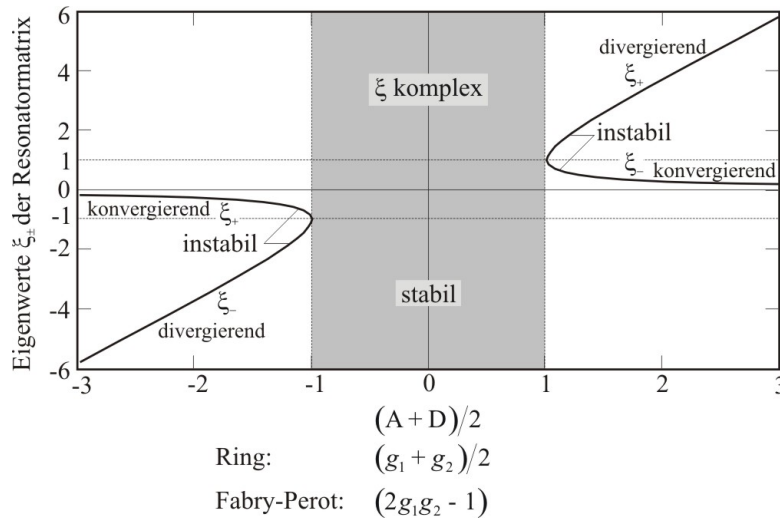
Bei einem gegebenen Resonator erhält man aus (4-3) und $AD - BC = 1$ für Kugelwellen die Lösungen

$$R_{\pm} = \frac{(A-D) \pm \sqrt{(A+D)^2 - 4}}{2C} \quad (4-7)$$

Bezüglich Stabilität können folgende Fälle unterschieden werden.

a) Instabile Resonatoren

Ist $|A+D| > 2$, so gibt es nach (4-7) zwei reelle Krümmungsradien von Kugelwellen, die sich im Resonator reproduzieren. Da aber in diesem Falle die Eigenwerte ξ ebenfalls reell und $\neq 1$ sind (nämlich $\xi_+ > 1$ und $0 < \xi_- < 1$ für $(A+D) > 0$ und $\xi_- < -1$ sowie $0 > \xi_+ > -1$ für $(A+D) < 0$), verändern sich die Strahlen bei jedem Umlauf gemäß (4-1) und laufen mit der Zeit aus dem Resonator ($|\xi| > 1$) oder konvergieren zu 0 ($|\xi| < 1$). Man spricht deshalb vom instabilen Resonator, obwohl eine stationäre Kugelwelle (2-80) existiert. In der Tat werden – vor allem bei Lasern mit sehr hoher Verstärkung und räumlich ausgedehnten Lasermedien – in der Praxis gelegentlich instabile Resonatoren eingesetzt. Der erzeugte Laserstrahl kann in erster Näherung lokal als Kugelwelle approximiert werden, für eine genaue Berechnung insbesondere der Intensitätsverteilung müssen aber numerische Verfahren herangezogen werden. Man findet dann tatsächlich stationäre Lösungen. So gesehen ist der Begriff ‚instabil‘ etwas



Figur 4-1. Eigenwerte der Resonatormatrix als Funktion von $(A+D)$, beziehungsweise in Abhängigkeit der Resonatorparameter g_1 und g_2 , die in den folgenden Abschnitten eingeführt werden.

unglücklich gewählt. Er ist aber in der Tatsache begründet, dass jeder Lichtstrahl \mathbf{v} mit der Zeit aus dem Resonator läuft oder zu 0 konvergiert. Die Eigenwerte ξ_{\pm} sind in Abhängigkeit von $(A + D)$ in Figur 4-1 dargestellt.

Anders als beim stabilen Resonator wird der Laserstrahl aus instabilen Resonatoren meist nicht durch teildurchlässige Spiegel ausgekoppelt, sondern man benutzt den Teil der Strahlung, welcher über die Spiegel hinausragt. Instabile Laser erzeugen deshalb oft Strahlen mit ringförmiger Intensitätsverteilung (siehe Abschnitt 5.4).

b) Die Stabilitätsgrenze

Der Eigenwert ist entweder exakt 1 oder -1 wenn $|A + D| = 2$. Es gibt nur einen Eigenwert ξ und einen Eigenvektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad (4-8)$$

der die Eigenwertgleichung (4-1) löst. Nur Strahlen aus dem Eigenraum von ξ , also Strahlen der Form $a\mathbf{v}$, wobei a eine reelle Zahl ist, reproduzieren sich nach jedem vollständigen Umlauf im Resonator. Man beachte, dass dieser Eigenraum gemäß Abschnitt 3.2 eine Kugelwelle beschreibt (die gleiche wie aus (4-7)) mit den selben Vorbehalten wie oben.

