

3. Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit sind grundlegende Eigenschaften dynamischer Systeme, die die Lösbarkeit von Regelungsaufgaben entscheidend beeinflussen. Beide Eigenschaften werden in diesem Kapitel ausführlich behandelt. Wie eine grafentheoretische Analyse zeigt, werden sie hauptsächlich durch die Struktur des betrachteten Systems bestimmt.

3.1 Steuerbarkeit

3.1.1 Problemstellung und Definition der Steuerbarkeit

Bei der Lösung jeder Regelungsaufgabe steht die Frage, ob das gegebene System durch die Eingangsgröße $\mathbf{u}(t)$ in einer vorgegebenen Weise beeinflusst werden kann. Was „vorgegebene Weise“ heißt, kann in einzelnen Anwendungsfällen sehr unterschiedlich sein. Erfüllbar sind die meisten Güteforderungen jedoch nur dann, wenn das System durch eine entsprechende Wahl der Eingangsgröße $\mathbf{u}(t)$ im Zustandsraum von einem beliebigen Anfangszustand \mathbf{x}_0 in einen beliebigen Endzustand \mathbf{x}_e gebracht werden kann. Ein System, bei dem dies gelingt, wird *vollständig steuerbar* genannt. Dieser Abschnitt ist einer eingehenden Analyse dieser wichtigen regelungstechnischen Eigenschaft gewidmet.

Zunächst muss die soeben skizzierte Eigenschaft noch etwas genauer beschrieben werden. Da sich der Systemzustand in Abhängigkeit vom Verlauf der Eingangsgröße über ein bestimmtes Zeitintervall ändert und da außerdem die genannte Zustandsüberführung in endlicher Zeit abgeschlossen sein soll, wird im Folgenden das Systemverhalten über das Zeitintervall

$$0 \leq t \leq T_e \quad \text{bzw.} \quad t \in [0, T_e]$$

betrachtet und die dabei verwendete Eingangsgröße mit $\mathbf{u}_{[0, T_e]}$ bezeichnet. Mit dem Symbol $\mathbf{u}_{[0, T_e]}$ soll hervorgehoben werden, dass jetzt nicht der Wert der Eingangsgröße zu einem bestimmten Zeitpunkt t , sondern der Verlauf über ein gegebenes Zeitintervall von Interesse ist.

Da im Folgenden die Wirkung der Eingangsgröße auf den Systemzustand betrachtet wird, ist nur die Zustandsgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.1)$$

maßgebend. Das System kann deshalb auch durch die Angabe der beiden Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} , also entsprechend der bereits verwendeten Schreibweise durch (\mathbf{A}, \mathbf{B}) abgekürzt werden.

Definition 3.1 (Steuerbarkeit) *Ein System (3.1) heißt vollständig steuerbar, wenn es in endlicher Zeit T_e von jedem beliebigen Anfangszustand \mathbf{x}_0 durch eine geeignet gewählte Eingangsgröße $\mathbf{u}_{[0, T_e]}$ in einen beliebig vorgegebenen Endzustand $\mathbf{x}(T_e)$ überführt werden kann.*

Man sagt dann auch, dass das Paar (\mathbf{A}, \mathbf{B}) vollständig steuerbar ist.

Steuerbarkeit in den Nullzustand. Um die Eigenschaft der vollständigen Steuerbarkeit zu prüfen, muss entsprechend der Definition die Zustandsüberführung zwischen beliebigen Paaren $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ und $\mathbf{x}(T_e) = \mathbf{x}_e$ untersucht werden. Aus der Bewegungsgleichung (2.23), die hier für $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ und $\mathbf{D} = \mathbf{O}$ verwendet wird, erhält man

$$\mathbf{x}_e = \Phi(T_e) \mathbf{x}_0 + \int_0^{T_e} \Phi(T_e - \tau) \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

und nach Umstellung

$$\int_0^{T_e} \Phi(T_e - \tau) \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau = \mathbf{x}_e - \mathbf{x}_a \quad (3.2)$$

mit

$$\mathbf{x}_a = \Phi(T_e) \mathbf{x}_0.$$

Da \mathbf{x}_0 ein beliebiger Vektor sein kann und $\Phi(T_e)$ eine reguläre Matrix ist, ist auch \mathbf{x}_a ein beliebiger n -dimensionaler Vektor. Das System ist also genau dann vollständig steuerbar, wenn das Integral auf der linken Seite von Gl. (3.2) durch eine geeignete Wahl von $\mathbf{u}_{[0, T_e]}$ einen beliebig vorgegebenen Vektor $\mathbf{x}_e - \mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b$ darstellt. Genau diese Forderung ist aber bereits dann zu erfüllen, wenn nicht jede beliebige Überführung von \mathbf{x}_0 nach \mathbf{x}_e , sondern lediglich die Überführbarkeit des Systems von einem beliebigen Anfangszustand \mathbf{x}_0 in den Nullzustand $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ untersucht wird, weil damit auch beliebige Vektoren $\mathbf{x}_b = \mathbf{x}_e - \mathbf{x}_a = -\Phi(T_e)\mathbf{x}_0$ dargestellt werden können. Die folgenden Betrachtungen können sich also ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf den Fall $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ beschränken.

Umgekehrt kann die Analyse des Systems auch auf die Frage beschränkt werden, ob das System vom Ruhezustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ in einen beliebigen Endzustand \mathbf{x}_e überführt werden kann. Wenn dies möglich ist, ist das System vollständig steuerbar.

Steuerbarkeit und vollständige Steuerbarkeit. In der Definition 3.1 wird nicht nur die Eigenschaft der Steuerbarkeit, sondern die der *vollständigen* Steuerbarkeit erklärt. Das Attribut „vollständig“ bezieht sich dabei auf die Tatsache, dass das System zwischen *beliebigen* Anfangs- und Endzuständen umgesteuert werden kann.

Wenn das System nicht vollständig steuerbar ist, so erhebt sich die Frage, ob es dann wenigstens zwischen ausgewählten Zuständen \mathbf{x}_0 und \mathbf{x}_e umgesteuert werden kann. Auf diese Frage wird im Abschn. 3.1.5 ausführlich eingegangen.

Wenn es keine Verwechslungen geben kann, wird im Folgenden an Stelle von „vollständig steuerbar“ häufig nur von „steuerbar“ gesprochen.

Steuerbarkeit und Erreichbarkeit. In der Literatur wird häufig zwischen der Steuerbarkeit und der Erreichbarkeit unterschieden. Während man für die Steuerbarkeit fordert, dass das System von einem beliebigen Anfangszustand aus in den Nullzustand überführt werden kann, ist mit der Eigenschaft der Erreichbarkeit die Möglichkeit verbunden, das System vom Nullzustand in einen vorgegebenen Endzustand zu steuern. Beide Eigenschaften fallen bei den hier betrachteten linearen zeitinvarianten Systemen offenbar zusammen, denn in beiden Fällen muss das Integral in Gl. (3.2) einen beliebigen Vektor annehmen können.

Sobald aber das System zeitveränderlich oder gar nichtlinear ist, unterscheiden sich beide Eigenschaften.

3.1.2 Steuerbarkeitskriterium von KALMAN

Die vollständige Steuerbarkeit eines Systems kann mit dem von KALMAN¹ vorgeschlagenen Kriterium geprüft werden. Dieses Kriterium bezieht sich auf die Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_S = (\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}), \quad (3.3)$$

die eine $(n, n \cdot m)$ -Matrix ist. Wenn das System nur eine Eingangsgröße hat, ist die Matrix \mathbf{S}_S quadratisch.

¹ RUDOLF EMIL KALMAN (*1930), amerikanischer Mathematiker, leistete bedeutende Beiträge zur mathematischen Systemtheorie und entwickelte zusammen mit RICHARD BUCY das sogen. Kalmanfilter

Satz 3.1 (Steuerbarkeitskriterium von KALMAN)

Das System (\mathbf{A}, \mathbf{B}) ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{S}_S den Rang n hat:

$$\text{Rang } \mathbf{S}_S = n. \quad (3.4)$$

Im Folgenden wird dieses Kriterium bewiesen, wobei beim Nachweis der Notwendigkeit der angegebenen Bedingung offensichtlich wird, warum die Steuerbarkeit durch den Rang der angegebenen Matrix bestimmt wird. Anschließend wird eine Steuerung $\mathbf{u}_{[0, T_e]}$ angegeben, mit der das System von \mathbf{x}_0 nach \mathbf{x}_e umgesteuert werden kann, womit gleichzeitig die Hinlänglichkeit des Kriteriums nachgewiesen wird.

Notwendigkeit der Bedingung (3.4). Damit das System vollständig steuerbar ist, muss es eine Steuerung $\mathbf{u}_{[0, T_e]}$ geben, durch die das Integral in Gl. (3.2) einen beliebig vorgegebenen Vektor $\mathbf{x}_e - \mathbf{x}_0$ darstellt. Gilt insbesondere $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$, so muss

$$\int_0^{T_e} \Phi(T_e - \tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau = -\Phi(T_e) \mathbf{x}_0$$

gelten. Diese Gleichung kann folgendermaßen umgeformt werden:

$$\begin{aligned} -e^{\mathbf{A}T_e} \mathbf{x}_0 &= \int_0^{T_e} e^{\mathbf{A}(T_e - \tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}T_e} \int_0^{T_e} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ -\mathbf{x}_0 &= \int_0^{T_e} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Die weitere Umformung verwendet die Definitionsgleichung (I-5.10) für die Matrixexponentialfunktion. Man erhält

$$\begin{aligned} -\mathbf{x}_0 &= \mathbf{B} \int_0^{T_e} \mathbf{u}(\tau) d\tau - \mathbf{A}\mathbf{B} \int_0^{T_e} \tau \mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \int_0^{T_e} \frac{\tau^2}{2!} \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &\quad - \mathbf{A}^3 \mathbf{B} \int_0^{T_e} \frac{\tau^3}{3!} \mathbf{u}(\tau) d\tau + \dots \\ &= \mathbf{B} \mathbf{u}_0 + \mathbf{A}\mathbf{B} \mathbf{u}_1 + \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{A}^n \mathbf{B} \mathbf{u}_n + \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

mit

$$\mathbf{u}_i = (-1)^i \int_0^{T_e} \frac{\tau^i}{i!} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Die Summe (3.5) stellt eine Linearkombination der Spalten von \mathbf{B} , \mathbf{AB} , $\mathbf{A}^2\mathbf{B}$ usw. dar, deren Koeffizienten die Elemente der Vektoren \mathbf{u}_i sind und die folglich durch die Funktion $\mathbf{u}_{[0, T_e]}$ bestimmt werden. Ein *beliebiger* Vektor \mathbf{x}_0 kann nur dann durch geeignete Wahl von $\mathbf{u}_{[0, T_e]}$ durch diese Summe erzeugt werden, wenn die Spalten der angegebenen Matrizen den n -dimensionalen Raum aufspannen. Mit anderen Worten, die durch die angegebenen Matrizen gebildete Matrix

$$(\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^n\mathbf{B} \ \mathbf{A}^{n+1}\mathbf{B} \ \dots)$$

muss den Rang n besitzen.

Dass in die Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{S}_S nach Gl. (3.3) nur die ersten n Matrizen eingehen, ist durch das Cayley-Hamilton-Theorem (A2.45) begründet. Demnach können \mathbf{A}^n und alle höheren Potenzen von \mathbf{A} als Linearkombinationen der niedrigeren Potenzen dargestellt werden. Die Matrizen $\mathbf{A}^n\mathbf{B}$, $\mathbf{A}^{n+1}\mathbf{B}$ usw. liefern also keine von den Spalten der niedrigeren Potenzen $\mathbf{A}^i\mathbf{B}$, ($i = 0, 1, \dots, n-1$) linear unabhängigen Spalten. Damit ist erklärt, warum die Bedingung (3.4) notwendig für die vollständige Steuerbarkeit des Systems (\mathbf{A}, \mathbf{B}) ist.

Bestimmung von $\mathbf{u}_{[0, T_e]}$. Wenn die Bedingung (3.4) erfüllt ist, so kann man das System durch die Steuerung

$$\mathbf{u}_{[0, T_e]}(t) = -\mathbf{B}' e^{\mathbf{A}'(T_e-t)} \mathbf{W}_S^{-1} (e^{\mathbf{A}T_e} \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e) \quad (3.6)$$

mit

$$\mathbf{W}_S = \int_0^{T_e} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}' e^{\mathbf{A}'t} dt \quad (3.7)$$

von einem beliebigen Anfangszustand \mathbf{x}_0 in einen beliebigen Endzustand \mathbf{x}_e überführen. Dass dies so ist, erkennt man sofort, wenn man die angegebene Steuerung in die Bewegungsgleichung einsetzt. Damit ist auch die Hinlänglichkeit der Steuerbarkeitsbedingung (3.4) gezeigt.

Die Matrix \mathbf{W}_S heißt GRAMSche Matrix oder gramsche Steuerbarkeitsmatrix. Man kann mit einer ähnlichen Argumentation wie bei Gl. (3.5) zeigen, dass diese Matrix für eine beliebige Endzeit $T_e > 0$ genau dann positiv definit und folglich regulär ist, wenn das Kalmankriterium (3.4) erfüllt ist.

Für $T_e = \infty$ kann die Matrix

$$\mathbf{W}_{S\infty} = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}' e^{\mathbf{A}'t} dt$$

aus der Gleichung

$$\mathbf{A}\mathbf{W}_{S_\infty} + \mathbf{W}_{S_\infty}\mathbf{A}' = -\mathbf{B}\mathbf{B}' \quad (3.8)$$

berechnet werden. Dies ist eine Ljapunowgleichung, die beim Optimalreglerentwurf eine große Rolle spielt und für die es deshalb gut entwickelte Lösungsverfahren gibt (vgl. Gl. (7.16) auf S. 250).

Wenn das System vollständig steuerbar ist, so kann man viele verschiedene Steuerungen $\mathbf{u}_{[0, T_e]}$ angeben, mit der die betrachtete Umsteuerungsaufgabe gelöst werden kann. Die angegebene Steuerung (3.6) ist eine besonders gute Lösung dieses Problems, denn sie bewirkt die Umsteuerung mit minimaler Energie

$$J(\mathbf{u}_{[0, T_e]}) = \int_0^{T_e} \mathbf{u}'(t)\mathbf{u}(t)dt.$$

Deshalb weist diese Steuerung auf einige Aspekte der Steuerbarkeit linearer Systeme hin:

- Wenn das System vollständig steuerbar ist, so kann die Umsteuerung von einem beliebig gegebenen Anfangszustand \mathbf{x}_0 in einen beliebig gegebenen Endzustand \mathbf{x}_e in beliebig kurzer Zeit T_e vorgenommen werden.
- Je kleiner die zur Verfügung stehende Zeit T_e ist, umso größere Stellamplituden sind notwendig, denn umso kleinere Elemente hat die Matrix \mathbf{W}_S und umso größer sind folglich die Elemente von \mathbf{W}_S^{-1} .

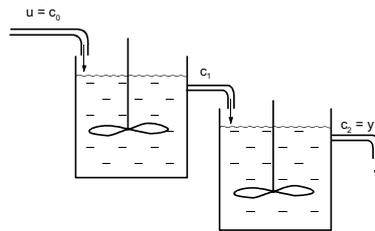


Abb. 3.1: Rührkessel

Beispiel 3.1 Steuerbarkeit gekoppelter Rührkesselreaktoren

Es soll untersucht werden, ob die gekoppelten Rührkessel aus Aufgabe I-5.5 vollständig steuerbar sind. Das Zustandsraummodell für die Regelstrecke lautet

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{F}{V_1} & 0 \\ \frac{F}{V_2} & -\frac{F}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{F}{V_1} \\ 0 \end{pmatrix} u, \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$$y = (0 \ 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

(vgl. Seite I-512). Stellgröße ist die Zulaufkonzentration c_0 des ersten Reaktors, die bei konstantem Durchfluss F durch beide Reaktoren als Stellgröße dient. Die

beiden Zustandsvariablen stellen die Konzentrationen des Stoffes A in den beiden Reaktoren dar (Abb. 3.1).

Die Steuerbarkeitsmatrix heißt

$$S_S = \begin{pmatrix} \frac{F}{V_1} & -\frac{F^2}{V_1^2} \\ 0 & \frac{F^2}{V_1 V_2} \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist für beliebige Parameter F , V_1 und V_2 regulär, d.h., die Rührkesselreaktoren sind vollständig steuerbar. Nur für $F = 0$ ist die Steuerbarkeit nicht gewährleistet. Dies ist leicht zu erklären, denn $F = 0$ bedeutet, dass keine Flüssigkeit durch die Reaktoren fließt. In diesem Fall können die Konzentrationen natürlich nicht verändert werden.

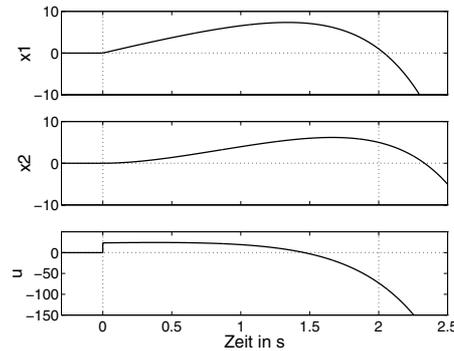


Abb. 3.2: Steuerung der Rührkesselreaktoren in den vorgegebenen Zustand

Für die Parameter $F = 2 \text{ [m}^3/\text{min}]$, $V_1 = 6 \text{ [m}^3]$ und $V_2 = 1 \text{ [m}^3]$ ist die Steuerung $u_{[0,2]}$ nach Gl. (3.6) in Abb. 3.2 zusammen mit dem Konzentrationsverlauf in beiden Reaktoren für den Fall dargestellt, dass $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ gilt und als Zielzustand $\mathbf{x}_e = \mathbf{x}(2) = (1 \ 5)'$ vorgegeben ist. Alle Konzentrationen werden in $\frac{\text{kgmol}}{\text{m}^3}$ gemessen. Erwartungsgemäß erreicht das System zur Zeit $t = T_e = 2$ den vorgegebenen Zustand \mathbf{x}_e . Das Beispiel zeigt jedoch auch, dass der durch den vorgegebenen Endzustand festgelegte relativ große Konzentrationsunterschied zwischen $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$ nur mit einer sehr großen Stellgröße erreicht werden kann. Der Zufluss muss mit betragsmäßig großen Konzentrationen und mit großen Konzentrationsänderungen beaufschlagt werden.

Diskussion. Am Beispiel der Rührkesselreaktoren kann sehr anschaulich gezeigt werden, was die Steuerbarkeit nach Definition 3.1 bedeutet und auch was sie nicht bedeutet. Wollte man vom Standpunkt praktischer Regelungsprobleme definieren, was Steuerbarkeit bedeutet, so würde man sicherlich von einem steuerbaren System fordern, dass es durch geeignete Wahl der Stellgröße in einen vorgeschriebenen Zustand geführt werden kann und dann dort verbleibt, so wie es in Regelungsaufgaben typischerweise gefordert ist. Die Eigenschaft der Steuerbarkeit nach Definition 3.1 gewährleistet, dass das System die erste Forderung erfüllt. Steuerbare Systeme können durch geeignete Wahl der Stellgrößen zwischen zwei beliebigen Punkten \mathbf{x}_0 und \mathbf{x}_e im Zustandsraum „hin- und hergefahren“ werden. Die zweite

Forderung ist jedoch i. Allg. nicht erfüllt. Mit der Steuerbarkeit ist nicht die Möglichkeit verbunden, das System im vorgegebenen Endwert \mathbf{x}_e festzuhalten. In Abb. 3.2 ist zu sehen, dass das System den Zustand \mathbf{x}_e nicht beibehält. Auch wenn man die Steuerung $u(t)$ für $t > 2$ anders festlegt als durch Gl. (3.6), verlässt das System den vorgegebenen Endzustand wieder. Um in den gekoppelten Rührkesselreaktoren ein Konzentrationsgefälle, wie es durch $\mathbf{x}_e = (1 \ 5)'$ vorgeschrieben ist, über längere Zeit aufrechterhalten zu können, ist mehr als die eine Stellgröße notwendig, die hier zur Verfügung steht.

Diese Beobachtung gilt allgemein. Bei einem über eine Stellgröße u vollständig steuerbaren System reicht tatsächlich die einzige Stellgröße u aus, um das System in einen beliebigen Punkt des n -dimensionalen Zustandsraumes zu überführen. Die Steuerbarkeit sichert jedoch nicht, dass das System dort durch geeignete Wahl von u gehalten werden kann. Um dies zu ermöglichen, wären n Stellgrößen notwendig.

