Vorwort

Wie kaum eine andere Wissenschaft unterliegt die Mathematik der Gefahr, als bloßes Wissen vermittelt bzw. aufgenommen zu werden. Man braucht nur einige Fachbücher durchzublättern, um zu sehen, dass Mathematik meist normiert dargestellt wird, dass nur selten – und wenn, dann in Büchern über angewandte Mathematik – Bezüge zu anderen Wissenschaften aufgezeigt werden. Von einer Einordnung des gebotenen Stoffes in die gesamtmenschliche Erfahrung ist fast nie etwas zu bemerken.

Das ist umso erstaunlicher, als die Mathematik für viele Jahrhunderte als die Wissenschaft par excellence galt, der eine weit über das rein fachliche hinausgehende Bedeutung zukam. Bereits in ihren Ursprüngen bei den Pythagoräern kommt das unübersehbar zum Ausdruck. Pythagoras entdeckte am Monochord die wunderbar einfachen Zahlengesetzmäßigkeiten, die den Intervallen zugrundeliegen, er untersuchte das Auftreten und Wirken der Zahlen in der Natur und erkannte, dass die Zahlen alles beherrschen. Aristoteles fasst in seiner „Metaphysik" die Ansichten der Pythagoräer wie folgt zusammen ([Arist2], I.5 986 a 1ff.): Sie fanden „alles (...) seiner Natur nach als den Zahlen nachgebildet, die Zahlen aber das erste in der gesamten Natur". Und „so nahmen sie an, die Elemente der Zahlen seien Elemente aller Dinge und der ganze Himmel sei Harmonie und Zahl". In diese allumfassende Anschauung ist also die erste in sich geschlossene mathematische Theorie, die pythagoräische Lehre von den geraden und ungeraden Zahlen, eingebettet.

Auch für Platon ist die Bedeutung der Mathematik nicht auf ihre theoretischen Inhalte beschränkt. Ihm zufolge sind Arithmetik und Geometrie – im weiteren auch Musik und Astronomie – die herausragendsten, weil am besten geeigneten Wissenschaften, um die Seele des Menschen vom Bann der sinnenfälligen Anschauung zu befreien und sie zum Reiche der ewigen Ideen zu lenken. „Kein der Geometrie Unkundiger möge durch dieses Tor treten" soll am Eingangstor seiner Akademie zu Athen geschrieben gewesen sein, was eindrücklich den Stellenwert beschreibt, den er diesem Bereich der Mathematik zuwies.

In seinem Werk „Politeia" fordert Platon, dass die Führer seines Idealstaates in den vier genannten Gebieten, den vier Mathemata, kundig sein müssten, um das Volk gerecht und gemäß der ewigen Ideen lenken zu können. Dieser vierfältige Weg, später Quadrivium genannt, ergänzt um das Trivium (Grammatik, Logik bzw. Dialektik und Rhetorik) gehörte in der Folgezeit zur fixen Ausbildung des freien Bürgers der griechischen und römischen Antike. Und dieses Bildungsgut blieb unter dem Titel artes liberales, die sieben freien Künste, bis in die beginnende Neuzeit ein unabdingbarer Bestandteil jeglichen wissenschaftlichen Studiums.

Die Verflechtungen der Mathematik mit Musik und vor allem der Astronomie wurden über die Jahrtausende immer enger, ja letztere Wissenschaft lässt sich heute ohne Verwendung mathematischer Hilfsmittel kaum noch betreiben. Dasselbe gilt für die Physik. Und auch in die anderen Naturwissenschaften, ja selbst in viele Geisteswissenschaften drang und dringt die Mathematik immer vehementer ein.

In früheren Zeiten waren aber noch ganz andere Seiten der Mathematik als deren Anwendbarkeit von Wichtigkeit. Beispielsweise galt sie für Nikolaus Cusanus als einzig wahre und über jeden Zweifel erhabene Wissenschaft, weshalb er sie zur Erklärung schwer einsichtig zu machender theologischer Wahrheiten heranzog; etwa für die Idee der Trinität.

Für viele Philosophen wiederum, etwa Kant, Hegel, Schelling, nahm die Mathematik die erste Rolle unter den Wissenschaften – gleich hinter der Philosophie – ein. Dabei beschäftigte sie oft die Frage, wie mathematische Erkenntnis überhaupt möglich ist, da die Theoreme ja rein gedanklich, also ohne jeglichen Rückgriff auf die Sinneswelt gewonnen werden. Kant nahm sie sogar als Paradigma für seine Erkenntnistheorie. So sind die Beispiele für die synthetischen Urteile a priori, die ihm zufolge das Zustandekommen der Erkenntnis erklären, fast ausschließlich mathematischer Natur.