Übung

Der vollständige Umlauf eines Resonators sei durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.25\text{m} \\ -1\text{m}^{-1} & 1.5 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man berechne Eigenwerte, Eigenvektoren und Krümmungsradius der Kugelwelle. Was passiert mit einem Strahl, der nicht aus dem Eigenraum kommt?

c) Stabile Resonatoren

Ist $|A + D| < 2$, so sind sowohl Eigenwerte (4-6) als auch Krümmungsradien (4-7) komplex. Dies ist mit der schattierten Fläche in Figur 4-1 dargestellt. Offenbar haben die Kugelwellen, die sich im Resonator nach jedem vollständigen Umlauf reproduzieren, in diesem Fall einen komplexen Krümmungsradius. Wie wir aus den vorangehenden Kapiteln wissen, sind dies eben die Gauß-Strahlen. Die Resonatoreigenschaften sollen hier aber vorerst noch mittels der geometrischen Strahlenoptik untersucht werden.

Aus $|A + D| < 2$ folgt $|A + D|/2 < 1$ und wir können

$$\cos \theta = \frac{A + D}{2} \quad (4-9)$$

definieren. Die Eigenwerte lassen sich dann schreiben als

$$\xi_{\pm} = \cos \theta \pm \sqrt{(\cos \theta)^2 - 1} = \cos \theta \pm i \sin \theta = e^{\pm i\theta}. \quad (4-10)$$

Sie haben also immer den Betrag 1 und sind zueinander komplex konjugiert. Aus diesem Grund wird ein Eigenvektor \mathbf{v}_+ zum Eigenwert ξ_+ durch komplexe Konjugation zum Eigenvektor \mathbf{v}_- des Eigenwerts ξ_- , denn

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mathbf{v}_+ &= \overline{\xi_+ \mathbf{v}_+} \\ &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \overline{\mathbf{v}_+} = \xi_- \overline{\mathbf{v}_+}. \end{aligned} \quad (4-11)$$

Jeder beliebige Strahlenvektor \mathbf{v} kann als Linearkombination von zwei Eigenvektoren

$$\mathbf{v} = a_+ \mathbf{v}_+ + a_- \mathbf{v}_- \quad (4-12)$$

zusammengesetzt werden. In der geometrischen Optik werden nur reelle Strahlen \mathbf{v} betrachtet, d. h. a_+ und a_- müssen zueinander komplex konjugiert sein. Lässt man diesen willkürlich gewählten Strahl im Resonator umlaufen, so resultiert nach N vollständigen Umläufen wegen (4-10)

$$\mathbf{v}_N = a_+ \xi_+^N \mathbf{v}_+ + a_- \xi_-^N \mathbf{v}_- = a_+ \mathbf{v}_+ e^{iN\theta} + a_- \mathbf{v}_- e^{-iN\theta} = \mathbf{v} \cos(N\theta) + \mathbf{w} \sin(N\theta), \quad (4-13)$$

wobei \mathbf{v} der ursprünglich gewählte Strahl und $\mathbf{w} = i(a_+ \mathbf{v}_+ - a_- \mathbf{v}_-)$ ein ebenfalls reeller Vektor ist. Der Strahl erfährt also im stabilen Resonator in jedem Falle eine periodische Veränderung ohne den Resonator je zu verlassen, wobei die maximale Auslenkung alleine vom anfänglich gewählten Vektor \mathbf{v} abhängt. Im Gegensatz zum Resonator an der Stabilitätsgrenze gilt dies für jeden beliebigen Strahlenvektor \mathbf{v} und nicht nur für den Eigenraum.