Auf einen zweiten Aspekt soll am Beispiel der Rührkesselreaktoren hingewiesen werden. Die Möglichkeit, ein steuerbares System zwischen beliebigen Zuständen und in beliebig kurzer Zeit umzusteuern, ist durch die Linearität des Modells begründet. Sobald man die Stellgrößenbeschränkungen berücksichtigt, wird die Menge der erreichbaren Zustände eingeschränkt. So kann man bei den Rührkesselreaktoren keine negativen Konzentrationen einstellen. Da u andererseits Abweichungen von einem Arbeitspunkt beschreibt, ist für die Rührkesselreaktoren die angegebene Eingangsgröße nur dann realisierbar, wenn die Konzentration im Arbeitspunkt so hoch liegt, dass die negativen Werte von u immer noch positiven Konzentrationswerten im Zulauf entsprechen. Wird die Endzeit vergrößert und liegen die Konzentrationen im Endzustand nicht zu weit auseinander, so kann der gewünschte Endzustand auch mit wesentlich kleineren Stellamplituden erreicht werden. Die mit dem linearen Modell erhaltenen Aussagen sind dann auch unter Berücksichtigung der durch die Stellgrößenbeschränkungen entstehenden, jedoch nicht aktiven Nichtlinearitäten gültig. \square

Anwendung des Kalmankriteriums. Das Kriterium kann bei Systemen mit einem Eingang durch Berechnung der Determinante überprüft werden, wobei

$$\det \mathbf{S}_S \neq 0$$

gelten muss. Für Systeme mit mehreren Eingängen ist die Rangbestimmung nicht ganz so einfach. Man kann hier ausnutzen, dass der Rang einer rechteckigen Matrix \mathbf{S} gleich der Anzahl der von null verschiedenen Singulärwerte $\sigma_i(\mathbf{S})$ ist (vgl. Gl. (A2.59)). Damit die Matrix \mathbf{S}_S den Rang n hat, muss also die (n, n) -Matrix $\mathbf{S}_S \mathbf{S}'_S$ vollen Rang haben, was auf die Bedingung

$$\det \mathbf{S}_S \mathbf{S}'_S \neq 0$$

führt.

Steuerbarkeitsindizes. Das Kalmankriterium fordert, dass es in der Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{S}_S n linear unabhängige Spalten gibt. Für Systeme mit einem Eingang werden diese Spalten durch \mathbf{b} und die Produkte $\mathbf{A}\mathbf{b}$, $\mathbf{A}^2\mathbf{b}$, ..., $\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}$ gebildet. Bei Mehrgrößensystemen braucht man außer der Matrix \mathbf{B} u.U. gar nicht alle Produkte $\mathbf{A}\mathbf{B}$, $\mathbf{A}^2\mathbf{B}$, ..., $\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$, um diese linear unabhängigen Spalten zu finden. Es reicht möglicherweise, wenn in die Steuer-

barkeitsmatrix \mathcal{S}_S nur ν Teilmatrizen geschrieben werden, das Kalmankriterium also auf

$$\mathcal{S}_S(\nu) = (\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{\nu-1}\mathbf{B})$$

angewendet wird. Die kleinste Zahl ν , für die

$$\text{Rang } \mathcal{S}_S(\nu) = n$$

gilt, wird als *Steuerbarkeitsindex* bezeichnet.

Man kann diese Untersuchungen noch etwas verfeinern, indem man den Beitrag betrachtet, den die einzelnen Spalten \mathbf{b}_i der Matrix \mathbf{B} zum Rang der Steuerbarkeitsmatrix leisten. Dafür kann man zunächst die Spalten der Steuerbarkeitsmatrix \mathcal{S}_S so umordnen, dass zuerst alle mit \mathbf{b}_1 gebildeten Spalten stehen, dahinter die mit \mathbf{b}_2 gebildeten usw.

$$\tilde{\mathcal{S}}_S = (\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_2 \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_2 \quad \dots \quad \mathbf{b}_m \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_m \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_m).$$

Diese Umformung ändert nichts am Rang der Matrix, so dass das Kalmankriterium auch auf die neu entstandene Matrix angewendet werden kann.

Ist der Rang der Matrix $\tilde{\mathcal{S}}_S$ gleich n , so sind n der in der Matrix angegebenen Spalten untereinander linear unabhängig. Man kann diese Spalten auf unterschiedliche Weise auswählen. Wieviele Spalten davon zum Eingang u_i gehören, hängt davon ab, wieviele der Produkte $\mathbf{A}^j \mathbf{b}_i$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$) untereinander linear unabhängig sind. Die Zahl dieser linear unabhängigen Spalten wird als KRONECKER-Index ν_i des i -ten Eingangs bezeichnet. ν_i ist also die kleinste Zahl, für die der Vektor $\mathbf{A}^{\nu_i} \mathbf{b}_i$ von den Vektoren $\mathbf{b}_i, \mathbf{A}\mathbf{b}_i, \mathbf{A}^2 \mathbf{b}_i, \dots, \mathbf{A}^{\nu_i-1} \mathbf{b}_i$ linear abhängig ist, während diese Vektoren untereinander linear unabhängig sind.

Man kann nun insgesamt n linear unabhängige Spalten der Matrix $\tilde{\mathcal{S}}_S$ auf folgende Weise auswählen. Man beginnt mit den zum Eingang 1 gehörenden Spalten, von denen die ersten ν_1 linear unabhängig sind. Dann verwendet man \mathbf{b}_2 sowie weitere zum Eingang 2 gehörenden Spalten, solange diese von den bereits ausgewählten linear unabhängig sind. Wenn noch weitere Spalten notwendig sind, so verwendet man nun die zum Eingang 3 gehörigen usw. Die entstehende Matrix hat die Form

$$\hat{\mathcal{S}}_S = (\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \quad \dots \quad \mathbf{A}^{r_1}\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_2 \quad \dots \quad \mathbf{A}^{r_2}\mathbf{b}_2 \quad \dots \quad \mathbf{b}_m \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_m \quad \dots \quad \mathbf{A}^{r_m}\mathbf{b}_m),$$

wobei gilt

$$\sum_{i=1}^m r_i = n$$

und

$$\text{Rang } \hat{\mathcal{S}}_S = n.$$

Es gibt i. Allg. mehrere Matrizen $\hat{\mathcal{S}}_S$, denn je nachdem, wie man die Eingänge numeriert, unterscheidet sich die Anzahl r_i der vom i -ten Eingang verwendeten Spalten.

3.1.3 Steuerbarkeit der kanonischen Normalform

Die Steuerbarkeit wird im Folgenden mit Hilfe der kanonischen Normalform des Zustandsraummodells untersucht, um die Steuerbarkeit in Bezug zu den einzelnen Eigenvorgängen des Systems zu setzen. Unter der Voraussetzung, dass die Matrix \mathbf{A} diagonalisierbar ist, kann das Modell (3.1) bekanntlich mit Hilfe der Transformation

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}(t) \quad (3.11)$$

in die Form (2.5)

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \text{diag } \lambda_i \tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u}(t), \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}_0 \quad (3.12)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{B}$$

überführt werden.

Da sich die kanonischen Zustandsvariablen nicht gegenseitig beeinflussen, kann man die Betrachtungen zunächst auf die i -te Zeile der Gl. (3.12) beschränken

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt} = \lambda_i \tilde{x}_i + \tilde{\mathbf{b}}'_i \mathbf{u}(t), \quad \tilde{x}_i(0) = \tilde{x}_{i0},$$

wobei $\tilde{\mathbf{b}}'_i$ die i -te Zeile der Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$ ist. Wenn $\tilde{\mathbf{b}}'_i$ eine Nullzeile ist, so kann die i -te Zustandsvariable durch den Eingang \mathbf{u} nicht beeinflusst werden und \tilde{x}_i bewegt sich entsprechend

$$\tilde{x}_i(t) = e^{\lambda_i t} \tilde{x}_i(0).$$

Folglich gilt für $\tilde{x}_i(0) = 0$

$$\tilde{x}_i(t) = 0 \quad \text{für alle } t$$

und es kann *kein* beliebiger Endzustand $\tilde{\mathbf{x}}(T_e)$ angesteuert werden. Sobald die Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$ eine Nullzeile besitzt, kann also das System nicht vom Nullzustand zu einem beliebigen Endzustand überführt werden. Es ist nicht vollständig steuerbar.

Der Umkehrschluss, dass das System vollständig steuerbar ist, wenn $\tilde{\mathbf{B}}$ keine Nullzeile besitzt, gilt nur unter einer zusätzlichen Voraussetzung an die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} . Dies wird zunächst für ein System mit einem Eingang untersucht.

Systeme mit einem Eingang. Die Steuerbarkeitsmatrix des Paares $(\text{diag } \lambda_i, \tilde{\mathbf{b}})$ heißt

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_S &= \left(\tilde{\mathbf{b}} \quad \text{diag } \lambda_i \tilde{\mathbf{b}} \quad \text{diag } \lambda_i^2 \tilde{\mathbf{b}} \quad \dots \quad \text{diag } \lambda_i^{n-1} \tilde{\mathbf{b}} \right) \\ &= \text{diag } \tilde{b}_i \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei \tilde{b}_i die Elemente des Vektors $\tilde{\mathbf{b}}$ sind und $\text{diag } \tilde{b}_i$ eine Diagonalmatrix mit den Hauptdiagonalelementen \tilde{b}_i ist. Das Produkt dieser beiden Matrizen ist regulär, wenn außer $\tilde{b}_i \neq 0$ für $i = 1, 2, \dots, n$ auch noch

$$\lambda_i \neq \lambda_j \quad \text{für alle } i \neq j \quad (3.13)$$

gilt, denn die zweite Matrix ist eine vandermondesche Matrix, für deren Determinante die Beziehung (A2.70) gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Das heißt, das System ist genau dann vollständig steuerbar, wenn $\tilde{\mathbf{b}}$ kein Nullelement enthält und wenn alle Eigenwerte einfach sind.

Die Bedingung (3.13) kann man folgendermaßen interpretieren. Wenn die Matrix \mathbf{A} , wie vorausgesetzt wurde, diagonalisierbar ist und die Bedingung (3.13) durch die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ verletzt wird, so gibt es zwei linear unabhängige Eigenvektoren \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 . Für diese Eigenvektoren gelte $\mathbf{v}_1' \mathbf{b} = \tilde{b}_1 \neq 0$ und $\mathbf{v}_2' \mathbf{b} = \tilde{b}_2 \neq 0$, denn ansonsten wäre das System ohnehin nicht vollständig steuerbar. Die zugehörigen kanonischen Zustandsvariablen genügen den Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{x}_1 &= \lambda \tilde{x}_1(t) + \tilde{b}_1 u(t) \\ \frac{d}{dt} \tilde{x}_2 &= \lambda \tilde{x}_2(t) + \tilde{b}_2 u(t). \end{aligned}$$

Wenn sich das System zur Zeit $t = 0$ in der Ruhelage befindet, gilt für eine beliebige Steuerung $u(t)$ zwischen den beiden Zustandsvariablen die Beziehung

$$\tilde{x}_1(t) = \frac{\tilde{b}_1}{\tilde{b}_2} \tilde{x}_2(t). \quad (3.14)$$

Das System kann also in keinen Endzustand $\tilde{\mathbf{x}}_e$ gesteuert werden, für den diese Beziehung nicht gilt. Es ist nicht vollständig steuerbar.

Aus dieser Betrachtung erhält man die folgenden Regeln bezüglich der Steuerbarkeit von Systemen mit einer Eingangsgröße, die für einfache Anwendungen sehr nützlich sind:

- Wenn die Systemmatrix diagonalisierbar ist und mindestens einen mehrfachen Eigenwert besitzt, so ist das System nicht vollständig steuerbar.
- Wenn die Systemmatrix diagonalisierbar ist und das System vollständig steuerbar ist, so hat es keine mehrfachen Eigenwerte.

Man sollte jedoch beachten, dass bei einer nicht-diagonalähnlichen Systemmatrix mehrfache Eigenwerte auftreten können, ohne dass dadurch sofort auf die Steuerbarkeitseigenschaften geschlossen werden kann.

Systeme mit m Eingängen. Um die Steuerbarkeit eines Systems mit mehrfachen Eigenwerten und diagonalähnlicher Systemmatrix zu sichern, müssen die einzelnen Eingangsvariablen in unterschiedlicher Weise in die Zustandsgleichungen derjenigen kanonischen Zustandsvariablen eingehen, die zu denselben Eigenwerten gehören. Wenn

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = \lambda$$

gilt, so sind die ersten p Zustandsgleichungen von Bedeutung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{x}_1 &= \lambda \tilde{x}_1(t) + \tilde{\mathbf{b}}'_1 \mathbf{u}(t) \\ \frac{d}{dt} \tilde{x}_2 &= \lambda \tilde{x}_2(t) + \tilde{\mathbf{b}}'_2 \mathbf{u}(t) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt} \tilde{x}_p &= \lambda \tilde{x}_p(t) + \tilde{\mathbf{b}}'_p \mathbf{u}(t). \end{aligned}$$

Das System ist vollständig steuerbar, wenn die p Vektoren

$$\mathbf{v}'_i \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{b}}'_i$$

untereinander linear unabhängig sind. Da $\tilde{\mathbf{b}}'_i$ m -dimensional ist, folgt als notwendige Bedingung daraus, dass die Eigenwerte eines Systems mit m Eingangsgrößen und diagonalähnlicher Systemmatrix höchstens m -fach auftreten können.

Diese Untersuchungen sind in dem folgenden Steuerbarkeitskriterium zusammengefasst, das von GILBERT angegeben wurde.

Satz 3.2 (Steuerbarkeitskriterium von GILBERT)

Das System (diag λ_i , $\tilde{\mathbf{B}}$), dessen Zustandsraummodell in kanonischer Normalform vorliegt, ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$ keine Nullzeile besitzt und wenn die p Zeilen $\tilde{\mathbf{b}}'_i$ der Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$, die zu den kanonischen Zustandsgrößen eines p -fachen Eigenwertes gehören, linear unabhängig sind.

Steuerbarkeit der Eigenvorgänge. Die Steuerbarkeit ist in Definition 3.1 als eine Eigenschaft des gesamten Systems (\mathbf{A}, \mathbf{B}) definiert worden. Bei der Steuerbarkeitsanalyse hat man deshalb nur zu entscheiden, ob das System als Ganzes vollständig steuerbar ist oder nicht.

Die mit dem Zustandsraummodell in kanonischer Normalform durchgeführten Untersuchungen haben nun aber gezeigt, dass die vollständige Steuerbarkeit bedeutet, dass alle kanonischen Zustandsvariablen unabhängig voneinander durch die Eingangsgrößen beeinflusst werden können. Wenn das System nicht vollständig steuerbar ist, so liegt dies daran, dass eine oder mehrere kanonische Zustandsvariablen nicht oder nicht unabhängig voneinander beeinflusst werden können.

Aus diesem Grunde bezieht man häufig die Steuerbarkeit auf die Eigenvorgänge $e^{\lambda_i t}$ bzw. sogar auf die Eigenwerte λ_i der Matrix \mathbf{A} und bezeichnet den Eigenvorgang bzw. den Eigenwert als steuerbar oder nicht steuerbar. Sind alle Eigenvorgänge bzw. Eigenwerte steuerbar, so ist das System vollständig steuerbar entsprechend Definition 3.1. Ist das System nicht vollständig steuerbar, so gibt es mindestens einen Eigenvorgang bzw. Eigenwert, der nicht steuerbar ist.

Diese Sprachregelung ist zwar für Systeme mit mehrfachen Eigenwerten problematisch, weil es Systeme geben kann, bei denen ein „Exemplar“ eines mehrfachen Eigenwertes steuerbar ist, während ein anderes nicht steuerbar ist. Für die hier behandelten Anwendungen spielen diese Schwierigkeiten jedoch keine Rolle.

Vorteilhaft ist der Bezug der Steuerbarkeitseigenschaft zu den Eigenwerten vor allem bei nicht vollständig steuerbaren Systemen. Man kann dann überprüfen, welche Ursachen das Fehlen der vollständigen Steuerbarkeit hat und welche Auswirkungen auf das Regelkreisverhalten daraus abgeleitet werden können. Gegebenenfalls weiß man auch, wie man die fehlende Steuerbarkeit durch Veränderung der Eingriffsmöglichkeiten in das System beheben kann.

Man sollte jedoch darauf achten, dass zu Eigenvorgängen und Eigenwerten Bezug genommen wird. Nur im Falle kanonischer Zustandsvariablen kann man auch von der Steuerbarkeit einzelner Zustandsvariablen \tilde{x}_i sprechen.

Aufgabe 3.1 Steuerbarkeit von Systemen mit mehrfachen Eigenwerten

Betrachten Sie ein System mit m Eingängen, das einen p -fachen Eigenwert λ besitzt. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen richtig sind:

- Das System kann nur dann vollständig steuerbar sein und gleichzeitig eine diagonalähnliche Systemmatrix \mathbf{A} besitzen, wenn die Vielfachheit des Eigenwertes die Zahl der Eingänge nicht übersteigt ($p \leq m$).
- Wenn die Vielfachheit des Eigenwertes die Zahl der Eingänge übersteigt ($p > m$), so ist das System entweder nicht vollständig steuerbar oder es hat keine diagonalähnliche Systemmatrix. \square

3.1.4 Steuerbarkeitskriterium von HAUTUS

Das von HAUTUS vorgeschlagene Steuerbarkeitskriterium ermöglicht nicht nur den Test, ob das System vollständig steuerbar ist, sondern es gibt gegebenenfalls auch an, welche Eigenwerte nicht steuerbar sind. Das Kriterium ist äquivalent dem Kalmankriterium, wie folgende Überlegung zeigt.

Wenn das System nicht vollständig steuerbar ist, so gibt es einen n -dimensionalen Zeilenvektor \mathbf{q}' , so dass das Produkt

$$\mathbf{q}'\mathbf{S}_S = \mathbf{q}'(\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}) = \mathbf{0}'$$

einen nm -dimensionalen Nullvektor darstellt. Dabei gilt insbesondere

$$\mathbf{q}'\mathbf{B} = \mathbf{0}', \quad (3.15)$$

wobei $\mathbf{0}'$ ein m -dimensionaler Nullvektor ist. Da die ersten n Potenzen von \mathbf{A} linear unabhängig sind, stellen die Produkte $\mathbf{q}'\mathbf{A}^i$ linear unabhängige Zeilenvektoren dar. Damit das Produkt $\mathbf{q}'\mathbf{S}_S$ tatsächlich verschwindet, muss \mathbf{q}' ein Linkseigenvektor von \mathbf{A} sein. Es muss also

$$\mathbf{q}'\mathbf{A} = \lambda\mathbf{q}'$$

bzw.

$$\mathbf{q}'(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{0}'$$

gelten. λ stellt dabei einen beliebigen Eigenwert von \mathbf{A} dar.

Damit das System vollständig steuerbar ist und deshalb die angegebenen Bedingungen nicht erfüllt sind, darf also für keinen Eigenvektor von \mathbf{A} die Beziehung (3.15) gelten. Dieser Sachverhalt wird im Steuerbarkeitskriterium von Hautus gefordert.

Satz 3.3 (Steuerbarkeitskriterium von HAUTUS)

Das System (\mathbf{A}, \mathbf{B}) ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die Bedingung

$$\text{Rang}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} \ \mathbf{B}) = n \quad (3.16)$$

für alle komplexen Werte λ erfüllt ist.

In der zum Test herangezogenen Matrix $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} \ \mathbf{B})$ stehen die Matrizen $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$ und \mathbf{B} nebeneinander, so dass es sich hierbei um eine $(n, n + m)$ -Matrix handelt.

Wenn λ kein Eigenwert der Matrix \mathbf{A} ist, so ist das Kriterium erfüllt, weil bereits die Matrix $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$ den geforderten Rang besitzt. Die Bedingung (3.16) muss also nur für $\lambda = \lambda_i$ geprüft werden, wobei λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) die Eigenwerte von \mathbf{A} sind.

Vergleicht man das Kalmankriterium mit dem Hautuskriterium, so wird offensichtlich, dass bei Anwendung der Bedingung (3.4) der Rang einer

(n, nm) -Matrix bestimmt werden muss, während die Bedingung (3.16) die Überprüfung des Ranges von n Matrizen der Dimension $(n, n + m)$ erfordert, wobei zuvor die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} zu bestimmen sind. Trotz dieses vergleichsweise großen Aufwandes, den das Hautuskriterium mit sich bringt, ist dieses Kriterium aus zwei Gründen häufig das zweckmäßigere. Erstens kann man das Hautuskriterium meist auch dann anwenden, wenn die Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} Parametersymbole enthalten, die Elemente dieser Matrizen also nicht zahlenmäßig, sondern bezüglich ihrer Abhängigkeit von bestimmten Systemparametern vorgegeben sind. Zweitens zeigt das Hautuskriterium, welche Eigenwerte gegebenenfalls nicht steuerbar sind.

Das Hautuskriterium zeigt außerdem, dass die nicht steuerbaren Eigenwerte Eingangsentkopplungsnullstellen des Systems sind. Beide Begriffe können synonym verwendet werden. Sie wurde getrennt voneinander eingeführt, wobei der Begriff der Entkopplungsnullstellen bei der Analyse der Nullstellen des Systems definiert wurde, während die nicht steuerbaren Eigenwerte aus der Steuerbarkeitsanalyse hervorgingen. Die Übereinstimmung dieser beiden Begriffe weist auf die Bedeutung der nicht steuerbaren Eigenwerte für das E/A-Verhalten hin, das im Abschn. 3.3 noch ausführlich untersucht wird.