Wie manch anderer Philosoph vor und nach ihm versuchte Kant auch, den Begriff des Raumes zu klären. Seine Ansicht, dass der Raum nur euklidisch denkmöglich sei, war es, die einen der bedeutendsten Mathematiker aller Zeiten, Carl Friedrich Gauß, davor zurückschrecken ließ, seine Entdeckung einer Geometrie, in der das Parallelenaxiom verletzt war, zu veröffentlichen. Er „fürchtete das Geschrei der Böotier“ ([Gauß2], S. 200). Handgreiflicher lässt sich die früher vorhandene Verflechtung von Mathematik und Philosophie kaum demonstrieren.

Heutzutage lässt sich der Mathematiker nicht mehr von Philosophen oder Theologen beeinflussen. Er richtet den Blick einzig auf seine Wissenschaft, meist ohne sich oder anderen Rechenschaft über seine Tätigkeit zu geben. Ja, er ist oft stolz darauf, dass er sich keinerlei Gedanken über das Wesen der mathematischen Objekte macht. Dieser heute vorherrschenden Auffassung ist entgegenzuhalten, dass Fragen der Bedeutung und des Stellenwerts mathematischer Erkenntnisse nicht künstlich aufgeworfen werden, sondern sich ungerufen einstellen und vehement nach einer Antwort verlangen. Und so haben sich auch in jüngerer Zeit einige der bedeutendsten Fachleute diesen Fragen gestellt. Georg Cantor etwa, der Begründer der Mengenlehre, die die Basis der gesamten modernen Mathematik darstellt, wollte seine Theorie der (transfiniten) Kardinal- und Ordinalzahlen unbedingt philosophisch untermauern. Des weiteren vertrat er die Meinung, dass den mathematischen Begriffen eine „transiente“ Realität zukommt, d.h. dass sie „Ausdruck oder Abbild von Vorgängen und Beziehungen in der dem Intellekt gegenüberstehenden [physischen oder geistigen] Außenwelt“ sind ([Cant], S. 181; siehe auch S. 276). Auch der bekannte Physiker W. Heitler schrieb den mathematischen Tatsachen „eine Realität [zu], deren Heimat weder die materielle Welt noch die Gehirnzellen noch so genialer Forscher ist. Ihre Heimat ist eine Welt der Transzendenz – wie bei allem Geistigen“. ([Heit]; zitiert nach [Mesch], S. 131.) Schließlich sei noch I. R. Schafarevitsch zitiert, der das heutige „ziellose“ Mathematisieren anprangert: „Die geistige Beschaffenheit der Menschheit gestattet bei längerer Zeitdauer keine Verknüpfung mit einer Tätigkeit, deren Ziel und

Bedeutung nicht angegeben wird“([Scha], S. 34). Ihm zufolge kann die Mathematik sich nur dann fruchtbar weiter entwickeln, wenn ihr von außerhalb ein Sinn gegeben wird, so wie das bei den Pythagoräern der Fall war.

In diesem Buch wird am Beispiel der (projektiven) Geometrie versucht, an die klassische Auffassung der Mathematik anzuschließen und sie nicht als reinen Selbstzweck zu verstehen. So sind immer wieder philosophische Erörterungen eingeflochten oder es werden Fragen behandelt, die zwar durch die Geometrie angeregt sind, deren Beantwortung jedoch über sie hinausgeht. Zugleich wird der in der heutigen Zeit ungewohnte synthetische Zugang zur projektiven Geometrie eingeschlagen, zum einen weil sich dadurch solche Fragen viel eher aufdrängen als beim analytischen Zugang, zum anderen weil dadurch die geometrische Vorstellung besonders angeregt wird. Schließlich wird auch auf das wenig bekannte Auftreten von Ideen der projektiven Geometrie in anderen Wissenschaften, beispielsweise der Botanik, der Mechanik, der Kristallografie, eingegangen.

Durch die gewählte Darstellungsweise und die Beschränkung auf die reelle (bzw. komplexe) projektive Geometrie soll auch die Eigenständigkeit und besondere Qualität dieses Teilgebiets der Mathematik herausgestrichen werden. Ein Punkt, der heutzutage meist völlig untergeht, indem die abstrakte algebraische respektive analytische Beschreibung so schnell wie möglich in den Vordergrund gerückt wird. Dies gilt für die Lehre ebenso wie für die Literatur. In dem epochalen Werk des Autorenkollektivs Nicolas Bourbaki kommt die Geometrie überhaupt nicht vor; und selbst in der umfangreichen „Geschichte der Mathematik 1700–1900“ von J. Dieudonné, einem der Gründer von Bourbaki, wird der „elementaren“ Geometrie nicht einmal eine Seite gewidmet ([Dieu], S. 92). Für ihn sind allein die algebraischen Aspekte von Bedeutung.