Übung

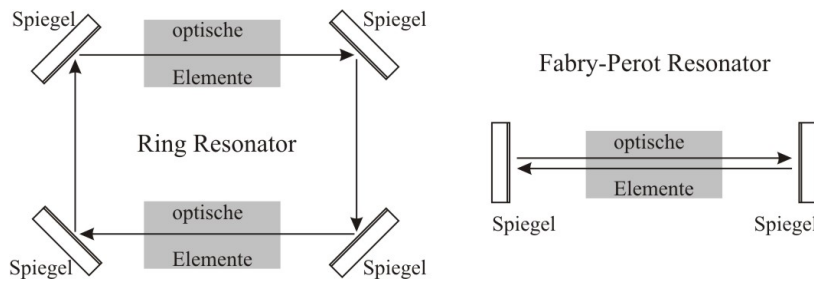
Der vollständige Umlauf eines stabilen Resonators sei durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.75\text{m} \\ -1\text{m}^{-1} & 0.5 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man berechne die Strahleigenschaften nach 1, 2, 3,..10 vollständigen Umläufen eines Strahles der anfänglich 1 cm von der Resonatorachse entfernt und unter einem Winkel von 1.5° ($\pi/120$) startete.

4.2 Das Stabilitätsdiagramm

Obige Behandlung der Resonatorstabilität erforderte keine Information über die Art und den Aufbau des Resonators. Die Behandlung wird nun mit der Einführung des Stabilitätsdiagramms vertieft. Wie in Figur 4-2 gezeigt, unterscheiden wir dabei zwischen dem Ring-Resonator, wo ein gegebener Lichtstrahl alle Elemente immer in derselben Richtung und Reihenfolge durchläuft, und dem Fabry-Perot Resonator, wo die Lichtstrahlen zwischen zwei Endspiegeln hin und her laufen. Einer der Spiegel der Resonatoren ist teildurchlässig und dient dazu, den erzeugten Laserstrahl auszukoppeln.



Figur 4-2. Der optische Resonator. Innerhalb des Resonators können beliebige optische Elemente und Systeme angeordnet sein (symbolisiert durch grau schattierte Bereiche).

Im Ring-Resonator kann sich das Licht in beiden Umlaufrichtungen ausbreiten, sofern dies nicht mit zusätzlichen Vorkehrungen verhindert wird. Ohne diese Vorkehrungen hat der Ring-Resonator den Nachteil, dass beim Auskoppelspiegel zwei Strahlen in unterschiedlicher Richtung emittiert werden. Der Ring-Resonator wird in der Regel deshalb nur im unidirektionalen Betrieb eingesetzt, um insbesondere Strahlung mit einer einzigen Resonanzfrequenz zu erzeugen (kein ‚spatial hole burning‘ im unidirektionalen Betrieb).⁹ Für alle anderen Fälle wird der Fabry-Perot Resonator wegen seinem einfacheren Aufbau vorgezogen. Die beiden Resonatortypen unterscheiden sich aber auch bezüglich der Stabilitätseigenschaften.

4.2.1 Der Ring-Resonator

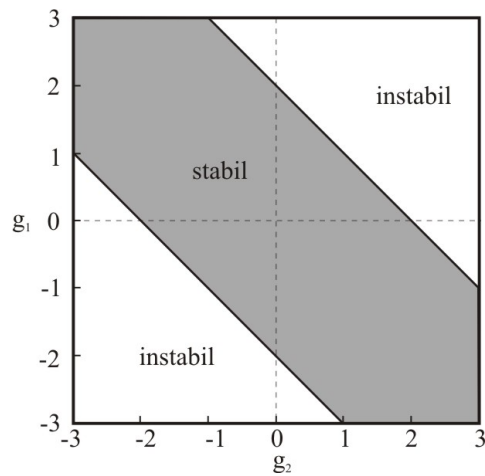
Einen vollständigen Umlauf beschreiben wir mit einer Strahlmatrix \mathbf{M} , wobei die beiden Umlaufrichtungen \mathbf{M}_{\odot} und \mathbf{M}_{\ominus} zu unterscheiden sind. Da ein vollständiger Umlauf in einem Ring-Resonator immer am selben Ort endet, wo er begonnen hat, ist der Brechungsindex am Anfang und am Ende der gleiche ($n_1 = n_2$). Für einen Ring-Resonator gilt daher immer $\det(\mathbf{M}) = 1$ und die Resonatormatrix hat ganz allgemein die Form