3.1.5 Nicht vollständig steuerbare Systeme

Welche Gründe kann es geben, dass ein System nicht vollständig steuerbar ist? Drei wichtige Beispiele sollen im Folgenden diskutiert werden, um diese Frage zu beantworten.

|| Eigenvorgänge, die nicht mit dem Eingang verbunden sind, sind nicht steuerbar.

Dieser Fall wurde anhand des Zustandsraummodells in kanonischer Normalform schon verdeutlicht. Wenn die i -te Zeile $\tilde{\mathbf{b}}_i$ der Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$ eine Nullzeile ist, so wirkt der Eingang \mathbf{u} nicht auf die Bewegung der Zustandsvariablen $\tilde{\mathbf{x}}_i$.

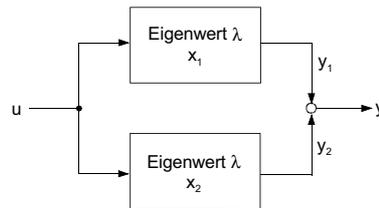


Abb. 3.3: Beispiele für nicht vollständig steuerbare Systeme

|| Zwei parallele Teilsysteme mit denselben dynamischen Eigenschaften sind nicht vollständig steuerbar.

Beispiel 3.2 *Nicht beobachtbare Eigenvorgänge in einer Parallelschaltung*

Ein Beispiel ist in Abb. 3.3 (oben) angegeben. Zwei PT₁-Glieder mit den Zustandsvariablen x_1 und x_2 und denselben Zeitkonstanten $T = \frac{1}{\lambda}$ führen auf das Zustandsraummodell

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u \quad (3.17)$$

$$y = (1 \ 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

für das die im Satz 3.2 angegebene Bedingung nicht gilt, denn die Elemente b_1 und b_2 können nicht gleichzeitig von null verschieden und linear unabhängig sein. Das System ist nicht vollständig steuerbar.

Der Grund liegt in der Tatsache, dass beide Teilsysteme für sich genommen durch die Steuerung in beliebige Zustände gebracht werden können, es jedoch nicht möglich ist, beide Teilsysteme mit derselben Eingangsgröße in unabhängig voneinander vorgegebene Endwerte $x_1(T_e)$ und $x_2(T_e)$ zu steuern (vgl. Gl. (3.14)). Da sich beide Teilsysteme in gleicher Geschwindigkeit bewegen, kann das eine Teilsystem beispielsweise nicht in einen Zustand mit negativem Vorzeichen gebracht werden, während der andere Zustand positive Werte annimmt.

Diese Tatsache lässt sich auf die Parallelschaltung von Teilsystemen höherer Ordnung mit identischen dynamischen Eigenschaften verallgemeinern, wie in Aufgabe 3.5 nachgewiesen werden soll. □

|| Lassen sich in der Übertragungsfunktion eines Eingrößensystems ein oder mehrere Pole gegen Nullstellen kürzen, so kann man die mit den Polen verbundenen Eigenvorgänge nicht steuern (oder, wie später gezeigt wird, nicht beobachten).

Beispiel 3.3 *Nicht vollständig steuerbares System*

Ein Beispiel ist die Reihenschaltung von

$$\dot{x}_1 = (\lambda_1 + 1)x_1 + u$$

$$y_1 = x_1 + u$$

und

$$\dot{x}_2 = \lambda_1 x_2 + y_1$$

$$y = x_2,$$

die in Abb. 3.3 (unten) im Blockschaltbild dargestellt ist. Das Zustandsraummodell der Reihenschaltung lautet

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (0 \ 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Aus der Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_S = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 + 1 \\ 1 & \lambda_1 + 1 \end{pmatrix}$$

folgt, dass die Reihenschaltung nicht vollständig steuerbar ist. Mit dem Hautuskriterium kann man nachprüfen, dass λ_1 der nichtsteuerbare Eigenwert ist, denn

$$\text{Rang} \left(\lambda_1 \mathbf{I} - \begin{pmatrix} \lambda_1 + 1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 1.$$

Der Grund für die Nichtsteuerbarkeit des Eigenwertes λ_1 liegt also darin, dass das erste Teilsystem der Reihenschaltung eine Nullstelle bei λ_1 besitzt, die gleichzeitig eine Entkopplungsnulstelle der Reihenschaltung ist.

In der E/A-Beschreibung treten weder die Entkopplungsnulstelle noch der Eigenwert λ_1 auf. Die Übertragungsfunktion der Reihenschaltung heißt

$$G(s) = \frac{s - \lambda_1}{s - (\lambda_1 + 1)} \frac{1}{s - \lambda_1} = \frac{1}{s - (\lambda_1 + 1)}.$$

In ihr kürzen sich die Linearfaktoren der Entkopplungsnulstelle und des Eigenwertes des zweiten Teilsystems heraus, so dass die Reihenschaltung nur einen Pol bei $\lambda_1 + 1$ besitzt. \square

Steuerbarer Unterraum. Wohin kann man das System steuern, wenn es nicht vollständig steuerbar ist? Diese Frage kann unter Nutzung der Überlegungen aus dem Abschn. 3.1.2 beantwortet werden. Dort wurde in Gl. (3.5) gezeigt, dass nur solche Zielzustände erreicht werden können, die sich als Linearkombinationen der Spalten der Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{S}_S darstellen lassen. Die Menge dieser Zustände stellt einen Unterraum des Zustandsraumes \mathbb{R}^n dar. Man spricht deshalb vom *steuerbaren Unterraum* des Systems (\mathbf{A}, \mathbf{B}) .

Für Systeme mit einem Eingang kann das System aus der Ruhelage $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ also in alle diejenigen Zustände \mathbf{x}_e gesteuert werden, die in der Form

$$\mathbf{x}_e = c_0 \mathbf{b} + c_1 \mathbf{A} \mathbf{b} + \dots + c_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \quad (3.19)$$

mit reellen Koeffizienten c_i geschrieben werden können. Ist die Steuerbarkeitsmatrix regulär, so sind alle Vektoren $\mathbf{A}^i \mathbf{b}$ linear unabhängig und jedes beliebige $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$ lässt sich in der angegebenen Form darstellen. Hat die Matrix \mathbf{S}_S jedoch nur den Rang $p < n$, so sind nur p Vektoren linear unabhängig und \mathbf{x}_e muss in einem p -dimensionalen Unterraum von \mathbb{R}^n liegen, um in der angegebenen Weise darstellbar zu sein.

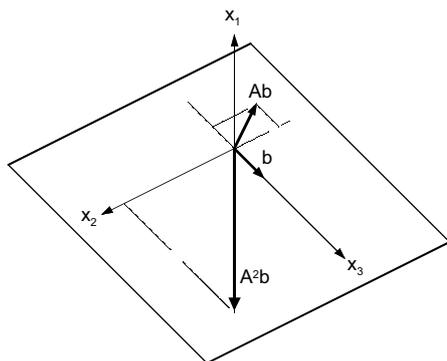


Abb. 3.4: Darstellung der Spalten der Steuerbarkeitsmatrix im dreidimensionalen Zustandsraum

Beispiel 3.4 Steuerbarer Unterraum eines Systems dritter Ordnung

Dieser Sachverhalt ist in Abb. 3.4 für das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

dargestellt. Die Vektoren

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

liegen in der x_2/x_3 -Ebene. Folglich können nur die in dieser Ebene liegenden Zustände aus der Ruhelage des Systems durch eine geeignet ausgewählte Steuerung $u_{[0, T_e]}$ erreicht werden. \square

Betrachtet man das System in kanonischer Normalform, so führt bekanntlich jede Nullzeile von $\tilde{\mathbf{B}}$ dazu, dass eine kanonische Zustandsvariable \tilde{x}_i nicht steuerbar ist. Der steuerbare Teilraum ist dann gerade durch alle steuerbaren kanonischen Zustandsvariablen bestimmt.

Beispiel 3.5 Steuerbarkeit eines Systems in kanonischer Normalform

Ist die erste kanonische Zustandsvariable nicht steuerbar, weil die erste Zeile $\tilde{\mathbf{b}}_1'$ der Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$ eine Nullzeile ist, so gilt für diese Zustandsvariable die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}_1 = \lambda_1\tilde{x}_1, \quad \tilde{x}_1(0) = \tilde{x}_{01}.$$

Das heißt, diese Zustandsvariable bewegt sich unbeeinflusst vom Eingang entsprechend

$$\tilde{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\tilde{x}_{01}.$$

Wenn alle anderen Zustandsvariablen steuerbar sind, so können sie durch eine geeignete Steuerung $\mathbf{u}_{[0, T_e]}$ zur Zeit T_e auf vorgegebene Werte $\tilde{x}_{e2}, \tilde{x}_{e3}, \dots, \tilde{x}_{en}$ gebracht werden. Der zur Zeit T_e erreichte Zustand ist dann

$$\tilde{\mathbf{x}}(T_e) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 T_e} \tilde{x}_{01} \\ \tilde{x}_{e2} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{en} \end{pmatrix}.$$

Seine erste Komponente hängt von dem durch die Steuerung nicht beeinflussbaren Anfangswert \tilde{x}_{01} ab, während alle anderen Komponenten vorgegeben werden können. Der steuerbare Unterraum ist der durch die kanonischen Zustandsvariablen $\tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots, \tilde{x}_n$ aufgespannte $(n-1)$ -dimensionale Raum. \square

Betrachtet man das Steuerbarkeitsproblem in umgekehrter Weise, bei der das System aus einem von null verschiedenen Anfangszustand \mathbf{x}_0 in den Nullzustand $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ gebracht werden soll, so gelten die bisherigen Überlegungen sinngemäß für die Menge derjenigen Anfangszustände, für die diese Umsteuerung möglich ist.

Ganz allgemein kann man also die Bewegung $\mathbf{x}(t)$, die das System mit Anfangszustand \mathbf{x}_0 unter der Einwirkung der Steuerung $\mathbf{u}(t)$ ausführt, in einen steuerbaren und einen nicht steuerbaren Anteil zerlegen:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{stb}}(t) + \mathbf{x}_{\text{nstb}}(t). \quad (3.20)$$

Verwendet man kanonische Zustandsvariablen, so ist diese Trennung sehr einfach vorzunehmen. Die Zustandsvariablen sind in Abhängigkeit davon, ob sie steuerbar sind oder nicht, den beiden Teilvektoren zuzuordnen. Für das im Beispiel 3.4 angegebene dreidimensionale System gilt

$$\mathbf{x}_{\text{stb}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_{\text{nstb}}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h., der steuerbare Zustand liegt in dem durch \tilde{x}_2 und \tilde{x}_3 aufgespannten Unterraum, während der nicht steuerbare Anteil in dem durch \tilde{x}_1 beschriebenen Unterraum liegt. Für allgemeine Zustandskoordinaten ist diese Aufteilung insofern schwieriger, dass die Zustände keine Basisvektoren für die betreffenden Teilräume mehr sind, sondern, wie erläutert, die linear unabhängigen Spalten der Steuerbarkeitsmatrix als eine Basis des steuerbaren Unterraumes dienen.

Beispiel 3.6 Steuerbarer Unterraum eines Systems zweiter Ordnung

Das System

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u, \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist offensichtlich nicht vollständig steuerbar, denn die Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

hat den Rang eins. Wendet man das Hautuskriterium für die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = -4$ und $\lambda_2 = 1$ an, so sieht man, dass der stabile Eigenwert λ_1 nicht steuerbar ist, während λ_2 steuerbar ist.

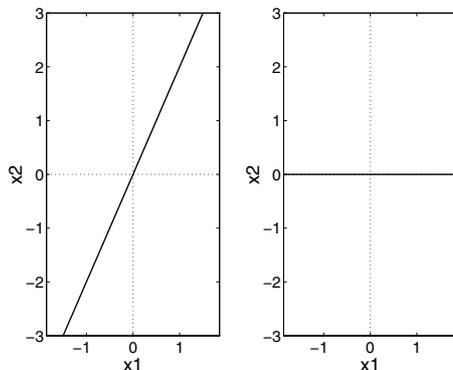


Abb. 3.5: Steuerbare Unterräume für das Beispiel in allgemeiner (links) und in kanonischer Zustandsraumdarstellung (rechts)

Vom Nullzustand ausgehend kann das System nur Zustände \mathbf{x}_e erreichen, die sich in der Form (3.19)

$$\mathbf{x}_e = \begin{pmatrix} x_1(T_e) \\ x_2(T_e) \end{pmatrix} = c_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

darstellen lassen, wobei hier nur ein Summand auftritt, da die zweite Spalte der Steuerbarkeitsmatrix von der ersten linear abhängig ist. Diese Zustände bilden eine Gerade im Zustandsraum \mathbb{R}^2 , die durch die Richtung des Vektors \mathbf{b} festgelegt ist (Abb. 3.5 (links)).

Transformiert man das System durch

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,34 & 0,45 \\ -1,26 & 0,63 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

in kanonische Normalform, so erhält man

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2,24 \\ 0 \end{pmatrix} u.$$

Der steuerbare Unterraum liegt jetzt gerade in Richtung der kanonischen Zustandsvariablen \tilde{x}_1 , wie in Abb. 3.5 rechts zu sehen ist.

Für verschwindenden Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ wird das System durch die Eingangsgröße u entlang der \tilde{x}_1 -Achse gesteuert und kann dort auf einen bestimmten Endwert

$$\mathbf{x}_e = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{e1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

gebracht werden. Hat das System eine Anfangsauslenkung, so bewegt es sich von diesem Anfangszustand ausgehend, wobei die Bewegung der zweiten Komponente

$$\tilde{x}_2(t) = e^{-4t} \tilde{x}_{02}$$

nicht von der Steuerung beeinflusst ist, während die erste Komponente durch die Steuerung zielgerichtet beeinflusst werden kann. Der zu einem vorgegebenen Zeitpunkt T_e erreichbare Zustand kann nur in der ersten Komponente festgelegt werden, was durch die Schreibweise

$$\mathbf{x}_e = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{e1} \\ * \end{pmatrix}$$

ausgedrückt wird, in der der Stern einen von der Steuerung unabhängigen Wert darstellt. Diese Endzustände liegen nicht auf der in Abb. 3.5 markierten Geraden, sondern auf einer Parallelen zu dieser Geraden, die durch den Punkt $\tilde{x}_2(T_e) = *$ verläuft. \square

3.1.6 Erweiterungen

Ausgangssteuerbarkeit. Die bisherigen Überlegungen kann man auf das Problem übertragen, den Ausgang des Systems

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

vom Anfangswert $\mathbf{y}(0)$ in einen gegebenen Endwert $\mathbf{y}_e = \mathbf{y}(T_e)$ zu überführen. Diese Eigenschaft wird Ausgangssteuerbarkeit genannt, während man die bisherige Steuerbarkeit genauer als Zustandssteuerbarkeit bezeichnet.

Bedingungen, unter denen das System vollständig ausgangssteuerbar ist, können in derselben Weise hergeleitet werden, wie dies für die Zustandssteuerbarkeit getan wurde. Insbesondere folgt aus der Bewegungsgleichung ähnlich Gl. (3.5), dass alle diejenigen Werte des Ausgangsvektors erreicht werden können, die sich als Linearkombination der Spalten von $\mathbf{C}\mathbf{B}$, $\mathbf{C}\mathbf{A}^i\mathbf{B}$ und \mathbf{D} darstellen lassen. Das System $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ ist genau dann vollständig ausgangssteuerbar, wenn der Rang der Matrix

$$\mathbf{S}_{AS} = (\mathbf{C}\mathbf{B} \ \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} \ \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \ \mathbf{D})$$

mit der Zahl der Ausgangsgrößen übereinstimmt:

$$\boxed{\text{Bedingung für Ausgangssteuerbarkeit:} \quad \text{Rang } \mathbf{S}_{AS} = r.} \quad (3.21)$$

Da, wie immer, vorausgesetzt wird, dass $\text{Rang } \mathbf{C} = r$ gilt, ist jedes zustandssteuerbare System auch ausgangssteuerbar. Die Umkehrung gilt jedoch nicht. Das heißt, die Ausgangssteuerbarkeit ist eine schwächere Eigenschaft als die der Zustandssteuerbarkeit.

Steuerbarkeit in einem Unterraum. Eng verbunden mit der Ausgangssteuerbarkeit ist die Frage, ob man das System in dem durch

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x}$$

beschriebenen Teilraumes des Zustandsraums \mathbb{R}^n in jeden beliebigen Punkt $z(T_e)$ steuern kann. Für die Dimension (r, n) der Matrix \mathbf{H} gilt $r < n$. Als notwendige und hinreichende Bedingung dafür muss die Testmatrix

$$\mathbf{S}_{\text{SH}} = \mathbf{H}\mathbf{S}_S = (\mathbf{H}\mathbf{B} \ \mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{B} \ \mathbf{H}\mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{H}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B})$$

vollen Rang haben. Die für die Ausgangssteuerbarkeit maßgebende Matrix \mathbf{S}_{AS} erhält man für nicht sprungfähige Systeme ($\mathbf{D} = \mathbf{O}$) aus dieser Beziehung mit $\mathbf{C} = \mathbf{H}$.

Steuerbarkeitsmaße. Bisher wurde bezüglich der Steuerbarkeit die Frage gestellt, *ob* das System in beliebig vorgegebene Zustände gesteuert werden kann. Wenn man diese Umsteuerung praktisch ausführen will, so ist es auch interessant zu wissen, *wie gut* das System steuerbar ist, wie groß also die Stellamplituden für diese Umsteuerung sein müssen. Im Beispiel 3.1 wurde erläutert, weshalb man sehr häufig an kleinen Stellamplituden interessiert ist.

Häufig steht bei der Frage nach dem Grad der Steuerbarkeit ein Vergleich der Steuerbarkeit der einzelnen Eigenvorgänge untereinander im Mittelpunkt. Wenn man das System stabilisieren will, ist es beispielsweise problematisch, wenn die bereits stabilen Eigenvorgänge gut steuerbar, die instabilen Vorgänge jedoch schlecht steuerbar sind.

In der Literatur sind viele unterschiedliche Bewertungsmaße vorgeschlagen worden. Modale Bewertungsmaße drücken aus, wie gut der Eingang über die Zeile $\tilde{\mathbf{b}}'_i$ der Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$ auf den i -ten Eigenvorgang zugreift. Man definiert deshalb als modales Steuerbarkeitsmaß für den i -ten Eigenvorgang

$$s_i = \tilde{\mathbf{b}}'_i \tilde{\mathbf{b}}_i.$$

Je größer s_i ist, umso kleiner kann die Amplitude von \mathbf{u} sein, mit der das System den vorgegebenen Zustand erreicht.

Die Steuerbarkeitsmaße haben den Mangel, dass aus ihnen nicht auf die Größenordnung der Reglerparameter geschlossen bzw. die für eine bestimmte Regelungsaufgabe notwendigen (maximalen) Stellamplituden berechnet werden können. Obwohl die Idee, die Steuerbarkeit quantitativ auszudrücken, dem Wunsch des Ingenieurs nach Beantwortung dieser praktischen Fragen Rechnung trägt, ist bisher keine befriedigende Lösung gefunden worden.

Aufgabe 3.2** Steuerbarkeit und Übertragungsverhalten

Gegeben ist das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}$$

1. Untersuchen Sie, welcher Eigenwert nicht steuerbar ist. Ist das System Ausgangssteuerbar?
2. Stellen Sie die Übertragungsfunktionsmatrix auf und vergleichen Sie deren Pole mit den Eigenwerten der Systemmatrix des Zustandsraummodells.

3. In welche Zustände $\mathbf{x}(T_e) = \mathbf{y}(T_e)$ kann das System aus der Ruhelage $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ gesteuert werden?
4. Wie verändert sich der Systemausgang, wenn das System nicht aus der Ruhelage, sondern vom Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = (1 \ 1)'$ aus mit derselben Eingangsgröße erregt wird? \square

Aufgabe 3.3** Systeme mit Polen und Nullstellen, die sich „fast“ kürzen

Wenn ein Eigenwert λ der Matrix \mathbf{A} zugleich Eingangsentkopplungsnulstelle ist, so ist er nicht steuerbar und erscheint nicht in der Gewichtsfunktionsmatrix bzw. der Übertragungsfunktionsmatrix. Was passiert, wenn sich die Eingangsentkopplungsnulstelle um ε von λ unterscheidet? Untersuchen Sie diese Fragestellung anhand eines Systems zweiter Ordnung in kanonischer Normalform, indem Sie die Übergangsfunktion in Abhängigkeit von ε berechnen. Zeigen Sie, dass der Eigenvorgang $e^{\lambda t}$ umso weniger angeregt wird, je kleiner ε ist. \square

3.2 Beobachtbarkeit

3.2.1 Problemstellung und Definition der Beobachtbarkeit

Bei den meisten technischen Systemen sind nicht alle Zustandsvariablen messbar. Statt dessen kann nur der Ausgangsvektor $\mathbf{y}(t)$ messtechnisch erfasst werden. Da die Dimension von \mathbf{y} kleiner als die von \mathbf{x} ist, ist es schon aus Dimensionsgründen nicht möglich, aus dem aktuellen Wert $\mathbf{y}(t)$ des Ausgangsvektors den aktuellen Wert $\mathbf{x}(t)$ des Zustandsvektors zu berechnen.