Welcher Studierende hat heute je gehört oder weiß, dass in der reellen ebenen oder räumlichen „anschaulichen“ Geometrie, solange Maßverhältnisse keine Rolle spielen, im Gegensatz zu den meisten anderen Teilgebieten der Mathematik Induktionsbeweise nicht vorkommen (man sehe diesbezüglich das Büchlein [Gol] durch); dass Beweise stets konstruktiv sind, es reine Existenzaussagen somit nicht gibt. Erst wenn man die besondere Qualität der reellen Geometrie erlebt hat, zu der natürlich zu allererst die Möglichkeit der Veranschaulichung zählt, ist es meiner Ansicht nach gerechtfertigt, die weiteren faszinierenden Facetten moderner Geometrie kennenzulernen, wie projektive Geometrien über beliebigen Körpern, insbesondere endliche Geometrien, die verschiedenen Arten von Inzidenzgeometrien usw. Erst dann kann man diese vollumfänglich schätzen.

In der Einleitung wird zunächst die sogenannte Hohlwelttheorie vorgestellt, die im weiteren das Studium der Inversionsgeometrie (Kapitel 1) motiviert. Naheliegende Fragen nach der gegenseitigen Abhängigkeit von deren Theoremen führen zum Themenkreis der Axiomatik, der in Kapitel 2 am Beispiel der euklidischen Geometrie genauer behandelt wird. Hier werden auch Hjelmslevs „Natürliche Geometrie“ und der unter leicht verändertem Blickwinkel gültige Beweis des Parallelenaxioms nach Lorenzen (und Dingler) sowie der jeweilige erkenntnistheoretische Hintergrund besprochen.

Die Erweiterung der euklidischen zur projektiven Geometrie wurde durch die Einführung der Perspektive in die Malerei im 15. Jahrhundert angeregt. Dies und der axiomatische Aufbau der projektiven Geometrie, der einzig auf dem Grundbegriff der Inzidenz basiert, sind das Thema von Kapitel 3. Dabei wird die zentrale Bedeutung des Dualitätsprinzips herausgearbeitet, dessen konsequente Anwendung dazu führt, dass Geraden und Ebenen als eigenständige Gebilde angesehen werden müssen, deren Begriffsinhalt sich nicht darin erschöpft, eine Menge von Punkten mit gewissen Eigenschaften zu sein, wie das heute durchwegs postuliert wird.

Kapitel 4 enthält die Klassifizierung der Kurven 2. Grades. Die dort vorgestellte eindimensionale Darstellung komplexer Zahlen nach Locher-Ernst scheint kaum bekannt zu sein; sie ermöglicht eine Veranschaulichung der reellen und nicht reellen Punkte von beliebigen Kurven 2. Ordnung. In Anhang 1 zu diesem Kapitel werden die sogenannten Wegkurven und Wegflächen, das sind die Fixgebilde zweidimensionaler Kollineationen, vorgestellt und klassifiziert. Deren Auftreten vor allem in der Botanik wird in Anhang 2 skizziert, wo auch die Anwendungen der projektiven Geometrie in der geometrischen Mechanik und in der geometrischen Kristallografie behandelt werden.

Kapitel 5 beinhaltet die Herleitung der ebenen Cayley–Klein-Geometrien, das sind die euklidische und acht nichteuklidische Geometrien.

In Kapitel 6 schließlich werden die einzelnen nichteuklidischen Geometrien detailliert beschrieben und es wird teilweise auf deren Bedeutung in außermathematischen Gebieten eingegangen. Besonders interessant ist dabei die dualeuklidische Geometrie, beweist doch deren Existenz, dass sich jedes Objekt der Sinneswelt nicht nur atomistisch-punkthaft sondern auch „ebenenhaft“ denken lässt. Wie Studien von Edwards und anderen gezeigt haben, scheint dieser Aspekt besonders für das Verständnis der Pflanzenwelt Bedeutung zu haben. Zu Ende dieses Kapitels wird kurz die Koordinatisierung der Cayley–Klein-Ebenen mittels zweidimensionaler reeller Algebren besprochen sowie ein Ausblick auf die 27 räumlichen Cayley–Klein-Geometrien gegeben.

Was die Textgestaltung betrifft, so verweisen hochgestellte Zahlen auf die am Ende des Buches zusammengefassten Anmerkungen.

Die Fertigstellung des Buches war nur durch einen einjährigen Forschungsaufenthalt an der Freien Hochschule für Geisteswissenschaften, Goetheanum, in Dornach, Schweiz, möglich. Für die Bereitstellung eines Arbeitszimmers und wertvolle Gespräche danke ich herzlich dem Leiter der Mathematisch-Astronomischen Sektion, Oliver Conradt. Weiter gebührt herzlicher Dank meinen Kollegen Hanns-Jörg Stoß und Esther Ramharter. Ersterer hat große Teile des Manuskripts gelesen und manch wichtige Anregung gegeben; zweitere hatte für philosophische Fragen stets ein offenes Ohr. Besonders bedanke ich mich auch bei Martina Obermaier und Christine Semler für das Schreiben der Erstfassung in LaTeX sowie bei Miriam Zotter für die professionelle Erstellung der Abbildungen. Schließlich sei Thomas Hempfling vom Birkhäuser Verlag für die problemlose und angenehme Zusammenarbeit herzlich gedankt.