$$\mathbf{M}_{\odot} = \begin{pmatrix} g_1 & \tilde{L} \\ \frac{g_1 g_2 - 1}{\tilde{L}} & g_2 \end{pmatrix}, \tag{4-14}$$

wobei wir drei der Matrixelemente frei mit $A = g_1$, $D = g_2$ und $B = \tilde{L}$ bezeichnet haben und das Element C so gewählt ist, dass die Bedingung $\det(\mathbf{M}) = 1$ erfüllt ist. Die für den Laser charakteristische Größen g_1 und g_2 werden wir im Folgenden als Resonatorparameter bezeichnen. \tilde{L} ist eine Art effektive Resonatorlänge (siehe Übungen). Für die umgekehrte Umlaufrichtung ist nach Abschnitt 3.6.2 die Matrix gegeben durch

$$\mathbf{M}_{\ominus} = \begin{pmatrix} g_2 & \tilde{L} \\ \frac{g_1 g_2 - 1}{\tilde{L}} & g_1 \end{pmatrix}. \tag{4-15}$$

Mit dieser Notation lauten die Stabilitätsbedingungen aus dem vorangehenden Abschnitt



Figur 4-3. Stabilitätsdiagramm für Ring-Resonatoren.

a) der Resonator ist instabil wenn $|g_1 + g_2| > 2$ (4-16)

b) der Resonator ist an der Stabilitätsgrenze wenn $|g_1 + g_2| = 2$ (4-17)

c) der Resonator ist stabil wenn $|g_1 + g_2| < 2$. (4-18)

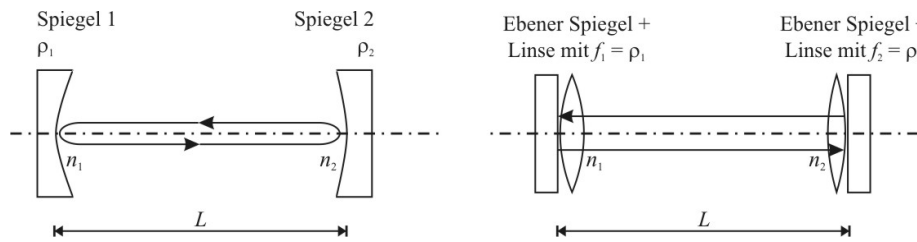
Diese drei Bedingungen lassen sich graphisch mit dem Diagramm in Figur 4-3 verdeutlichen. Der Resonator ist stabil, wenn sich der Punkt (g_1, g_2) innerhalb der schattierten Fläche befindet.

Übung

Man berechne die Resonatormatrix für einen Ring-Resonator wie er in Figur 4-2 (links) dargestellt ist. Der Abstand zwischen den Spiegeln sei überall L . Einer der Spiegel sei sphärisch und habe den Krümmungsradius ρ , die anderen drei Spiegel seien plan. Der Einfallswinkel ist bei allen Spiegeln 45° . Man vergleiche g_1, g_2 , die Summe $g_1 + g_2$ sowie \tilde{L} für verschiedene Startpunkte. Das Resultat hängt davon ab, wo man mit dem Umlauf beginnt. Gibt es einen Startpunkt so, dass $\tilde{L} = 4L$? Man beachte, dass die Reflexion an einem sphärischen Spiegel auch als Produkt zweier dünner Linsen mit je der Brennweite $f = \rho$ geschrieben werden kann.

4.2.2 Der Fabry-Perot Resonator

Wie links in Figur 4-4 skizziert, wird die Strahlung im Fabry-Perot Resonator zwischen zwei Endspiegeln hin und her reflektiert. Für die Berechnung der Strahlmatrix des vollständigen Rundgangs im Resonator spielt es eigentlich keine Rolle, an welcher Stelle man beginnt (vor oder nach einem der Endspiegel oder irgendwo im Raum zwischen den Spiegeln). Wählt man z. B. die Stelle unmittelbar rechts von Spiegel 1 als Referenzebene, so werden auf dem Weg zu Spiegel 2 vorerst alle Matrizen der hier allfällig vorhandenen Elemente aneinander multipliziert.