Wenn beispielsweise die Ausgabegleichung eines Systems zweiter Ordnung

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

lautet und zum Zeitpunkt t_1

$$y(t_1) = 8$$

gemessen wurde, so kann sich das System in jedem beliebigen Zustand befinden, für den die Beziehung

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 8$$

gilt. Dies sind alle diejenigen Zustände, die auf der Geraden

$$x_1 = 4 - 2x_2$$

liegen (Abb. 3.6).

Dem Beobachtungsproblem liegt nun die Überlegung zu Grunde, dass man über den Zustand des Systems mehr erfahren kann, wenn man die Bewegung des Systems nicht nur in einem Zeitpunkt, sondern über ein bestimmtes Zeitintervall beobachtet und aus der Trajektorie $\mathbf{y}(t)$ ($0 \leq t \leq T_e$) mit Hilfe des Modells den aktuellen Systemzustand rekonstruiert. Wenn das System durch

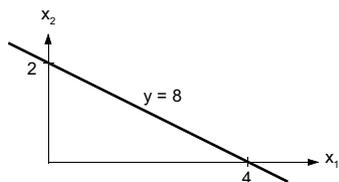


Abb. 3.6: Zustände, die dieselbe Ausgangsgröße erzeugen

eine Steuerung $\mathbf{u}(t)$ von außen in seiner Bewegung beeinflusst wird, so muss man diese Steuerung kennen und in die Rekonstruktion des Zustandes einfließen lassen. Man nennt ein System beobachtbar, wenn man den Zustand auf diese Weise berechnen kann.

Da es auch hier wie bei der Steuerbarkeit auf den zeitlichen Verlauf der Eingangs- und Ausgangsgrößen ankommt, wird im Folgenden an Stelle von \mathbf{u} und \mathbf{y} mit den Bezeichnungen $\mathbf{u}_{[0, T_e]}$ und $\mathbf{y}_{[0, T_e]}$ gearbeitet, die diesen Sachverhalt hervorheben. Das Modell hat die gewohnte Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.22)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (3.23)$$

wobei im Folgenden nicht-sprungfähige Systeme betrachtet werden.

Definition 3.2 (Beobachtbarkeit) Ein System (3.22), (3.23) heißt vollständig beobachtbar, wenn der Anfangszustand \mathbf{x}_0 aus dem über ein endliches Intervall $[0, T_e]$ bekannten Verlauf der Eingangsgröße $\mathbf{u}_{[0, T_e]}$ und der Ausgangsgröße $\mathbf{y}_{[0, T_e]}$ bestimmt werden kann.

Beobachtbarkeit des ungestörten Systems. In der Bewegungsgleichung des Systems

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\Phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{C}\Phi(t - \tau) \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

stehen die freie Bewegung

$$\mathbf{y}_{\text{frei}}(t) = \mathbf{C}\Phi(t) \mathbf{x}_0$$

und die erzwungene Bewegung

$$\mathbf{y}_{\text{erzw}}(t) = \int_0^t \mathbf{C}\Phi(t - \tau) \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau.$$

Da der Anfangszustand nur in die freie Bewegung eingeht, kann er auch nur aus dieser Bewegung berechnet werden. Da andererseits die freie Bewegung

mit Hilfe des Modells aus der gegebenen Eingangsgröße $\mathbf{u}_{[0, T_e]}$ genau bestimmt werden kann

$$\mathbf{y}_{\text{frei}}(t) = \mathbf{y}(t) - \int_0^t \mathbf{C}\Phi(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau,$$

wird im Folgenden nur das ungestörte System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

betrachtet. Ist dieses System beobachtbar, so ist auch das gestörte System beobachtbar. Folglich hängt die Beobachtbarkeit nur von den Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{C} ab, weshalb man auch von der Beobachtbarkeit des Paares (\mathbf{A}, \mathbf{C}) spricht.

Beobachtbarkeit und vollständige Beobachtbarkeit. Wie bei der Steuerbarkeitsdefinition fordert die Beobachtbarkeitsdefinition, dass jeder beliebige Anfangszustand \mathbf{x}_0 aus den Eingangs- und Ausgangsgrößen bestimmbar sein soll. Deshalb spricht man genauer von *vollständiger* Beobachtbarkeit, auch wenn im Folgenden dieses Attribut häufig weggelassen wird.

Wenn das System nicht vollständig beobachtbar ist, so ist die Beobachtbarkeitseigenschaft an eine eingeschränkte Menge von Anfangszuständen geknüpft. Wie bei der Steuerbarkeit ist diese Menge ein Unterraum des Zustandsraumes \mathbb{R}^n .

Beobachtbarkeit und Rekonstruierbarkeit. Bei dem geschilderten Beobachtungsproblem kann man sich einerseits für die Bestimmung des Anfangszustandes $\mathbf{x}(0)$ interessieren, wie es in der Definition 3.2 getan wird. Man kann aber auch am Zustand $\mathbf{x}(T_e)$ am Ende des Beobachtungsintervalls interessiert sein, wobei auch hier als Informationen für die Bestimmung von $\mathbf{x}(T_e)$ die Verläufe $\mathbf{u}_{[0, T_e]}$ und $\mathbf{y}_{[0, T_e]}$ der Eingangs- und Ausgangsgrößen zur Verfügung stehen. Wenn $\mathbf{x}(T_e)$ aus diesen Informationen bestimmbar ist, so wird das System auch vollständig *rekonstruierbar* genannt. Bei den hier behandelten zeitinvarianten linearen Systemen sind beide Eigenschaften äquivalent.

Bestimmung der Zustandstrajektorie. Die Beobachtbarkeit wird entsprechend Definition 3.2 auf den Anfangszustand \mathbf{x}_0 bezogen. Technisch interessant ist jedoch der aktuelle Zustand $\mathbf{x}(T_e)$, der am Ende des Beobachtungszeitraumes auftritt, oder der gesamte Verlauf $\mathbf{x}_{[0, T_e]}$ des Zustandsvektors. Die Beobachtbarkeitsdefinition muss auf diese erweiterte Fragestellung keine Rücksicht nehmen, denn wenn es möglich ist, den Anfangszustand \mathbf{x}_0 zu bestimmen, so kann auch der gesamte Verlauf $\mathbf{x}_{[0, T_e]}$ mit Hilfe des Modells und der bekannten Eingangsgröße berechnet werden. Wenn im Folgenden die Berechnung von \mathbf{x}_0 im Mittelpunkt steht, so wird dies nur getan, weil sich

dafür die Untersuchungen besonders einfach darstellen lassen und alle weiterführenden Fragen zur Zustandstrajektorie aus der Kenntnis von \boldsymbol{x}_0 mit Hilfe des Modells beantwortet werden können.

3.2.2 Beobachtbarkeitskriterium von KALMAN

In diesem und den nachfolgenden Abschnitten werden Beobachtbarkeitskriterien angegeben, die den Steuerbarkeitskriterien sehr ähnlich sind. Es wird deshalb in ähnlicher Weise wie in den Abschnitten 3.1.2 - 3.1.5 vorgegangen und zunächst das auf KALMAN zurückgehende Kriterium angegeben und erläutert. Dabei wird offensichtlich, dass die Beobachtbarkeit eine zur Steuerbarkeit duale Eigenschaft ist, so dass die folgenden Untersuchungen dann wesentlich kürzer gefasst werden können.

Das Kalmankriterium bezieht sich auf die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\boldsymbol{S}_B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1} \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

die eine $(r \cdot n, n)$ -Matrix ist. Sie ist quadratisch, wenn das System nur eine Ausgangsgröße besitzt.

Satz 3.4 (Beobachtbarkeitskriterium von KALMAN)

Das System $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C})$ ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix \boldsymbol{S}_B den Rang n hat:

$$\text{Rang } \boldsymbol{S}_B = n. \quad (3.25)$$

Notwendigkeit der Bedingung (3.25). Das Beobachtbarkeitsproblem ist lösbar, wenn die Gleichung

$$\boldsymbol{y}_{\text{frei}}(t) = \boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0$$

nach \boldsymbol{x}_0 auflösbar ist. Schreibt man diese Vektorgleichung ausführlich, so erhält man r Gleichungen für die n Unbekannten im Vektor \boldsymbol{x}_0 , die wegen $r < n$ nicht nach \boldsymbol{x}_0 auflösbar sind. Da $\boldsymbol{y}(t)$ aber für das Zeitintervall $[0, T_e]$ bekannt ist, kann diese Gleichung im Prinzip unendlich oft, nämlich für alle Zeitpunkte des angegebenen Intervalls, hingeschrieben werden. Es müssen die Fragen untersucht werden, wieviele Gleichungen notwendig sind und ob das Gleichungssystem eindeutig auflösbar ist.

Diese Fragen sollen zunächst für ein System mit nur einem Ausgang beantwortet werden. Schreibt man die freie Bewegung für n Zeitpunkte untereinander, so erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_{\text{frei}}(t_1) &= \mathbf{c}' e^{\mathbf{A}t_1} \mathbf{x}_0 \\ y_{\text{frei}}(t_2) &= \mathbf{c}' e^{\mathbf{A}t_2} \mathbf{x}_0 \\ &\vdots \\ y_{\text{frei}}(t_n) &= \mathbf{c}' e^{\mathbf{A}t_n} \mathbf{x}_0, \end{aligned}$$

das als Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix} y_{\text{frei}}(t_1) \\ y_{\text{frei}}(t_2) \\ \vdots \\ y_{\text{frei}}(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}' e^{\mathbf{A}t_1} \\ \mathbf{c}' e^{\mathbf{A}t_2} \\ \vdots \\ \mathbf{c}' e^{\mathbf{A}t_n} \end{pmatrix} \mathbf{x}_0$$

zusammengefasst werden kann. Dieses Gleichungssystem ist genau dann nach \mathbf{x}_0 auflösbar, wenn für die auf der rechten Seite stehende (n, n) -Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}' e^{\mathbf{A}t_1} \\ \mathbf{c}' e^{\mathbf{A}t_2} \\ \vdots \\ \mathbf{c}' e^{\mathbf{A}t_n} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

die Beziehung

$$\text{Rang } \mathbf{M} = n, \quad (3.27)$$

gilt, denn dann erhält man den Anfangszustand aus

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} y_{\text{frei}}(t_1) \\ y_{\text{frei}}(t_2) \\ \vdots \\ y_{\text{frei}}(t_n) \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Die Frage ist, unter welcher Bedingung die n Zeitpunkte t_i so festgelegt werden können, dass diese Matrix invertierbar ist.

Jede Zeile von \mathbf{M} hat die Form $\mathbf{c}' e^{\mathbf{A}t_i}$, die sich mit Hilfe der Definitionsgleichung (I-5.10) für die Matrixexponentialfunktion und dem Cayley-Hamilton-Theorem (A2.45) folgendermaßen umformen lässt:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}' e^{\mathbf{A}t_i} &= \mathbf{c}' + \mathbf{c}' \mathbf{A} t_i + \mathbf{c}' \mathbf{A}^2 \frac{t_i^2}{2!} + \mathbf{c}' \mathbf{A}^3 \frac{t_i^3}{3!} + \dots \\ &= c_0(t_i) \mathbf{c}' + c_1(t_i) \mathbf{c}' \mathbf{A} + c_2(t_i) \mathbf{c}' \mathbf{A}^2 + \dots + c_{n-1}(t_i) \mathbf{c}' \mathbf{A}^{n-1}. \end{aligned}$$

Dabei sind die eingeführten Koeffizienten $c_j(t_i)$ Funktionen der Zeit t_i . Aus dieser Gleichung geht hervor, dass die i -te Zeile der Matrix \mathbf{M} eine Linearkombination der Zeilenvektoren

$$\mathbf{c}', \mathbf{c}'\mathbf{A}, \mathbf{c}'\mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{c}'\mathbf{A}^{n-1},$$

ist. Diese Darstellung von \mathbf{M} zeigt, dass der Anfangszustand \mathbf{x}_0 nur dann aus n Messwerten des Ausgangs bestimmt werden kann, wenn die angegebenen Zeilenvektoren linear unabhängig sind. Damit ist die Notwendigkeit der Bedingung (3.25) für Systeme mit einem Ausgang nachgewiesen.

Für Systeme mit r Ausgängen hat die Matrix \mathbf{M} die Dimension (rn, n) . Die Auflösbarkeitsbedingung (3.27) bleibt dieselbe, denn unter dieser Bedingung kann \mathbf{x}_0 entsprechend

$$\mathbf{x}_0 = (\mathbf{M}'\mathbf{M})^{-1}\mathbf{M}' \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{\text{frei}}(t_1) \\ \mathbf{y}_{\text{frei}}(t_2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{\text{frei}}(t_n) \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

aus den Messwerten bestimmt werden. In Analogie zu den bisherigen Überlegungen kann man sehen, dass die Zeilen von \mathbf{M} Linearkombinationen der Vektoren

$$\mathbf{c}'_i, \mathbf{c}'_i\mathbf{A}, \mathbf{c}'_i\mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{c}'_i\mathbf{A}^{n-1} \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

sind, wobei \mathbf{c}'_i die i -te Zeile der Matrix \mathbf{C} darstellt. Die Matrix \mathbf{M} kann bei geeigneter Wahl der Zeitpunkte t_i genau dann den Rang n haben, wenn es unter allen diesen Zeilen n linear unabhängige gibt. Dieser Sachverhalt wird mit der Bedingung (3.25) ausgedrückt, die damit auch für Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen notwendig ist.

Bestimmung von \mathbf{x}_0 . Es wird nun angenommen, dass die Beobachtbarkeitsbedingung (3.25) erfüllt ist. Für die Bestimmung von \mathbf{x}_0 gibt es dann u.a. die folgenden beiden Wege. Man kann die Gln. (3.28) und (3.29) für die Bestimmung von \mathbf{x}_0 einsetzen, wenn man die Zeitpunkte t_i so ausgewählt hat, dass die Matrix \mathbf{M} den Rang n hat. Dies gelingt häufig dadurch, dass man einfach n beliebige, untereinander verschiedene Zeitpunkte aus dem Intervall $[0, T_e]$ auswählt. Sollte die Matrix \mathbf{M} nicht den vollen Rang haben, so wird die Rangbedingung i.Allg. schon nach geringfügiger Veränderung der ausgewählten Zeitpunkte t_i erfüllt.

Der zweite Weg ist dem bei der Steuerbarkeitsuntersuchung verwendeten sehr ähnlich. Wenn die Bedingung (3.25) erfüllt ist, so ist die gramsche Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{W}_B = \int_0^{T_e} e^{\mathbf{A}'t}\mathbf{C}'\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}dt \quad (3.30)$$

für eine beliebige Endzeit T_e positiv definit und folglich invertierbar. Der Anfangszustand kann dann aus der Beziehung

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{W}_B^{-1} \int_0^{T_e} e^{\mathbf{A}'t}\mathbf{C}'\mathbf{y}_{\text{frei}}(t) dt \quad (3.31)$$

ermittelt werden, wie man durch Einsetzen der Eigenbewegung

$$\mathbf{y}_{\text{frei}}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$$

leicht nachweisen kann. Zur Berechnung von \mathbf{W}_B für $T_e = \infty$ kann man Gl. (3.8) mit veränderter rechter Seite anwenden.

Beispiel 3.7 *Beobachtbarkeit gekoppelter Rührkesselreaktoren*

Bei den im Beispiel 3.1 betrachteten Rührkesselreaktoren kann nur die Konzentration im zweiten Behälter gemessen werden. Es ist zu untersuchen, ob die Konzentration im ersten Behälter aus dem Verlauf der Eingangs- und Ausgangsgröße rekonstruiert werden kann.

Aus dem auf Seite 56 angegebenen Modell (3.9), (3.10) erhält man die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{F}{V_2} & -\frac{F}{V_2} \end{pmatrix},$$

die offenbar den Rang 2 besitzt. Also kann man die Konzentration x_1 des ersten Behälters aus den Messwerten bestimmen. Voraussetzung ist lediglich, dass die Reaktoren tatsächlich durchflossen werden, also $F \neq 0$ gilt. Andernfalls wären beide Reaktoren entkoppelt, so dass die Beobachtungsaufgabe aus offensichtlichen Gründen nicht lösbar wäre.

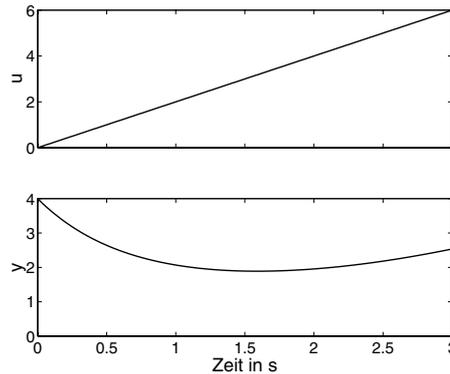


Abb. 3.7: Verhalten der gekoppelten Rührkesselreaktoren

Wie aus den Messgrößen der Anfangszustand berechnet werden kann, wird im Folgenden für die Rührkesselreaktoren mit den im Beispiel 3.1 angegebenen Parametern erläutert, für die das Zustandsraummodell

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,333 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,333 \\ 0 \end{pmatrix} u, \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

entsteht. Das System wird von einem unbekanntem Anfangszustand ausgehend durch die Steuerung

$$u(t) = 2t$$

erregt, wobei die in Abb. 3.7 (unten) dargestellte Messkurve entsteht. Diese Kurve beschreibt die Überlagerung von erzwungener und freier Bewegung. Um daraus die freie Bewegung bestimmen zu können, wird von dieser Messkurve die erzwungene Bewegung

$$y_{erzw}(t) = 2 \int_0^t (0 \ 1) e^{\begin{pmatrix} -0,333 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} (t-\tau)} \tau d\tau$$

subtrahiert, wodurch die in Abb. 3.8 gezeichnete Kurve entsteht.

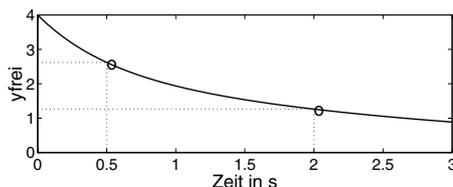


Abb. 3.8: Eigenbewegung der Reaktoren

Aus dieser Kurve werden nun zwei Messpunkte entnommen, die hier bei $t_1 = 0,5$ und $t_2 = 2$ liegen. Dabei erhält man den Vektor

$$\begin{pmatrix} y_{\text{frei}}(0,5) \\ y_{\text{frei}}(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,62 \\ 1,26 \end{pmatrix}.$$

In der Matrix \mathbf{M} nach Gl. (3.26) steht als erste Zeile

$$\mathbf{c}' e^{\mathbf{A} t_1} = (0 \ 1) e^{\begin{pmatrix} -0,333 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} 0,5} = (0,574 \ 0,368).$$

Nach Berechnung der zweiten Zeile erhält man

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0,574 & 0,368 \\ 0,594 & 0,0183 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist regulär. Als Anfangszustand folgt mit Hilfe von Gl. (3.28)

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,998 \\ 4,003 \end{pmatrix}.$$

Von diesem Anfangszustand aus hat das System seine Bewegung begonnen. Die vollständige Zustandstrajektorie kann mit Hilfe des Modells und dieser Anfangsbedingung berechnet werden.

Diskussion. Bei der Simulation wurde mit dem Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = (2 \ 4)'$ gearbeitet. Der Rechenfehler ist nicht durch numerische Ungenauigkeiten, sondern vor allem durch die begrenzte Genauigkeit beim Ablesen der Messpunkte $y(t_i)$ verursacht. In der praktischen Anwendung führen Messungenauigkeiten zu erheblich größeren Abweichungen als hier.

Bei diesem Beispiel stimmt die Ausgangsgröße mit der zweiten Zustandsvariablen überein. Der Messwert $y(0)$ gibt deshalb den Anfangswert von x_2 an. Das

Beobachtungsproblem beinhaltet deshalb nur die Bestimmung des Anfangswertes von x_1 . Deshalb könnte man die Berechnung gegenüber dem allgemeinen Lösungsweg in diesem Beispiel etwas vereinfachen. \square

Folgerungen aus dem Kalmankriterium. Ähnlich wie bei der Analyse der Steuerbarkeit können aus dem Kalmankriterium der Beobachtbarkeit folgende Schlussfolgerungen gezogen werden:

- Wenn das System vollständig beobachtbar ist, so kann der Anfangszustand x_0 aus einem beliebig kurzen Ausschnitt des Verlaufes der Eingangs- und Ausgangsgrößen berechnet werden, d.h., T_e kann beliebig klein sein.