Figur 4-4. Der optische Resonator mit sphärischen Endspiegeln (links) und seine äquivalente Darstellung mit einer dünnen Linse und einem ebenen Spiegel als Ersatz für die sphärischen Endspiegel (rechts).

liziert (Reihenfolge gemäß (3-22)!), dann kommt die Matrix für die Reflexion an Spiegel 2, anschließend geht es in umgekehrter Reihenfolge durch alle Elemente im Resonator, um den vollständigen Umlauf mit der Matrix für Spiegel 1 abzuschließen (man befindet sich hier wieder in der gewählten Referenzebene).

Dieses Vorgehen führt zwar zum richtigen Resultat, die gesamte Rechnung und die Charakterisierung des Resonators wird aber in vieler Hinsicht bedeutend einfacher, wenn die Symmetrie zwischen Hin- und Rücklauf in einem äquivalenten Resonator ausgenutzt wird. Wir werden die dadurch erreichten Vereinfachungen später immer wieder ausnutzen.

Wie rechts in Figur 4-4 dargestellt, ersetzen wir dazu die Reflexion an einem sphärischen Endspiegel mit Krümmungsradius ρ durch eine dünne Linse mit einer Brennweite $f = \rho$ und der Reflexion an einem ebenen Endspiegel (letzterer wird durch die Einheitsmatrix beschrieben). Denn mit (3-11) und (3-25) ist die Reflexion am sphärischen Endspiegel identisch mit der Fortpflanzung durch die (unendlich dünne) Linse über den ebenen Endspiegel und zurück durch die Linse:^k

$$\mathbf{M}_{\text{Spiegel}}(\rho) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{\rho} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\rho} & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{DL}^2(f = \rho) \quad (4-19)$$

Wir wollen den äquivalenten Fabry-Perot Resonator (Figur 4-4, rechts) mit zwei Matrizen für je einen Einfachdurchgang beschreiben. Aus Symmetriegründen empfiehlt es sich, jeweils die beiden ebenen Endspiegel als Referenz zu nehmen. D. h., die eine Matrix beschreibt die Ausbreitung vom ebenen Spiegel 1 bis zum ebenen Spiegel 2, die andere den umgekehrten Weg. Damit werden wir die in Abschnitt 3.6.2 besprochene Spiegelung optischer Systeme verwenden können.

^k Der auf diese Weise berechnete Laserstrahl (siehe auch Kapitel 5) ist innerhalb des Resonators bis unmittelbar vor der Linse des Ersatzspiegels genau gleich, wie wenn mit dem sphärischen Spiegel gerechnet würde. Wenn man die Ausbreitung des durch einen sphärischen Spiegel ausgekoppelten Strahles berechnen will, muss allerdings mit dem Strahl unmittelbar vor der Linse begonnen werden, um ihn dann durch die beiden Oberflächen des effektiv vorhandenen sphärischen Spiegels zu propagieren und so dessen Linsenwirkung richtig zu berücksichtigen.

In der Praxis ist mit wenigen Ausnahmen (z. B. endgepumpter Laser) der Brechungsindex auf beiden Seiten des Resonators gleich und die Determinante der Matrizen für Hin- und Rücklauf hat je den Wert 1. Es kann aber durchaus vorkommen, dass der Brechungsindex an den beiden Resonatoren unterschiedlich ist, so z. B. bei endgepumpten Festkörperlasern. In diesem Fall hat zwar die Determinante für den vollständigen Resonatorumlauf aus dem selben Grund wie beim Ringresonator den Wert 1, die Determinanten für die beiden Einfachdurchgänge weisen aber die Werte n_1/n_2 bzw. n_2/n_1 auf.

Die Matrix für den Einfachdurchgang vom ebenen Endspiegel 1 zum ebenen Endspiegel 2 (im äquivalenten Resonator aus Figur 4-4) hat daher allgemein die Form

$$\mathbf{M}_{\rightarrow} = \begin{pmatrix} g_1 & n_1 \tilde{L} \\ \frac{g_1 g_2 - 1}{n_2 \tilde{L}} & \frac{n_1}{n_2} g_2 \end{pmatrix}. \quad (4-20)$$

Wie oben konnten wir für diese allgemeine Darstellung die drei Matrixelemente A, B und D frei wählen, mussten aber die Brechungsindizes an den beiden Resonatorenenden so berücksichtigen, dass die Determinante der Matrix den Wert n_1/n_2 erhält.