Die Untersuchungen dieses Kapitels betreffen nur die Frage, *ob* der Zustand aus den Eingangs- und Ausgangsgrößen bestimmt werden kann. Wie man dies unter den in der Praxis auftretenden Bedingungen, die insbesondere Messfehler und Störungen auf das System einschließen, tatsächlich macht, wird im Kap. 8 behandelt.

- In Analogie zu den Steuerbarkeitsindizes können Beobachtbarkeitsindizes definiert werden. Sie zeigen, wieviele unterschiedliche Messpunkte $y(t_i)$ tatsächlich notwendig sind, um x_0 zu berechnen.

3.2.3 Dualität von Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Die Behandlung der Kalmankriterien für Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit hat gezeigt, dass die Steuerbarkeit des Paares (\mathbf{A}, \mathbf{B}) in sehr ähnlicher Weise wie die Beobachtbarkeit des Paares (\mathbf{A}, \mathbf{C}) nachgewiesen werden kann. Verwendet man nämlich das Steuerbarkeitskriterium mit \mathbf{A}' an Stelle von \mathbf{A} und \mathbf{C}' an Stelle von \mathbf{B} , so geht es in das Beobachtbarkeitskriterium über. Man sagt deshalb, dass beide Eigenschaften *dual* zueinander sind.

Um diesen Sachverhalt noch etwas genauer auszuführen, werden die beiden Systeme

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_T &= \mathbf{A}'\mathbf{x}_T + \mathbf{C}'\mathbf{u}_T \\ \mathbf{y}_T &= \mathbf{B}'\mathbf{x}_T\end{aligned}\tag{3.32}$$

betrachtet. Die Matrizen des zweiten Systems sind gerade die transponierten Matrizen des Originalsystems $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$, wobei gleichzeitig die Eingangsmatrix und die Ausgangsmatrix vertauscht wurden. Man bezeichnet das System $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ auch als das primäre System und das System $(\mathbf{A}', \mathbf{C}', \mathbf{B}')$ als das duale System.

Die Dualität von Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit äußert sich nun folgendermaßen:

Das duale System ist genau dann vollständig steuerbar bzw. vollständig beobachtbar, wenn das primäre System vollständig beobachtbar bzw. vollständig steuerbar ist.

Diese Eigenschaft kann im Folgenden ausgenutzt werden, um die für die Steuerbarkeit abgeleiteten Kriterien ohne Beweis in Kriterien für die Beobachtbarkeit zu überführen.

3.2.4 Weitere Beobachtbarkeitskriterien

Beobachtbarkeit der kanonischen Normalform. Wenn das Modell mit Hilfe der Transformation (3.11) in die kanonische Normalform transformiert ist und, zur Vereinfachung der Darstellung, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ angenommen wird, so erhält man die Modellgleichungen

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \text{diag } \lambda_i \tilde{\mathbf{x}}(t), \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}_0 \quad (3.33)$$

$$\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (3.34)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{V}. \quad (3.35)$$

Da der Anfangszustand $\tilde{\mathbf{x}}_0$ nur dann aus \mathbf{y} berechnet werden kann, wenn alle Eigenvorgänge in \mathbf{y} eingehen, ist eine notwendige Bedingung für die Steuerbarkeit, dass die Matrix $\tilde{\mathbf{C}}$ keine Nullspalten enthält. Diese Bedingung ist auch hinreichend, wenn alle Eigenwerte einfach auftreten. Andernfalls gelten ähnliche Zusatzbedingungen, wie sie bei der Steuerbarkeit auftreten und im folgenden Kriterium aufgeführt sind.

Satz 3.5 (Beobachtbarkeitskriterium von GILBERT)

Das System $(\text{diag } \lambda_i, \tilde{\mathbf{C}})$, dessen Zustandsraummodell in kanonischer Normalform vorliegt, ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn die Matrix $\tilde{\mathbf{C}}$ keine Nullspalte besitzt und wenn die p Spalten $\tilde{\mathbf{c}}_i$ der Matrix $\tilde{\mathbf{C}}$, die zu den kanonischen Zustandsvariablen eines p -fachen Eigenwertes gehören, linear unabhängig sind.

Diese Betrachtungen ermöglichen es, die Beobachtbarkeit auf einzelne Eigenvorgänge bzw. Eigenwerte zu beziehen. Wenn das System nicht vollständig beobachtbar ist, so kann man mit dem Gilbertkriterium ermitteln, welche kanonischen Zustandsvariablen und folglich welche Eigenwerte nicht beobachtbar sind.

Beobachtbarkeitskriterium von HAUTUS. Wendet man die Dualität von Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit auf das Hautuskriterium für die Steuerbarkeit an, so erhält man das folgende Beobachtbarkeitskriterium.

Satz 3.6 (Beobachtbarkeitskriterium von HAUTUS)

Das System (\mathbf{A}, \mathbf{C}) ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn die Bedingung

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} = n \quad (3.36)$$

für alle komplexen Werte λ erfüllt ist.

Auch hier reicht es aus, die Beziehung (3.36) für diejenigen λ zu überprüfen, die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} sind. Ist die angegebene Bedingung für ein oder mehrere dieser Werte nicht erfüllt, so weiß man nicht nur, dass das System nicht vollständig beobachtbar ist, sondern kennt auch die Eigenvorgänge, die nicht beobachtet werden können.

Das Hautuskriterium zeigt auch, dass die nicht beobachtbaren Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} mit den Ausgangsentkopplungsnullstellen des Systems $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ übereinstimmen.

3.2.5 Nicht vollständig beobachtbare Systeme

Wichtige Gründe dafür, dass ein System nicht vollständig beobachtbar ist, sind im Folgenden aufgeführt.

|| Eigenvorgänge, die nicht mit dem Ausgang verbunden sind, sind nicht beobachtbar.

In der kanonischen Normalform des Zustandsraummodells macht sich dieser Grund für nicht beobachtbare Eigenvorgänge in Nullspalten der Matrix $\tilde{\mathbf{C}}$ bemerkbar. Wenn das betrachtete System aus mehreren Teilsystemen besteht, muss man das Modell meist gar nicht in die kanonische Normalform transformieren, weil aus der Zusammenschaltung der Teilsysteme bestimmte Strukturen für die Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{C} folgen und Nullspalten durch die Struktur des Gesamtsystems begründet sind.

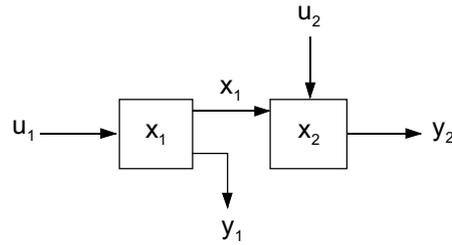


Abb. 3.9: Reihenschaltung zweier Teilsysteme

Beispiel 3.8 *Nicht beobachtbare Zustände einer Reihenschaltung*

Ein Beispiel dafür ist in Abb. 3.9 angegeben. Die Reihenschaltung der beiden Teilsysteme führt auf ein Modell der Form

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{O} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Wenn man nur den Ausgang y_1 zur Verfügung hat, so kann man den Zustand x_2 nicht beobachten, weil das Teilsystem 1 gar keine Informationen über das Teilsystem 2 erhält, was sich in der Nullmatrix in der Ausgabe Gleichung niederschlägt. \square

|| Zwei parallele Teilsysteme mit denselben dynamischen Eigenschaften sind nicht vollständig beobachtbar.

Als Beispiel kann wieder die auf Seite 66 angegebene Parallelschaltung zweier Übertragungsglieder erster Ordnung herangezogen werden. Wendet man das Hautuskriterium auf das System (3.17), (3.18) an, so sieht man, dass ein Eigenwert nicht beobachtbar ist. Der Grund liegt darin, dass zwar beide Zustandsvariablen den Ausgang beeinflussen, aus der Summe beider jedoch nicht die beiden Anfangswerte berechnet werden können, da sich beide Zustandsvariablen in derselben Geschwindigkeit bewegen.

|| Lassen sich in der Übertragungsfunktion eines Eingrößensystems Pole gegen Nullstellen kürzen, so kann man die mit den Polen verbundenen Eigenvorgänge nicht beobachten (bzw. nicht steuern).

Der Grund dafür ist, dass nicht beobachtbare Eigenwerte Ausgangsentkopplungsnullstellen sind, die in der Übertragungsfunktion gegen die Pole gleicher Größe gekürzt werden. Dasselbe war ja schon für die nicht beobachtbaren Eigenwerte, die Eingangsentkopplungsnullstellen darstellen, erklärt worden.

Beobachtbarer Unterraum. Wenn das System nicht vollständig beobachtbar ist, so ist nur die Bewegung innerhalb eines Unterraumes des Zustands-

raumes \mathbb{R}^n beobachtbar. Dieser Unterraum wird durch die Zeilen der Beobachtbarkeitsmatrix \mathbf{S}_B festgelegt. Der nicht beobachtbare Teilraum umfasst alle diejenigen Vektoren \mathbf{x} , für die die Beziehung

$$\mathbf{S}_B \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

erfüllt ist. Mathematisch gesehen bilden alle diese Vektoren den Nullraum der Matrix \mathbf{S}_B

$$\mathcal{N}(\mathbf{S}_B) = \{\mathbf{x} : \mathbf{S}_B \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

(siehe Gl. (A2.32)). Fügt man zu einem gegebenen Vektor \mathbf{x}_1 , der auf die Ausgangsgröße

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x}_1$$

führt, einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{S}_B)$ hinzu, so ändert sich der Wert der Ausgangsgröße nicht:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x}_1 + \mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{x}_1.$$

Das System kann sich also beliebig in $\mathcal{N}(\mathbf{S}_B)$ bewegen, ohne dass dies am Ausgang erkennbar wird.

Ähnlich wie bei der Steuerbarkeit kann die Bewegung des Systems dann in den beobachtbaren und den nicht beobachtbaren Anteil zerlegt werden:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{beob}}(t) + \mathbf{x}_{\text{nbeob}}(t). \quad (3.39)$$

Verwendet man kanonische Zustandsvariablen, so ist diese Aufteilung wieder leicht zu übersehen, denn jede Zustandsvariable \tilde{x}_i tritt nur in einem der beiden Vektoren auf.

Aufgabe 3.4 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit von Mehrgrößensystemen

Untersuchen Sie, ob das System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u} \end{aligned}$$

vollständig steuerbar, ausgangssteuerbar bzw. vollständig beobachtbar ist. \square

Aufgabe 3.5* Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit zusammenschalteter Systeme

1. Untersuchen Sie, ob die Reihenschaltung und die Parallelschaltung zweier Integratoren vollständig steuerbar ist.
2. Gegeben ist die Parallelschaltung zweier Teilsysteme mit identischen dynamischen Eigenschaften. Ist das Gesamtsystem vollständig steuerbar, ausgangssteuerbar bzw. vollständig beobachtbar? \square

Aufgabe 3.6* Übertragungsfunktion nicht vollständig steuerbarer und beobachtbarer Systeme

Gegeben ist das System

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

1. Untersuchen Sie, ob das System steuerbar und beobachtbar ist.
2. Bestimmen Sie die Nullstellen des Systems.
3. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion und vergleichen Sie die Ordnung der Übertragungsfunktion sowie deren Pole mit der Systemordnung bzw. den Eigenwerten der Systemmatrix.
4. Ist das System zustandsstabil und E/A-stabil? \square

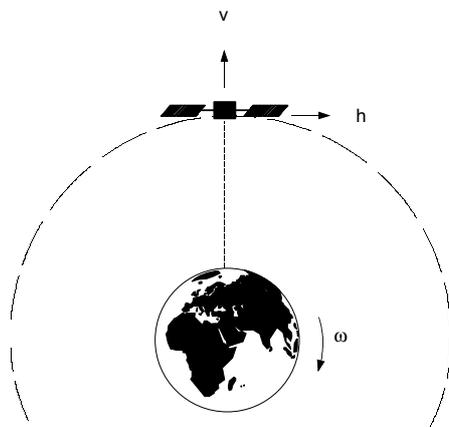


Abb. 3.10: Satellit über der Beobachtungsstation

Aufgabe 3.7* Beobachtbarkeit der Satellitenbewegung

Ein Satellit bewegt sich geostationär über einer Beobachtungsstation, wie es in Abb. 3.10 gezeigt ist. Es wird angenommen, dass vom Boden aus nur die Positionsabweichung in Richtung h gemessen werden kann. Diese Abweichung hat aber i.Allg. auch Abweichungen in radialer Richtung v zur Folge. Kann der Zustand des Satelliten aus der Messgröße beobachtet werden?

Die Bewegung des Satelliten ist durch die Gleichungen

$$\ddot{v} - 2\omega\dot{h} - 3\omega^2 v(t) = 0 \quad (3.40)$$

$$\ddot{h} + 2\omega\dot{v} = u(t) \quad (3.41)$$

beschrieben, wobei $\omega = \frac{2\pi}{360 \cdot 24} \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$ die Winkelgeschwindigkeit der Erde und des Satelliten um den Erdmittelpunkt ist und u die Beschleunigung des Satelliten durch seine Steuerdüsen in h -Richtung bezeichnet. \square

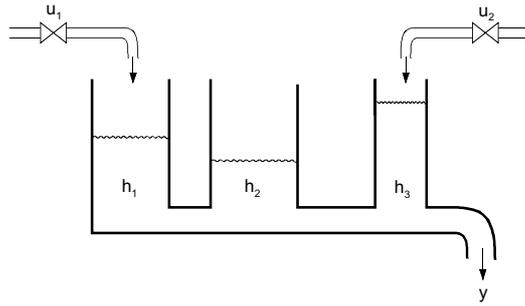


Abb. 3.11: Behältersystem

Aufgabe 3.8** Beobachtbarkeit der Füllstände eines Behältersystems

Stellen Sie für das in Abb. 3.11 gezeigte Behältersystem das Zustandsraummodell auf und untersuchen Sie, ob die Füllstände der drei Behälter aus der Kenntnis der Zuflüsse u_1 und u_2 und des Ausflusses y beobachtet werden können. \square

3.3 KALMAN-Zerlegung des Zustandsraummodells

Wie die vorangegangenen Untersuchungen gezeigt haben, können in einem System sowohl steuerbare als auch nicht steuerbare sowie beobachtbare und nicht beobachtbare Eigenvorgänge bzw. kanonische Zustandsvariablen auftreten. Man kann den Zustandsvektor \mathbf{x} deshalb durch eine Transformation

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}$$

in einen Vektor $\tilde{\mathbf{x}}$ überführen, der in vier Teilvektoren zerlegt werden kann

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \\ \tilde{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\mathbf{x}}_4 \end{pmatrix},$$

so dass

- $\tilde{\mathbf{x}}_1$ die steuerbaren, aber nicht beobachtbaren Zustandsvariablen,
- $\tilde{\mathbf{x}}_2$ die steuerbaren und beobachtbaren Zustandsvariablen,
- $\tilde{\mathbf{x}}_3$ die nicht steuerbaren und nicht beobachtbaren Zustandsvariablen,
- $\tilde{\mathbf{x}}_4$ die nicht steuerbaren, aber beobachtbaren Zustandsvariablen

enthält. Diese Transformation führt auf ein Zustandsraummodell, das die folgende Struktur besitzt:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \\ \tilde{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\mathbf{x}}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} & \tilde{\mathbf{A}}_{13} & \tilde{\mathbf{A}}_{14} \\ \mathbf{O} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} & \mathbf{O} & \tilde{\mathbf{A}}_{24} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \tilde{\mathbf{A}}_{33} & \tilde{\mathbf{A}}_{34} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \tilde{\mathbf{A}}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \\ \tilde{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\mathbf{x}}_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 \\ \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (3.42)$$

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{O} \quad \tilde{\mathbf{C}}_2 \quad \mathbf{O} \quad \tilde{\mathbf{C}}_4) \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \\ \tilde{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\mathbf{x}}_4 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

Dieses System kann als Blockschaltbild wie in Abb. 3.12 angegeben dargestellt werden. Man spricht von der KALMAN-Zerlegung des Systems.

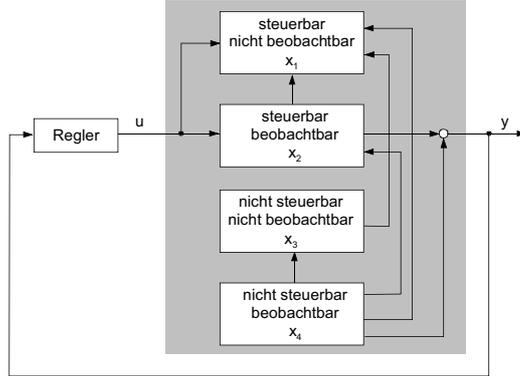


Abb. 3.12: Kalmanzerlegung des Zustandsraummodells

Die Eigenwerte der Systemmatrix lassen sich aus den getrennten Eigenwertproblemen für die in der Diagonale stehenden Matrizen $\tilde{\mathbf{A}}_{ii}$ berechnen. Damit der Vektor in der angegebenen Weise zerlegt werden kann, müssen die Paare $(\tilde{\mathbf{A}}_{11}, \tilde{\mathbf{B}}_1)$ und $(\tilde{\mathbf{A}}_{22}, \tilde{\mathbf{B}}_2)$ vollständig steuerbar und die Paare $(\tilde{\mathbf{A}}_{22}, \tilde{\mathbf{C}}_2)$ und $(\tilde{\mathbf{A}}_{44}, \tilde{\mathbf{C}}_4)$ vollständig beobachtbar sein. Die im transformierten Zustandsraummodell angegebenen Nullmatrizen sichern, dass sich die Steuerbarkeit bzw. Beobachtbarkeit der Teilsysteme nicht auf andere Teilsysteme überträgt, was die angestrebte Dekomposition zerstören würde. Die oberhalb der Diagonale stehenden Matrizen $\tilde{\mathbf{A}}_{12}$, $\tilde{\mathbf{A}}_{13}$, $\tilde{\mathbf{A}}_{14}$, $\tilde{\mathbf{A}}_{24}$ und $\tilde{\mathbf{A}}_{34}$ können beliebig besetzt sein. Sie haben keinen Einfluss auf die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des Gesamtsystems.

Für ein gegebenes System ist es u.U. nicht ganz einfach, die Transformationsmatrix \mathbf{T} zu finden, mit der das transformierte Zustandsraummodell in der angegebenen Weise zerlegt ist. Man kann sich in jedem Falle damit behelfen, dass man das Modell in die kanonische Normalform überführt und die kanonischen Zustandsvariablen entsprechend ihrer Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit sortiert. Bei vielen Systemen kann man aber die angestrebte Zerlegung bereits durch Umordnen von Teilvektoren erreichen, weil die Gründe für Nichtsteuerbarkeit und Nichtbeobachtbarkeit häufig darin liegen, dass bestimmte Informationskopplungen nicht vorhanden sind, also Nullen in den Systemmatrizen auftreten.

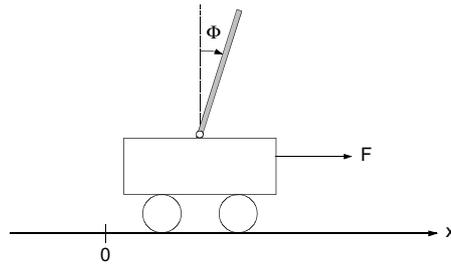


Abb. 3.13: Invertiertes Pendel

Beispiel 3.9 *Kalmanzerlegung des Zustandsraummodells des invertierten Pendels*
 Das Verhalten des invertierten Pendels in Abb. 3.13 ist durch die Wagenposition $x(t)$ und den Winkel $\phi(t)$ beschrieben, die beide einschließlich ihrer ersten Ableitungen als Zustandsvariable im Modell erscheinen. Gemessen werde in diesem Beispiel nur der Pendelwinkel. Eingangsgröße ist die den Wagen beschleunigende Kraft, die durch einen Elektromotor mit der Eingangsspannung $u(t)$ erzeugt wird. Für das Zustandsraummodell gilt

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x \\ \phi \\ \dot{x} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \text{ mit den Maßeinheiten } \begin{pmatrix} \text{m} \\ \text{rad} \\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{pmatrix}$$

$$u(t) \quad \text{mit der Maßeinheit V}$$

$$\mathbf{y}(t) = \phi \quad \text{mit der Maßeinheit rad}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.88 & -1.9 & 0.0056 \\ 0 & 21.5 & 3.9 & -0.14 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.3 \\ -0.62 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}' = (0 \ 1 \ 0 \ 0)$$

$$d = 0.$$

Man kann sich mit dem Hautuskriterium davon überzeugen, dass ein Eigenwert $\lambda = 0$ nicht beobachtbar ist, denn die Matrix

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{A} \\ \mathbf{c}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.88 & 1.9 & -0.0056 \\ 0 & -21.5 & -3.9 & 0.14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat nur den Rang drei. Sieht man sich die Modellgleichungen genauer an, so erkennt man, dass sie bereits in der dekomponierten Form vorliegen, wenn man

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = x, \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} \phi \\ \dot{x} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

setzt. Misst man nur den Winkel ϕ des Lasthakens, so kann man daraus zwar die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ und die Wagengeschwindigkeit \dot{x} bestimmen, nicht jedoch die aktuelle Position x . Da das System vollständig steuerbar ist, gibt es die Komponenten \tilde{x}_3 und \tilde{x}_4 nicht. Das Zustandsraummodell hat die Form

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.88 & -1.9 & 0.0056 \\ 0 & 21.5 & 3.9 & -0.14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.3 \\ -0.62 \end{pmatrix} u$$

$$y = (0 \mid 1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix},$$

in der die Zerlegung der einzelnen Matrizen eingetragen ist. \square

E/A-Verhalten nicht vollständig steuerbarer und beobachtbarer Systeme. Die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit betreffen die unabhängigen Fragen, inwieweit der Eingang u den Systemzustand beeinflusst bzw. wie der Zustand x in den Ausgang y eingeht. Für das E/A-Verhalten spielen beide Eigenschaften gemeinsam eine entscheidende Rolle, denn das Übertragungsverhalten wird durch die Wirkungskette $u \mapsto x \mapsto y$ bestimmt, die sowohl von der Steuerbarkeit als auch von der Beobachtbarkeit abhängt.

Das E/A-Verhalten beschreibt die Übertragungseigenschaften des Systems vom Eingang u zum Ausgang y , wobei vorausgesetzt wird, dass sich das System zur Zeit $t = 0$ in der Ruhelage befindet. Wie man aus der Abb. 3.12 erkennen kann, hängt das E/A-Verhalten nur vom steuerbaren und beobachtbaren Teil des Systems ab. Die anderen Teile werden entweder nicht angeregt, oder ihr Verhalten schlägt sich nicht im Systemausgang y nieder. Dies hat zur Folge, dass sowohl in die Gewichtsfunktionsmatrix $G(t)$ als auch in die Übertragungsfunktionsmatrix $G(s)$ nur diejenigen Eigenvorgänge eingehen, die zur Matrix \tilde{A}_{22} gehören, also steuerbar und beobachtbar sind.

Auf die Tatsache, dass nicht alle Eigenwerte der Matrix A auch Pole der Übertragungsfunktion sind bzw. in die Gewichtsfunktionsmatrix eingehen, ist bereits an mehreren Stellen hingewiesen worden. Jetzt wird offensichtlich, dass die fehlende Steuerbarkeit oder Beobachtbarkeit die Ursache dafür ist. Die für Zustandsraummodelle in kanonischer Normalform abgeleiteten Bedingungen (I-5.98) sowie die für Mehrgrößensysteme erhaltenen Bedingungen (2.32)

$$\tilde{c}_i \tilde{b}'_i = 0,$$

unter denen der Eigenwert λ_i nicht in $G(t)$ und folglich auch nicht in $G(s)$ vorkommt, ist genau dann erfüllt, wenn entweder \tilde{c}_i eine Nullspalte von \tilde{C} oder \tilde{b}'_i eine Nullzeile von \tilde{B} ist, der Eigenwert also nicht beobachtbar oder nicht steuerbar ist.

Dabei ist es gleichgültig, ob der Signalweg $u \mapsto x \mapsto y$ durch eine Eingangsentkopplungsnulstelle oder eine Ausgangsentkopplungsnulstelle

blockiert wird. Sieht man sich die in Abb. 3.14 dargestellten Systeme an, so erkennt man, dass beide Reihenschaltungen dieselbe Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Z_1(s)Z_2(s)}{N_1(s)N_2(s)}$$

haben, in die der Eigenwert $-\lambda$ nicht eingeht. Mathematisch gesehen kürzt sich der Linearfaktor $(s + \lambda)$ im Nenner gegen denselben Linearfaktor im Zähler. Technisch gesehen sind jedoch die Ursachen dafür, dass λ kein Pol der Übertragungsfunktion ist, verschieden.

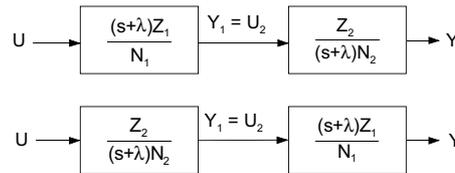


Abb. 3.14: Nicht steuerbare und beobachtbare Systeme

Im ersten Beispiel ist $-\lambda$ ein Pol des rechten Übertragungsgliedes. Die Übertragungsnullstelle des linken Übertragungsgliedes bei $-\lambda$ wird in der Reihenschaltung beider Übertragungsglieder zu einer Eingangsentkopplungsnullstelle, auf Grund derer der aus dem zweiten Übertragungsglied stammende Eigenwert nicht steuerbar ist und deshalb nicht in der Übertragungsfunktion vorkommt.

Im zweiten Beispiel ist $-\lambda$ ein Pol des linken Übertragungsgliedes. Der zugehörige Eigenvorgang kann durch u angeregt werden. Da jedoch das rechte Übertragungsglied eine Nullstelle bei $-\lambda$ besitzt, wird der Term $e^{-\lambda t}$, der in y_1 und folglich am Eingang des zweiten Übertragungsgliedes erscheint, nicht zum Ausgang y übertragen.

Beiden Beispielen ist gemeinsam, dass auf dem Signalweg von u nach y eine Nullstelle bei $-\lambda$ liegt, die die Übertragung blockiert. Für die Übertragungsfunktion ist dabei gleichgültig, ob diese Blockierung die Anregung des Eigenvorganges $e^{-\lambda t}$ oder dessen Übertragung an den Ausgang betrifft.

Diese Überlegungen führen auf zwei wichtige Folgerungen, auf die man achten sollte, wenn man bei der Behandlung von Regelungssystemen häufig zwischen Zeitbereichs- und Frequenzbereichsbetrachtungen wechselt und die Modellgleichungen so transformiert, dass man die wichtigsten Eigenschaften besonders gut erkennen kann.

- Transformationen des Zustandsraumes ändern nichts an den Eigenschaften der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit.
- Über die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit kann nicht anhand der Übertragungsfunktion oder der Gewichtsfunktion entschieden werden, denn diese E/A-Beschreibungen geben nur den vollständig steuerbaren und beobachtbaren Teil des Systems wieder.

Konsequenzen für den Regelkreis. Die Zerlegung des Modells der Regelstrecke entsprechend der Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitseigenschaften in die angegebenen vier Komponenten hat wichtige Konsequenzen für die Eigenschaften des Regelkreises und insbesondere für die Möglichkeiten, die Regelkreiseigenschaften durch geeignete Wahl eines Reglers zu beeinflussen.

Wie in Abb. 3.12 zu sehen ist, liegt nur der steuerbare und beobachtbare Teil der Regelstrecke in dem über den Regler geschlossenen Kreis. Folglich kann der Regler nur diesen Teil der Regelstrecke in seinem Verhalten beeinflussen. Diese Tatsache kann man sich anhand einer proportionalen Ausgangsrückführung

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_y \mathbf{y}$$

schnell klarmachen. Für den geschlossenen Kreis erhält man damit das Modell

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \\ \tilde{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\mathbf{x}}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} - \tilde{\mathbf{B}}_1 \mathbf{K}_y \tilde{\mathbf{C}}_2 & \tilde{\mathbf{A}}_{13} & \tilde{\mathbf{A}}_{14} - \tilde{\mathbf{B}}_1 \mathbf{K}_y \tilde{\mathbf{C}}_4 \\ \mathbf{O} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} - \tilde{\mathbf{B}}_2 \mathbf{K}_y \tilde{\mathbf{C}}_2 & \mathbf{O} & \tilde{\mathbf{A}}_{24} - \tilde{\mathbf{B}}_2 \mathbf{K}_y \tilde{\mathbf{C}}_4 \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \tilde{\mathbf{A}}_{33} & \tilde{\mathbf{A}}_{34} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \tilde{\mathbf{A}}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \\ \tilde{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\mathbf{x}}_4 \end{pmatrix},$$

aus dem hervorgeht, dass nur die zur Matrix $\tilde{\mathbf{A}}_{22}$, also zum steuerbaren und beobachtbaren Teil gehörenden Eigenwerte durch den Regler verändert worden sind. Sämtliche anderen Eigenwerte sind vom Regler unabhängig.

Dieser Sachverhalt wird im Kap. 6 noch ausführlich untersucht, wobei auch gezeigt wird, dass sich nichts ändert, wenn an Stelle der proportionalen Rückführung ein beliebiger dynamischer Regler verwendet wird. Da er die Möglichkeiten, das Regelkreisverhalten durch geeignete Wahl des Reglers zu verändern, prinzipiell beschneidet, soll er hier im Vorgriff auf eine spätere detaillierte Begründung bereits erwähnt werden:

- Ein instabiles System kann genau dann durch einen Regler stabilisiert werden, wenn sämtliche instabilen Eigenwerte zum steuerbaren und beobachtbaren Teil der Regelstrecke gehören.
- Durch geeignete Wahl des Reglers können sämtliche Eigenwerte der Regelstrecke genau dann verändert werden, wenn die Regelstrecke vollständig steuerbar und beobachtbar ist.

Bezüglich der Stabilität ist hierbei die Zustandsstabilität gemeint, denn in der E/A-Stabilität spielen die nicht steuerbaren oder nicht beobachtbaren Systemkomponenten keine Rolle.

Auf Grund dieser Tatsachen sind außer den Eigenschaften der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit weitere Begriffe eingeführt worden, die sich auf die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit der instabilen Eigenwerte beziehen. Ein System wird *stabilisierbar* genannt, wenn alle instabilen Eigenwerte steuerbar

sind. Es wird *ermittelbar*² genannt, wenn alle instabilen Eigenwerte beobachtbar sind.

Nutzung der Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitseigenschaften.

Die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit wurde bisher ausschließlich bezüglich der Stellgröße u und der Regelgröße y untersucht. Genau dieselben Untersuchungen können jedoch auch für andere Eingangs- oder Ausgangssignale durchgeführt werden, wobei man - im Gegensatz zu den bisherigen Untersuchungen - häufig gar nicht an einer vollständigen Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit interessiert ist. Die folgenden Beispiele sollen dies deutlich machen.

- Betrachtet man die Steuerbarkeit eines Systems bezüglich der Störeingänge, so wird die Regelungsaufgabe vereinfacht, wenn sich zeigt, dass nur ein Teil der Regelstrecke durch die Störung steuerbar ist. Dies bedeutet nämlich, dass der nicht steuerbare Teil dem Störeinfluss gar nicht unterliegt und folglich auch nicht geregelt werden muss (soweit die Regelung der Störunterdrückung dient).
Andererseits kann es vorkommen, dass ein durch die Stellgröße nicht steuerbarer Teil durch die Störung steuerbar ist. Das heißt, dass eine Regelung, die mit dieser Stellgröße arbeitet, den Störeinfluss in dem nicht steuerbaren Teil nicht kompensieren kann.
- Eine Reihe von Regelungsverfahren nutzen die Nichtsteuerbarkeit aus. So beruht die Störrentkopplung darauf, dass durch eine geeignete Wahl des Reglers erreicht wird, dass die Regelgröße nicht mehr von der Störgröße abhängt, also die Eigenvorgänge des Regelkreises nicht gleichzeitig von der Störgröße steuerbar und durch die Regelgröße beobachtbar sind.
Bei einigen sequenziellen Verfahren für die Polverschiebung werden nacheinander mehrere Regler entworfen, wobei mit jedem Regler ein Teil der Eigenwerte auf vorgegebene Werte platziert wird. Dabei wird die Reglermatrix so gewählt, dass die zuvor bereits verschobenen Eigenwerte nicht steuerbar oder nicht beobachtbar sind und der Regler folglich nur die restlichen Eigenwerte beeinflussen kann.
- Betrachtet man gekoppelte Systeme, bei denen mehrere Teilsysteme über Koppelsignale miteinander in Beziehung stehen, so ist es interessant zu untersuchen, welche Eigenvorgänge der Teilsysteme durch die Koppelsignale steuerbar und beobachtbar sind. Nur diese Eigenvorgänge werden nämlich durch die anderen Teilsysteme beeinflusst. Die über die Koppelsignale nicht steuerbaren oder nicht beobachtbaren Eigenwerte sind im entkoppelten Teilsystem dieselben wie im verkoppelten Gesamtsystem.

² An Stelle von *ermittelbar* spricht man in der deutschsprachigen Literatur auch von *entdeckbar*. Beides sind Übersetzungen der englischen Bezeichnung *detectable*. Damit ist gemeint, dass instabile Eigenvorgänge im Ausgangsvektor erkennbar sind.

3.4 Strukturelle Analyse linearer Systeme

3.4.1 Struktur dynamischer Systeme

Die bisher behandelten Beispiele haben gezeigt, dass die Gründe für das Fehlen der vollständigen Steuerbarkeit oder Beobachtbarkeit häufig nicht in einzelnen Parameterwerten zu suchen sind, sondern auf das Nichtvorhandensein von Signalkopplungen zurückgeführt werden können. So ist der Zustand \mathbf{x}_2 in der in Abb. 3.9 auf S. 84 dargestellten Reihenschaltung nicht von \mathbf{y}_1 aus beobachtbar, weil es gar keinen Signalweg von \mathbf{x}_2 nach \mathbf{y}_1 gibt. Derselbe Grund führt dazu, dass der Zustand \mathbf{x}_1 nicht durch \mathbf{u}_2 steuerbar ist.

Diese Tatsache legt es nahe zu untersuchen, inwieweit die Eigenschaften der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit von den innerhalb des betrachteten Systems auftretenden Signalkopplungen bestimmt werden und damit weitgehend von den konkreten Parameterwerten unabhängig sind. Diese Untersuchungen werden auch als „strukturelle Analyse“ bezeichnet, weil sie sich nur auf die durch die Struktur des Systems gegebenen Signalkopplungen beziehen und von Parameterschwankungen weitgehend unabhängig sind.

Strukturmatrizen dynamischer Systeme. Die Struktur dynamischer Systeme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.44)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (3.45)$$

wird durch die Lage der von null verschiedenen Elemente in den Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{C} beschrieben. Man klassifiziert deshalb die Elemente in solche, die für sämtliche Parameterwerte des Systems verschwinden, und solche, die einen von null verschiedenen Wert haben können. Während man die erste Gruppe durch Nullen kennzeichnet, trägt man für die zweite Gruppe Sterne in die Matrix ein, die kennzeichnen, dass an den betreffenden Stellen „irgendwelche“ von null verschiedenen Werte stehen. Indem man die Matrixelemente in dieser Weise durch Nullen und Sterne ersetzt, geht man von den gegebenen (numerischen) Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{C} zu den Strukturmatrizen $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$ bzw. $[\mathbf{C}]$ über. Die durch die eckigen Klammern beschriebene Operation ordnet jedem Matrixelement eine Null oder einen Stern zu.

Beispielsweise kann man die Systemmatrix der im Beispiel 3.1 auf S. 56 betrachteten Rührkesselreaktoren in Abhängigkeit von den physikalischen Parametern des Systems in der Form

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{F}{V_1} & 0 \\ \frac{F}{V_2} & -\frac{F}{V_2} \end{pmatrix}$$

schreiben. Dabei wird offensichtlich, dass in der oberen rechten Ecke dieser Matrix für beliebige Parameterwerte eine Null steht, während alle anderen Elemente von null verschieden sind. Die zugehörige Strukturmatrix ist also

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}.$$

An diesem Beispiel wird offenkundig, dass man Strukturmatrizen auch dann aufstellen kann, wenn man die genauen Systemparameter nicht kennt. Die strukturelle Analyse des Systems kommt also dem Umstand entgegen, dass Systeme häufig für ungenau bekannte Parameter analysiert werden müssen, wie es für die Projektierungsphase der Regelung typisch ist.

Ganz allgemein wird im Folgenden immer von einer Strukturmatrix gesprochen, wenn diese Matrix als Elemente nur 0 oder * enthält. Diese Matrizen werden mit \mathbf{S} bezeichnet, wobei ein zusätzlicher Index auf diejenige Matrix verweist, deren Struktur durch \mathbf{S} beschrieben wird.

Durch Strukturmatrizen werden Klassen numerischer Matrizen beschrieben. So beschreibt

$$\mathcal{S}(\mathbf{S}_{\mathbf{A}}) = \{\mathbf{A} : [\mathbf{A}] = \mathbf{S}_{\mathbf{A}}\}$$

die Menge aller derjenigen Matrizen \mathbf{A} , in denen an den durch $\mathbf{S}_{\mathbf{A}}$ vorgegebenen Stellen Nullen stehen. Wenn man ausdrücken will, dass eine Matrix \mathbf{A} zu dieser Klasse gehört, so verwendet man an Stelle der ausführlichen Schreibweise $\mathbf{A} \in \mathcal{S}(\mathbf{S}_{\mathbf{A}})$ häufig die abgekürzte Darstellung $\mathbf{A} \in \mathbf{S}_{\mathbf{A}}$.

Diese Tatsache weist daraufhin, dass es bei der strukturellen Analyse dynamischer Systeme stets um die Analyse einer ganzen Klasse von Systemen geht, nämlich all derjenigen Systeme, deren Matrizen dieselbe Struktur haben. Diese Klasse ist durch die Strukturmatrizen $\mathbf{S}_{\mathbf{A}}$, $\mathbf{S}_{\mathbf{B}}$ und $\mathbf{S}_{\mathbf{C}}$ festgelegt. Sie wird mit $\mathcal{S}(\mathbf{S}_{\mathbf{A}}, \mathbf{S}_{\mathbf{B}}, \mathbf{S}_{\mathbf{C}})$ bezeichnet:

$$\mathcal{S}(\mathbf{S}_{\mathbf{A}}, \mathbf{S}_{\mathbf{B}}, \mathbf{S}_{\mathbf{C}}) = \{(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) : [\mathbf{A}] = \mathbf{S}_{\mathbf{A}}, [\mathbf{B}] = \mathbf{S}_{\mathbf{B}}, [\mathbf{C}] = \mathbf{S}_{\mathbf{C}}\}. \quad (3.46)$$

Alle im Folgenden abgeleiteten Ergebnisse sind in dem Sinne struktureller Art, dass sie stets für eine solche Klasse von Systemen zutreffen.

Grafentheoretische Interpretation der Systemstruktur. Auf eine anschauliche grafentheoretische Interpretation der Systemstruktur kommt man, wenn man für jede Eingangsvariable, Zustandsvariable und Ausgangsvariable einen Knoten aufzeichnet und zwischen diesen Knoten gerichtete Kanten einträgt, wenn das zugehörige Element der Strukturmatrizen $\mathbf{S}_{\mathbf{A}}$, $\mathbf{S}_{\mathbf{B}}$ und $\mathbf{S}_{\mathbf{C}}$ ein Stern ist.

Etwas mehr formalisiert heißt das, dass die Knotenmenge des Strukturgraphen \mathcal{G} aus Knotenmengen für die Zustände, die Eingänge und die Ausgänge besteht. Diese Knotenmengen werden mit \mathcal{X} , \mathcal{U} und \mathcal{Y} und ihre Elemente als Zustands-, Eingangs- bzw. Ausgangsknoten bezeichnet. Da jeder Zustand durch genau einen Knoten repräsentiert wird, wird nicht zwischen dem Namen der Zustandsvariablen und des zugehörigen Knotens unterschieden und beides mit x_i bezeichnet. Dasselbe wird für die Eingangs- und Ausgangsvariablen getan.

Die Adjazenzmatrix \mathbf{Q}_0 des Strukturgraphen bildet man entsprechend

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_A & \mathbf{S}_B & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{S}_C & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{U} \\ \mathcal{Y} \end{matrix}$$

aus den gegebenen Strukturmatrizen des Systems. Man kann sich den Aufbau der Matrix \mathbf{Q}_0 am einfachsten dadurch veranschaulichen, dass man die Modellgleichungen in der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

untereinander schreibt. Die Anordnung der Matrizen im Modell und die Anordnung der zugehörigen Strukturmatrizen in \mathbf{Q}_0 sind gleich. In der mittleren Zeile, die die Beziehung $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ausdrückt, wird später der Regler eingetragen (vgl. Gl. (3.50)).

Die Matrix \mathbf{Q}_0 hat die Dimension $(n+r+m, n+r+m)$, der Graf $\mathcal{G}(\mathbf{Q}_0)$ folglich $n+r+m$ Knoten. Von einem Knoten u_j gibt es genau dann eine Kante zu einem Knoten x_i , wenn das Element b_{ij} von null verschieden ist, in der Strukturmatrix \mathbf{S}_B an der Stelle ij also ein Stern steht. In derselben Weise kann man die Kanten zwischen den Zustandsknoten bzw. von Zustandsknoten zu Ausgangsknoten mit Matrizenelementen in Verbindung bringen. Der Graf $\mathcal{G}(\mathbf{Q}_0)$ beschreibt, wie die Signale innerhalb der zur Klasse $\mathcal{S}(\mathbf{S}_A, \mathbf{S}_B, \mathbf{S}_C)$ gehörenden Systeme verkoppelt sind.