Die Verwendung des äquivalenten Resonators mit ebenen Endspiegeln erlaubt es nun, aus Symmetriegründen die Matrix für den entgegengesetzten Einfachdurchgang durch eine einfache Spiegelung gemäß Abschnitt 3.6.2 zu berechnen,

$$\mathbf{M}_{\leftarrow} = \begin{pmatrix} g_2 & n_2 \tilde{L} \\ \frac{g_1 g_2 - 1}{n_1 \tilde{L}} & \frac{n_2}{n_1} g_1 \end{pmatrix}, \quad (4-21)$$

wobei die Determinante nun den Wert n_2/n_1 hat.

Der vollständige Umgang im Fabry-Perot Resonator ist durch das Produkt

$$\mathbf{M}_{\leftrightarrow} = \begin{pmatrix} g_2 & n_2 \tilde{L} \\ \frac{g_1 g_2 - 1}{n_1 \tilde{L}} & \frac{n_2}{n_1} g_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & n_1 \tilde{L} \\ \frac{g_1 g_2 - 1}{n_2 \tilde{L}} & \frac{n_1}{n_2} g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2g_1 g_2 - 1 & 2g_2 n_1 \tilde{L} \\ \frac{(2g_1 g_2 - 1)^2 - 1}{2g_2 n_1 \tilde{L}} & 2g_1 g_2 - 1 \end{pmatrix} \quad (4-22)$$

gegeben und weist (wie erwartet) eine Determinante von 1 auf.

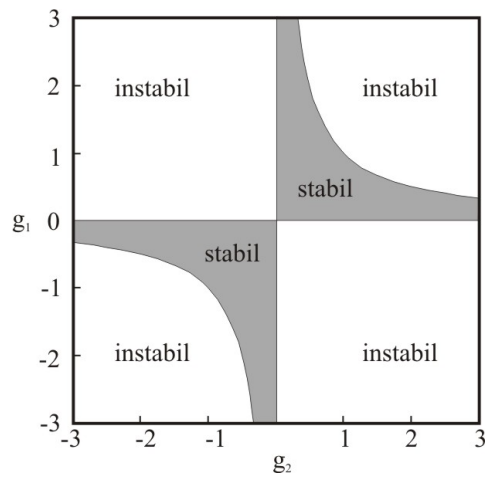
Im Falle des Fabry-Perot Resonators lauten die Stabilitätsbedingungen aus Abschnitt 4.1 damit wie folgt:

$$\mathbf{a)} \text{ der Resonator ist instabil wenn } g_1 g_2 > 1 \text{ und wenn } g_1 g_2 < 0 \quad (4-23)$$

$$\mathbf{b)} \text{ der Resonator ist an der Stabilitätsgrenze wenn } g_1 g_2 = 1 \text{ oder } g_1 g_2 = 0 \quad (4-24)$$

$$\mathbf{c)} \text{ der Resonator ist stabil wenn } 0 < g_1 g_2 < 1. \quad (4-25)$$

Diese Bedingungen sind graphisch in Figur 4-5 zusammengefasst. Der Resonator ist stabil, wenn sich der Punkt (g_1, g_2) innerhalb der schattierten Fläche befindet. Die Eigenwerte des instabilen Fabry-Perot-Resonators sind als Funktion von $(2g_1 g_2 - 1)$ in Figur 4-1 dargestellt.



Figur 4-5. Stabilitätsdiagramm für Fabry-Perot Resonatoren.

Übung

Man betrachte einen einfachen Resonator mit zwei sphärischen Spiegeln (Krümmungsradien ρ_1 und ρ_2) im Abstand L . Man zeige, dass

$$g_{1,2} = 1 - \frac{L}{\rho_{1,2}} \quad \text{und} \quad \tilde{L} = L.$$

Wie sieht die Resonatormatrix aus, wenn zwischen die beiden Spiegel eine dünne Linse mit der Brechkraft D eingefügt wird?