Beispiel 3.10 Strukturelle Analyse eines Systems dritter Ordnung

Es wird ein System betrachtet, dessen Zustandsraummodell die Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{24} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_{32} \end{pmatrix} \\ \mathbf{y} &= \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

hat. In den Matrizen wird zwischen den Elementen unterschieden, die von den Systemparametern abhängig sind, und denen, die unabhängig von den Systemparametern gleich null sind. Deshalb kann man aus diesen Matrizen sofort die zugehörigen Strukturmatrizen ablesen:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_A &= \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \\ \mathbf{S}_B &= \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \\ \mathbf{S}_C &= \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aus diesen Strukturmatrizen kann man die Adjazenzmatrix \mathbf{Q}_0 des zu zeichnenden Grafen bestimmen:

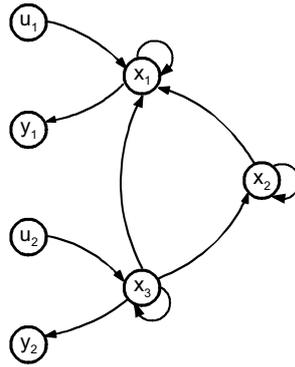


Abb. 3.15: Strukturgraph des Beispielsystems

$$Q_0 = \begin{pmatrix} * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Graf $\mathcal{G}(Q_0)$ ist in Abb. 3.15 zu sehen.

Die Bildung der Adjazenzmatrix erscheint etwas umständlich, weil diese Matrix so viele Nullen enthält. Man kann auf diese Matrix verzichten, wenn man sich merkt, wie die Kanten in den Grafen anhand der Strukturmatrizen S_A , S_B und S_C einzutragen sind. \square

3.4.2 Strukturelle Steuerbarkeit und strukturelle Beobachtbarkeit

Mit der strukturellen Analyse einer Klasse $\mathcal{S}(S_A, S_B, S_C)$ von Systemen will man entscheiden, ob die durch die Strukturmatrizen beschriebenen internen Signalkopplungen ausreichen, damit die Systeme dieser Klasse steuerbar und beobachtbar sein können. Von diesem Untersuchungsziel ist die folgende Definition abgeleitet.

Definition 3.3 (Strukturelle Steuerbarkeit und strukturelle Beobachtbarkeit)

Eine Klasse von Systemen $\mathcal{S}(S_A, S_B, S_C)$ heißt strukturell steuerbar bzw. strukturell beobachtbar, wenn es mindestens ein System $(A, B, C) \in \mathcal{S}$ gibt, das vollständig steuerbar bzw. vollständig beobachtbar ist.

Das heißt, dass die strukturelle Steuerbarkeit eine *notwendige* Bedingung für die vollständige Steuerbarkeit ist. Wenn also mit Hilfe der im Folgenden behandelten Verfahren anhand des Strukturgraphen festgestellt werden kann, dass die betrachtete Systemklasse nicht strukturell steuerbar ist, dann bedeutet das, dass kein System $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) \in \mathcal{S}$ vollständig steuerbar ist. Dasselbe gilt für die strukturelle Beobachtbarkeit.

Obwohl die Definition 3.3 nur die Existenz eines einzigen vollständig steuerbaren und beobachtbaren Systems in der betrachteten Klasse fordert, sind die strukturellen Eigenschaften den numerischen sehr ähnlich. Man kann nämlich zeigen, dass in einer Klasse strukturell steuerbarer und beobachtbarer Systeme „fast alle“ Systeme vollständig steuerbar und beobachtbar sind. Mathematisch gesprochen heißt das, dass die Parametervektoren der nicht steuerbaren oder nicht beobachtbaren Systeme im Raum der Systemparameter auf einer Hyperebene liegen (siehe Beispiel 3.11).

Kriterien für die strukturelle Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit.

Die Prüfung der strukturellen Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit erfordert zwei Schritte. Erstens muss geprüft werden, ob die Zustandsknoten mit den Eingangs- bzw. Ausgangsknoten über einen Pfad verbunden sind. Zweitens muss eine Bedingung an die Strukturmatrizen überprüft werden. Auf beide Schritte wird jetzt eingegangen.

Man nennt eine Systemklasse \mathcal{S} *eingangsverbunden*, wenn es im Strukturgraphen \mathcal{G} zu jedem Zustandsknoten x_i mindestens einen Pfad gibt, der einen Eingangsknoten u_j mit dem Zustandsknoten x_i verbindet. Es muss nicht eine direkte Kante $u_j \rightarrow x_i$ geben, aber einen Pfad, der über beliebig viele andere Zustandsknoten führen kann. Die Systemklasse \mathcal{S} heißt *ausgangsverbunden*, wenn es von jedem Zustandsknoten zu mindestens einem Ausgangsknoten einen Pfad gibt.

Man kann sich leicht vorstellen, dass eine Systemklasse eingangs- und ausgangsverbunden sein muss, wenn sie strukturell steuerbar und beobachtbar sein soll, denn andernfalls gibt es gar keine Signalwege, auf denen die Eingangsgrößen alle Zustandsvariablen beeinflussen bzw. alle Zustandsvariablen in die Ausgangsgrößen eingehen könnten. Tatsächlich kann man nachweisen, dass „fast alle“ Systeme einer eingangs- und ausgangsverbundenen Systemklasse das Hautuskriterium für $\lambda \neq 0$ erfüllen, dass also für fast alle diese Systeme die Bedingungen

$$\text{Rang}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} \ \mathbf{B}) = n$$

und

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} = n$$

für $\lambda \neq 0$ erfüllt sind.

Die Systemklasse muss noch eine zweite Bedingung erfüllen, die sichert, dass das Hautuskriterium auch für $\lambda = 0$ für mindestens ein System erfüllt ist. Man muss prüfen, dass der strukturelle Rang der Matrizen

$$(\mathbf{S}_A \ \mathbf{S}_B) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{S}_A \\ \mathbf{S}_C \end{pmatrix}$$

gleich n ist. Unter dem strukturellen Rang einer Strukturmatrix versteht man die maximale Anzahl von $*$ -Elementen, die man so auswählen kann, dass sie in getrennten Zeilen und Spalten stehen. Wenn der strukturelle Rang einer Strukturmatrix gleich n ist, so haben fast alle Matrizen dieser Klasse den Rang n . Der strukturelle Rang wird mit s-Rang abgekürzt.

Satz 3.7 (Kriterium für strukturelle Steuerbarkeit und strukturelle Beobachtbarkeit) Eine Klasse $\mathcal{S}(\mathbf{S}_A, \mathbf{S}_B, \mathbf{S}_C)$ von Systemen ist genau dann strukturell steuerbar, wenn

1. \mathcal{S} eingangsverbunden ist,
2. die Bedingung

$$\text{s-Rang } (\mathbf{S}_A \ \mathbf{S}_B) = n \quad (3.48)$$

erfüllt ist.

Die Klasse \mathcal{S} ist genau dann strukturell beobachtbar, wenn

1. \mathcal{S} ausgangsverbunden ist,
2. die Bedingung

$$\text{s-Rang } \begin{pmatrix} \mathbf{S}_A \\ \mathbf{S}_C \end{pmatrix} = n \quad (3.49)$$

erfüllt ist.

Beispiel 3.10 Strukturelle Analyse eines Systems dritter Ordnung (Forts.)

Wie man aus dem Graf in Abb. 3.15 sofort sehen kann, ist die betrachtete Systemklasse eingangs- und ausgangsverbunden. Für die Überprüfung der Rangbedingungen werden die Strukturmatrizen aufgestellt und es werden $*$ -Elemente gesucht, die in unterschiedlichen Zeilen und Spalten stehen. Dabei muss man versuchen, so viele derartiger Elemente wie möglich zu finden. Die folgenden Strukturmatrizen zeigen, dass der strukturelle Rang gleich drei ist und die betrachtete Systemklasse folglich strukturell steuerbar und beobachtbar ist. Die für die Rangbestimmung verwendeten Elemente sind durch \bullet gekennzeichnet:

$$\text{s-Rang } \left(\begin{array}{ccc|cc} \bullet & * & * & * & 0 \\ 0 & * & \bullet & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & \bullet \end{array} \right) = 3$$

$$\text{s-Rang } \left(\begin{array}{ccc} \bullet & * & * \\ 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & * \\ \hline * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bullet \end{array} \right) = 3$$

Um zu zeigen, dass die Matrizen den strukturellen Rang $n = 3$ haben, gibt es in diesem Beispiel mehrere Möglichkeiten der Auswahl von \bullet -Elementen.

Das Ergebnis heißt, dass innerhalb der angegebenen Systemklasse fast alle Systeme vollständig steuerbar und beobachtbar sind. \square

Das Beispiel zeigt, dass die grafische Analyse sehr anschaulich ist. Dieser Vorteil macht sich insbesondere dann bemerkbar, wenn man feststellt, dass die betrachtete Systemklasse *nicht* strukturell steuerbar oder beobachtbar ist. In diesem Fall gibt es ja kein System in \mathcal{S} , das vollständig steuerbar und beobachtbar ist. Man kann die Steuerbarkeit bzw. Beobachtbarkeit dann nur erreichen, indem man neue Stellgrößen bzw. neue Messgrößen einführt oder gegen vorhandene austauscht. Anhand des Strukturgraphen kann man dabei erkennen, wo die neuen Stellglieder angreifen müssen bzw. wo man zusätzlich messen muss.

Beispiel 3.11 *Strukturelle Steuerbarkeit paralleler Integratoren*

In der Aufgabe 3.5 wurde ermittelt, dass die Parallelschaltung zweier Integratoren nicht vollständig steuerbar und beobachtbar ist. Es soll jetzt untersucht werden, ob dieses Ergebnis strukturelle Ursachen hat.

Das Zustandsraummodell der parallel geschalteten Integratoren heißt

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{T_{I1}} \\ \frac{1}{T_{I2}} \end{pmatrix} u(t)$$

$$y = (1 \ 1) \mathbf{x}.$$

Die Systemklasse \mathcal{S} , zu der dieses System gehört, kann man ermitteln, indem man die Struktur der in diesem Zustandsraummodell vorkommenden Matrizen ermittelt:

$$\mathbf{S}_A = [\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}_B = [\mathbf{b}] = \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}_C = [\mathbf{c}'] = (* \ *).$$

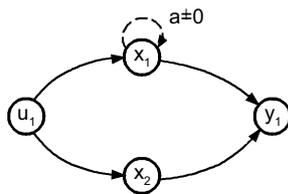


Abb. 3.16: Strukturgraph der parallelen Integratoren

Der Strukturgraph der betrachteten Systemklasse ist in Abb. 3.16 aufgezeichnet (ohne die gestrichelte Kante). Es ist sofort zu sehen, dass die Systemklasse eingangs- und ausgangsverbunden ist. Die Prüfung der Rangbedingung muss an den Matrizen

$$\begin{aligned} \text{s-Rang} & \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{array} \right) \\ \text{s-Rang} & \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ - & - \\ * & * \end{array} \right) \end{aligned}$$

erfolgen. Dabei sieht man, dass es keine zwei *-Elemente gibt, die in diesen Matrizen in unterschiedlichen Zeilen und Spalten stehen. Die Tatsache, dass die parallelen Integratoren nicht steuerbar und beobachtbar sind, hat also strukturelle Gründe.

Diskussion. Abhilfe schafft die Einführung neuer Mess- und Stellgrößen. Wenn beispielsweise ein zusätzlicher Eingang u_2 eingeführt wird, der nur den ersten Integrator beeinflusst, so hat die neue Eingangsmatrix \mathbf{B} die Struktur

$$[\mathbf{B}] = \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix}.$$

Da die neue Spalte auch die für den strukturellen Rang maßgebende Matrix erweitert, ist die Rangbedingung jetzt erfüllt:

$$\text{s-Rang} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & * \bullet \\ 0 & 0 & \bullet 0 \end{array} \right).$$

Schaltet man andererseits nicht zwei Integratoren, sondern zwei PT₁-Glieder parallel, so hat die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} \end{pmatrix}$$

die Struktur

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Auch hier ist die Rangbedingung erfüllt. Die Parallelschaltung zweier PT₁-Glieder ist also strukturell steuerbar und beobachtbar. Untersucht man diese Parallelschaltung mit dem Kalmankriterium, so sieht man, dass sie nur dann nicht numerisch steuerbar ist, wenn die Zeitkonstanten der beiden Übertragungsglieder exakt gleich groß sind. Die Beziehung $T_1 = T_2$ beschreibt dann gerade die Hyperebene im Raum der Parameter T_1 und T_2 , für die das System zwar strukturell, aber nicht numerisch steuerbar ist. Für alle anderen, also für "fast alle" parallelgeschalteten PT₁-Glieder, folgt aus der strukturellen auch die numerische Steuerbarkeit.

Wie der Strukturgraf in Abb. 3.16 zeigt, genügt es bereits, einen der beiden Integratoren mit einer kleinen Rückführung zu versehen, so dass das Zustandsraummodell in

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{T_{11}} \\ \frac{1}{T_{12}} \end{pmatrix} u(t) \\ \mathbf{y} &= (1 \ 1) \mathbf{x} \end{aligned}$$

übergeht. Wenn a von null verschiedene Werte annehmen kann, ist die Strukturmatrix von \mathbf{A} jetzt durch

$$\mathbf{S}_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben, wodurch eine neue Kante in den Strukturgraf eingeführt wird (in Abb. 3.16 gestrichelt eingetragen). Das System ist strukturell steuerbar und beobachtbar. Nur für den speziellen Parameterwert $a = 0$ besitzt es diese Eigenschaften nicht. \square

3.4.3 Strukturell feste Eigenwerte

Eigenwerte, die nicht steuerbar oder nicht beobachtbar sind, werden auch als *feste Eigenwerte* bezeichnet, denn sie lassen sich durch keinen Regler verändern. Dieser Begriff lässt sich auf den der strukturell festen Eigenwerte einer Systemklasse $\mathcal{S}(\mathbf{S}_A, \mathbf{S}_B, \mathbf{S}_C)$ erweitern. Die Systemklasse \mathcal{S} hat strukturell feste Eigenwerte, wenn *alle* Systeme $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) \in \mathcal{S}$ feste Eigenwerte haben, d.h., wenn alle betrachteten Systeme nicht vollständig steuerbar und beobachtbar sind.

Man muss beachten, dass entsprechend der gegebenen Begriffsbestimmung sämtliche Systeme $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) \in \mathcal{S}$ feste Eigenwerte haben, wenn \mathcal{S} strukturell feste Eigenwerte besitzt. Das bedeutet aber nicht, dass alle Systeme zahlenmäßig dieselben festen Eigenwerte haben.

Die Überprüfung der Systemklasse auf strukturell feste Eigenwerte ist prinzipiell sehr einfach, denn sobald eine der Bedingungen aus Satz 3.7 verletzt ist, ist die Systemklasse nicht strukturell steuerbar und beobachtbar und hat strukturell feste Eigenwerte. Es gilt also:

|| Eine Systemklasse $\mathcal{S}(\mathbf{S}_A, \mathbf{S}_B, \mathbf{S}_C)$ hat genau dann strukturell feste Eigenwerte, wenn mindestens eine der Bedingungen von Satz 3.7 nicht erfüllt ist.

Diese Eigenschaft hat eine interessante grafische Interpretation, auf die im Folgenden eingegangen werden soll. Dabei betrachtet man das gegebene System unter dem Einfluss einer Rückführung des Ausgangs \mathbf{y} auf den Eingang \mathbf{u} , die durch

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_y \mathbf{y}$$

beschrieben ist. Da die Matrix \mathbf{K}_y keiner Beschränkung unterliegt, hat die Strukturmatrix $[\mathbf{K}_y]$ keine Nullelemente.

Bezieht man die Rückführung in den Strukturgraphen ein, so muss man den bisherigen Graphen um Kanten von allen Ausgangsvariablen y_i auf alle Eingangsgrößen u_j erweitern. Formal geschieht das dadurch, dass für das jetzt betrachtete Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & -\mathbf{K}_y \\ \mathbf{C} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

die neue Adjazenzmatrix

$$Q_E = \begin{pmatrix} S_A & S_B & O \\ O & O & E \\ S_C & O & O \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{U} \\ \mathcal{Y} \end{matrix}$$

aufgestellt wird, in der die Rückführung durch die (m, r) -Matrix

$$E = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

repräsentiert wird. Gleichung (3.50) unterscheidet sich von Gl. (3.47) durch den Regler. Die Erweiterung des Strukturgraphen ist in Abb. 3.17 für das Beispiel aus Abb. 3.15 veranschaulicht.

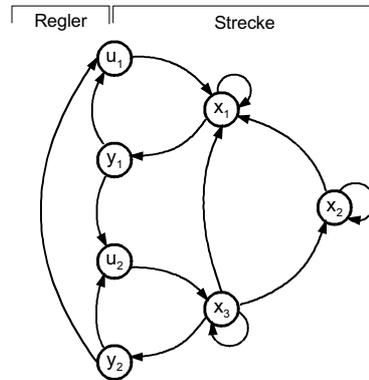


Abb. 3.17: Strukturgraph für das Beispielsystem mit Ausgangsrückführung

Da die Eigenwerte der Regelstrecke nur dann durch den Regler beeinflusst werden können, wenn sie in einer Rückführschleife mit dem Regler liegen, gibt es strukturell feste Eigenwerte, wenn es für einen oder mehrere Zustandsknoten keine derartige Schleife gibt. Der Grund dafür kann nur in der Tatsache liegen, dass die Regelstrecke nicht eingangs- oder nicht ausgangsvverbunden ist. Strukturell feste Eigenwerte, die aus diesem Grunde vorhanden sind, werden auch als *strukturell feste Eigenwerte des Typs I* bezeichnet.

Die zweiten Bedingungen im Satz 3.7 können ebenfalls grafisch interpretiert werden, wenn man den Begriff der Schleifenfamilie einführt. Unter einer Schleifenfamilie versteht man eine Menge von geschlossenen Pfaden (Schleifen) in einem gegebenen Grafen, die keine gemeinsamen Knoten enthalten. Zählt man nun die Zustandsknoten in der Schleifenfamilie, so erhält man deren Weite. Die zweiten Bedingungen im Satz 3.7 sind nun gerade dann erfüllt, wenn es im Grafen $\mathcal{G}(Q_E)$ eine Schleifenfamilie der Weite n gibt. Wenn struk-

turell feste Eigenwerte existieren, weil diese Bedingung nicht erfüllt ist, obwohl die Systemklasse eingangs- und ausgangsverbunden ist, so spricht man auch von *strukturell festen Eigenwerten des Typs II*.

Damit erhält man für die Existenz strukturell fester Eigenwerte folgende Aussagen:

Satz 3.8 (Existenz strukturell fester Eigenwerte)

Eine Klasse $\mathcal{S}(\mathbf{S}_A, \mathbf{S}_B, \mathbf{S}_C)$ von Systemen hat genau dann strukturell feste Eigenwerte, wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. *\mathcal{S} ist entweder nicht eingangsverbunden oder nicht ausgangsverbunden.*
2. *Im Strukturgraphen $\mathcal{G}(\mathbf{Q}_E)$ gibt es keine Schleifenfamilie der Weite n .*

Beispiel 3.10 Strukturelle Analyse eines Systems dritter Ordnung (Forts.)

Wie bereits untersucht wurde, ist die als Beispiel betrachtete Systemklasse strukturell steuerbar und beobachtbar. Folglich besitzt sie keine strukturell festen Eigenwerte. Mit Hilfe von Satz 3.8 kann man nun auf anderem Wege zu diesem Ergebnis kommen.

Man betrachtet den in Abb. 3.17 gezeigten Strukturgraphen $\mathcal{G}(\mathbf{Q}_E)$. Die Systemklasse ist, wie schon untersucht wurde, eingangs- und ausgangsverbunden. Man kann nun eine Schleifenfamilie der Weite drei finden und damit zeigen, dass die Systemklasse keine strukturell festen Eigenwerte hat. Beispielsweise enthält die Schleife $u_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1 \rightarrow y_1 \rightarrow u_2$ alle drei Zustandsknoten und stellt folglich eine derartige Schleifenfamilie dar. Ein anderes Beispiel ist durch die drei Schleifen $u_2 \rightarrow x_3 \rightarrow y_2 \rightarrow u_2$, $u_1 \rightarrow x_1 \rightarrow y_1 \rightarrow u_1$ und $x_2 \rightarrow x_2$ gegeben, die ebenfalls alle drei Zustandsknoten enthalten und folglich die Weite drei besitzen. \square

Strukturbeschränkte Regler. Unter einem strukturbeschränkten Regler versteht man einen Mehrgrößenregler

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_y \mathbf{y},$$

für den vorgeschrieben ist, dass bestimmte Elemente der Reglermatrix \mathbf{K}_y gleich null sein müssen. Will man beispielsweise zwischen der Regelgröße y_1 und der Stellgröße u_2 eines Zweigrößensystems keine Informationskopplung herstellen, so unterliegt der Regler der Beschränkung $k_{y_2 1} = 0$. Im Extremfall kann man auch zwei einschleifige Regler als einen strukturbeschränkten Mehrgrößenregler auffassen.

Der Begriff der Strukturbeschränkung ist sehr anschaulich, denn die betrachteten Strukturbeschränkungen äußern sich in Nullen in der Strukturmatrix \mathbf{S}_K des Reglers. Für die als Beispiele genannten Strukturbeschränkungen gilt

$$\mathbf{S}_K = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{S}_K = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Die Existenz strukturell fester Eigenwerte hängt offensichtlich von Strukturbeschränkungen des Reglers ab. Erwartungsgemäß gibt es umso mehr feste Eigenwerte, desto schärfer die Strukturbeschränkungen für den Regler sind, d.h., desto mehr Nullen in S_K stehen.

Die Aussagen des Satzes 3.8 können nun ohne weiteres auf strukturbeschränkte Regler angewendet werden, wenn man in der Adjazenzmatrix Q_E an Stelle der vollbesetzten Matrix E die Strukturmatrix S_K des Reglers einsetzt. Das heißt, im Strukturgraphen werden nur noch Kanten $y_j \rightarrow u_i$ eingetragen, wenn die durch sie repräsentierten Rückkopplungen auch unter den vorhandenen Strukturbeschränkungen möglich sind. Der Wegfall derjenigen Kanten, für die jetzt Nullen in S_K stehen, schränkt natürlich die Möglichkeit ein, Schleifenfamilien zu bilden. Nur wenn es trotz der eingeführten Strukturbeschränkungen noch eine Schleifenfamilie der Weite n gibt, stellt der Regler diejenigen Informationskopplungen her, die für die Beeinflussung aller Eigenwerte strukturell notwendig sind.

Aufgabe 3.9* Strukturelle Steuerbarkeit eines elektrischen Rotationsantriebs

Ein elektromechanisches System bestehend aus einem Elektromotor, der über ein Getriebe und eine Welle zwei Schwungmassen antreibt, kann durch das in Abb. 3.18 dargestellte elektromechanische Ersatzsystem beschrieben werden. Das elastische Verhalten der auf Torsion beanspruchten Welle wird durch eine Drehfeder modelliert. Eingangsgröße ist die elektrische Spannung ($u(t) = U_A(t)$), Ausgangsgröße der Drehwinkel der rechten Scheibe ($y(t) = \varphi_2(t)$). Folgende Bezeichnungen sind in Abb. 3.18 verwendet:

Ψ	Magnetfluss	$u_i(t)$	induzierte Gegenspannung
R_A	Widerstand	L_A	Induktivität
Θ_i	Trägheitsmomente der Scheiben	d_i	Dämpfung
$M(t)$	Antriebsmoment des Motors	\ddot{u}	Untersetzungsverhältnis
η	mechanischer Wirkungsgrad	$\varphi_i(t)$	Drehwinkel der Scheiben
c_t	Torsionsfederkonstante		

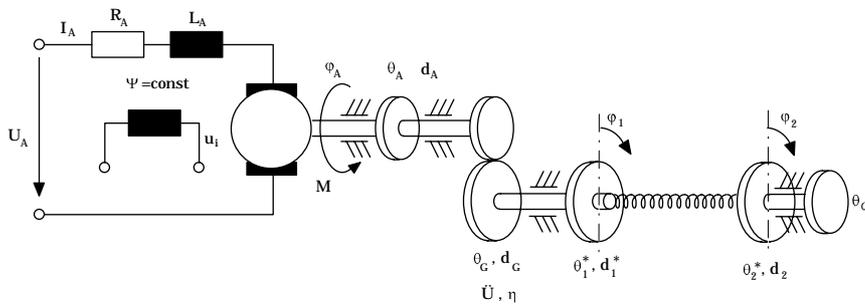


Abb. 3.18: Elektromechanisches Ersatzsystem für einen Rotationsantrieb

Unter einigen vereinfachenden Annahmen (z.B. der Vernachlässigung von Reibungseffekten) und nach Definition des Zustandsvektors

$$\mathbf{x}(t)' = (x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)) = (\varphi_1(t) \ \dot{\varphi}_1(t) \ \varphi_2(t) \ \dot{\varphi}_2(t))$$

erhält man das Zustandsraummodell

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{c_t}{\Theta_1} & -\frac{d_1}{\Theta_1} & \frac{c_t}{\Theta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{c_t}{\Theta_2} & 0 & -\frac{c_t}{\Theta_2} & -\frac{d_2}{\Theta_2} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\Psi \ddot{u} \eta}{R_A \Theta_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \mathbf{x}(t).$$

1. Zeichnen Sie den Strukturgraphen des Systems.
2. Ist das System strukturell steuerbar und strukturell beobachtbar?
3. Ändern sich diese Eigenschaften, wenn an Stelle des Drehwinkels φ_2 der zweiten Scheibe der Drehwinkel φ_1 der ersten Scheibe gemessen wird? Erklären Sie das Ergebnis physikalisch anhand des Ersatzsystems aus Abb. 3.18. \square

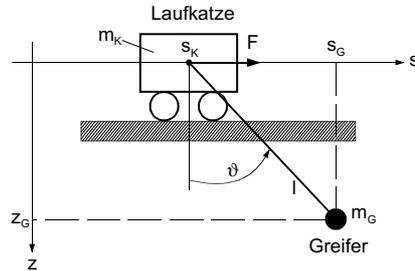


Abb. 3.19: Verladebrücke

Aufgabe 3.10* Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit einer Verladebrücke

Für die Verladebrücke in Abb. 3.19 werden folgende Zustandsgrößen eingeführt:

$$\begin{aligned} x_1 &= s_K && \text{Position der Laufkatze} \\ x_2 &= \dot{x}_1 && \text{Geschwindigkeit der Laufkatze} \\ x_3 &= \vartheta && \text{Seilwinkel } (\vartheta = 0: \text{Seil hängt senkrecht nach unten.}) \\ x_4 &= \dot{\vartheta} && \text{Winkelgeschwindigkeit.} \end{aligned}$$

Eingangsgröße $u(t)$ ist die auf die Laufkatze wirkende Kraft. Parameter des Systems sind:

$$\begin{aligned} m_K & \text{ Masse der Laufkatze} \\ m_G & \text{ Masse von Greifer und Last (Das Seil wird als masselos betrachtet)} \\ l & \text{ Seillänge} \\ g & \text{ Erdbeschleunigung.} \end{aligned}$$

Nach Linearisierung um die Ruhelage erhält man das Zustandsraummodell

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{pmatrix} u \quad (3.51)$$

mit

$$a_{23} = \frac{m_G}{m_K} g \quad (3.52)$$

$$a_{43} = -\frac{m_G + m_K}{m_K} \frac{g}{l} \quad (3.53)$$

$$b_2 = \frac{1}{m_K} \quad (3.54)$$

$$b_4 = -\frac{1}{m_K l}. \quad (3.55)$$

Wird der Seilwinkel ϑ gemessen, so lautet die Ausgabegleichung

$$y = (0 \ 0 \ 1 \ 0) \mathbf{x}.$$

1. Prüfen Sie, ob das System vollständig steuerbar und beobachtbar ist und geben Sie gegebenenfalls an, welche Eigenwerte nicht steuerbar bzw. beobachtbar sind.
2. Prüfen Sie anhand des Strukturgraphen des Systems, ob Ihre Ergebnisse auch strukturell gelten.
3. Wie verändern sich Ihre Ergebnisse, wenn an Stelle des Seilwinkels die Position der Laufkatze gemessen wird? \square

Aufgabe 3.11* *Steuerbarkeit eines Systems in Regelungsnormalform*

Betrachten Sie ein System, dessen Zustandsraummodell in Regelungsnormalform

$$\dot{\mathbf{x}}_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \mathbf{x}_R + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad \mathbf{x}_R(0) = \mathbf{x}_0$$

$$y = (b_0 \ b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_{n-1}) \mathbf{x}_R$$

gegeben ist. Prüfen Sie die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit dieses Systems. Gelten Ihre Ergebnisse auch strukturell? \square

3.5 Realisierbarkeit und Realisierung von Mehrgrößensystemen

Ein lineares System kann sowohl durch ein Zustandsraummodell

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \quad (3.56)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (3.57)$$

als auch durch ein E/A-Modell im Frequenzbereich

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{U}(s) \quad (3.58)$$

beschrieben werden, wobei beide Modelle dasselbe Übertragungsverhalten aufweisen, wenn die Beziehung

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{D} + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \quad (3.59)$$

erfüllt ist. Als Abkürzung für diesen Zusammenhang wurde

$$\mathbf{G}(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right]$$

eingeführt.

Die Beziehung (3.59) kann ohne Probleme angewendet werden, wenn man mit ihr den Schritt vom Zustandsraummodell zur Frequenzbereichsdarstellung, also in der Gleichung von rechts nach links, gehen will. Problematischer ist es, aus einer gegebenen Übertragungsfunktionsmatrix das dazugehörige Zustandsraummodell zu finden, denn aus $\mathbf{G}(s)$ kann nicht ohne weiteres abgelesen werden, welche dynamische Ordnung das Modell haben muss. Mit diesem Problem befasst sich dieser Abschnitt.

Wenn die Beziehung (3.59) erfüllt ist, so sagt man, dass das Zustandsraummodell (3.56), (3.57) eine *Realisierung* der gegebenen Übertragungsfunktionsmatrix ist. Der Begriff der Realisierung stammt aus der Zeit, als man das Zustandsraummodell mit einer Analogrechterschaltung oder einer Operationsverstärkerschaltung in Verbindung brachte, die das gegebene Übertragungsverhalten realisieren sollte. Die Überführung der Übertragungsfunktionsmatrix in das Zustandsraummodell war also eine wichtige Voraussetzung für die Nachbildung des Systems für Simulationsuntersuchungen. Heute denkt man eher an eine Realisierung als digitales Simulationsmodell. Aber auch dieses kann direkt aus den Gln. (3.56) und (3.57) abgeleitet werden.

Für Eingrößensysteme wurde das Problem der Realisierung im Abschnitt I-6.5.2 im Zusammenhang mit der Berechnung einer Übertragungsfunktion aus einem Zustandsraummodell bzw. aus einer Differenzialgleichung erwähnt. Da die Übertragungsfunktion $G(s)$ eine gebrochene rationale Funktion ist, stimmen die Koeffizienten ihres Zähler- und Nennerpolynoms mit den Koeffizienten der Differenzialgleichung bzw. den Parametern der Regelungsnormform des Zustandsraummodells überein. Die Lösung des Realisierungsproblems bereitet also keine Schwierigkeiten.

Bei Mehrgrößensystemen ist die Bestimmung einer Realisierung schwieriger. Wie im Abschn. 2.5 erläutert wurde, stimmt zwar die Menge der Pole der Elemente $G_{ij}(s)$ der Übertragungsfunktionsmatrix mit der Menge der Eigenwerte, die in der zu berechnenden Matrix \mathbf{A} vorkommen muss, überein. Um die dynamische Ordnung festlegen zu können, muss man jedoch auch die Vielfachheit der Eigenwerte kennen.

Man könnte nun so vorgehen, dass man jedes Element der Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(s)$ in der für Eingrößensysteme bekannten Weise in ein Zustandsraummodell überführt und aus den erhaltenen Teilmodellen das Gesamtmodell zusammensetzt. Dabei entsteht tatsächlich eine Realisierung von $\mathbf{G}(s)$. Dieser Weg führt jedoch i.Allg. auf ein Modell, in dem Eigenvorgänge des Systems mehrfach nachgebildet sind. Tritt nämlich ein Eigenvorgang in mehreren Elementen $G_{ij}(s)$ der Übertragungsfunktionsmatrix gleichzeitig

auf, so wird für ihn in der Realisierung jedes dieser Elemente eine gesonderte Zustandsvariable eingeführt.

Man sucht i.Allg. aber nicht nur irgendeine Realisierung von $\mathbf{G}(s)$, sondern eine mit kleinstmöglicher dynamischer Ordnung. Diese wird als *minimale Realisierung* bezeichnet. Ein Weg, eine minimale Realisierung zu finden, wird im Folgenden beschrieben.

GILBERT-Realisierung. Bei dem von GILBERT angegebenen Weg, eine minimale Realisierung aufzustellen, wird vorausgesetzt, dass die Pole der Übertragungsfunktionsmatrix einfach sind. Auf Grund dieser Voraussetzung ist bekannt, dass die Systemmatrix \mathbf{A} des aufzustellenden Zustandsraummodells diagonalähnlich ist. Diese Voraussetzung bedeutet aber nicht, dass auch die Eigenwerte von \mathbf{A} einfach sind.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass kein Element von $\mathbf{G}(s)$ sprunghaft ist. Andernfalls müsste man eine konstante Matrix, die die sprunghaftigen Anteile enthält, als Summand abspalten. Diese Matrix wäre gleich der Durchgangsmatrix \mathbf{D} des Zustandsraummodells.

Das Verfahren beginnt damit, dass alle Elemente der gegebenen (r, m) -Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(s)$ in Partialbrüche zerlegt werden, $\mathbf{G}(s)$ also in der Form

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{Z}(s)}{N(s)} = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{\mathbf{R}_i}{s - s_i} \quad (3.60)$$

geschrieben wird. Dabei ist

$$N(s) = \prod_{i=1}^{\bar{n}} (s - s_i)$$

das gemeinsame Nennerpolynom aller Elemente von $\mathbf{G}(s)$. Die (r, m) -Matrizen \mathbf{R}_i erhält man als Residuen von s_i :

$$\mathbf{R}_i = \lim_{s \rightarrow s_i} (s - s_i) \mathbf{G}(s). \quad (3.61)$$

Sie werden nun in ein Produkt

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{C}_i \mathbf{B}_i$$

zerlegt, wobei \mathbf{C}_i eine (r, n_i) -Matrix und \mathbf{B}_i eine (n_i, m) -Matrix ist. Die Spalten- bzw. Zeilenzahl n_i ergibt sich aus dem Rang von \mathbf{R}_i :

$$n_i = \text{Rang } \mathbf{R}_i.$$

Damit erhält man als Gilbertrealisierung der Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(s)$ das Zustandsraummodell (3.56), (3.57) mit

$$\mathbf{A} = \text{diag } s_i \mathbf{I}_{n_i} = \begin{pmatrix} s_1 \mathbf{I}_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & s_{\bar{n}} \mathbf{I}_{n_{\bar{n}}} \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \dots \\ \mathbf{B}_{\bar{n}} \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

$$\mathbf{C} = (\mathbf{C}_1 \dots \mathbf{C}_{\bar{n}}) \quad (3.64)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{O}.$$

Die Matrix \mathbf{A} ist eine Blockdiagonalmatrix mit \bar{n} Hauptdiagonalblöcken $s_i \mathbf{I}_{n_i}$, in denen \mathbf{I}_{n_i} Einheitsmatrizen der Dimension (n_i, n_i) bezeichnen. Die Matrizen \mathbf{B} und \mathbf{C} entstehen durch Untereinander- bzw. Nebeneinanderschreiben der Matrizen \mathbf{B}_i bzw. \mathbf{C}_i ($i = 1, \dots, \bar{n}$).

Der Pol s_i der Übertragungsfunktionsmatrix kommt n_i -mal als Eigenwert der Matrix \mathbf{A} vor. Da die Matrix \mathbf{A} diagonalähnlich ist, besitzt das System damit n_i verschiedene Eigenvorgänge $\mathbf{v}_i e^{s_i t}$. Diese Eigenvorgänge haben denselben Exponenten, jedoch verschiedene Vektoren \mathbf{v}_i , die bekanntlich die Eigenvektoren der Matrix \mathbf{A} zum Eigenwert s_i sind.

Die angegebene Realisierung hat die dynamische Ordnung

$$n = \sum_{i=1}^{\bar{n}} n_i.$$

n ist also i.Allg. größer als die Zahl \bar{n} der Partialbrüche von $\mathbf{G}(s)$. Sie wird durch den Rang der Matrizen \mathbf{R}_i bestimmt, also von der Anzahl verschiedener Eigenvorgänge mit demselben Pol s_i .

Beispiel 3.12 Gilbertrealisierung eines (2, 2)-Systems

Gegeben sei die Übertragungsfunktionsmatrix

$$\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} \frac{2}{s+3} & \frac{2}{(s+1)(s+3)} \\ \frac{2}{s+1} & \frac{3}{s+1} \end{pmatrix}.$$

Bevor die Gilbertrealisierung angegeben wird, wird zunächst die „direkte“ Realisierung bestimmt, bei der jedes Element der Übertragungsfunktionsmatrix einzeln durch ein Zustandsraummodell dargestellt wird. Die Pole der Übertragungsfunktionsmatrix liegen bei -1 und -3 . Drei der Elemente sind PT_1 -Glieder, die durch ein Zustandsraummodell erster Ordnung beschrieben werden können. Das verbleibende Element ist ein PT_2 -Glieder, dessen Zustandsraummodell die Ordnung zwei hat. Man erhält damit das Modell

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 \vdots \\ \dots \dots \dots \\ \vdots -1 \vdots \\ \vdots 1 -3 \vdots \\ \dots \dots \dots \\ \vdots -1 \vdots \\ \dots \dots \dots \\ \vdots -1 \vdots \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \vdots \\ \dots \dots \dots \\ \vdots 2 \\ \vdots \\ \dots \dots \dots \\ 2 \vdots \\ \dots \dots \dots \\ \vdots 3 \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & \vdots & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

mit der dynamischen Ordnung fünf. Die nicht angegebenen Matrixelemente sind Nullen.

Zerlegt man nun jedoch die Übertragungsfunktionsmatrix entsprechend Gl. (3.60) in der Form

$$G(s) = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}{s+1} + \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{s+3},$$

so wird offensichtlich, dass nur zwei Partialbrüche zu betrachten sind, wobei der Rang der ersten Matrix gleich zwei und der Rang der zweiten Matrix gleich eins ist. Es existiert deshalb ein Zustandsraummodell dritter Ordnung, das die angegebene Übertragungsfunktionsmatrix realisiert.

Die Residuen kann man in die Produkte

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{I} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix},$$

zerlegen, so dass man das Modell

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 1 \\ 2 & \vdots & 3 \\ \dots & \dots & \dots \\ 2 & \vdots & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

erhält. Dieses Modell ist eine minimale Realisierung der gegebenen Übertragungsfunktionsmatrix.

Es fällt auf, dass der Eigenwert -1 nicht nur einmal, sondern zweimal auftritt. Der Grund liegt darin, dass das System zwei Modi mit diesem Eigenwert, jedoch unterschiedlichen Eigenvektoren besitzt. Dass dies so ist, kann man nicht auf den ersten Blick aus der Übertragungsfunktionsmatrix erkennen. Mit dem beschriebenen Entwurfsverfahren erhält man diese Tatsache als Nebenergebnis. \square

Existenz minimaler Realisierungen. Die beschriebene Vorgehensweise zur Bestimmung einer minimalen Realisierung lässt sich auf Systeme mit nicht-diagonalähnlichen Matrizen \mathbf{A} bzw. mehrfachen Polen der Übertragungsfunktionsmatrix erweitern. Da man dann mit der Jordan-Normalform der Systemmatrix arbeiten muss, ist die Darstellung dieser Verallgemeinerung jedoch so aufwendig, dass sie hier übergangen wird. Es soll statt dessen die

Frage beantwortet werden, woran man eine minimale Realisierung erkennen kann. Die Antwort darauf enthält der folgende Satz:

Satz 3.9 (Minimale Realisierung)

Ein Zustandsraummodell (A, B, C) ist genau dann eine minimale Realisierung der Übertragungsfunktionsmatrix $G(s)$, wenn

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

gilt und (A, B, C) vollständig steuerbar und beobachtbar ist.

Dieser Satz, der hier ohne Beweis angegeben wird, ist plausibel, wenn man sich noch einmal verdeutlicht, dass das Realisierungsproblem nur das E/A-Verhalten eines Systems betrifft. Modi des Systems, die entweder nicht steuerbar oder nicht beobachtbar sind, können in einem Zustandsraummodell zwar für die Beschreibung der Eigenbewegung des Systems notwendig sein, sind für das E/A-Verhalten aber überflüssig. Streicht man sie heraus (was, wie bereits behandelt, nicht ganz einfach ist!), so verringert sich die dynamische Ordnung, doch das E/A-Verhalten bleibt unverändert.

Der angegebene Satz macht folgende Eigenschaften minimaler Realisierungen deutlich:

|| Alle minimalen Realisierungen einer gegebenen Übertragungsfunktionsmatrix lassen sich durch eine Transformation des Zustandsraumes ineinander überführen.

Wenn man also vergleichen will, ob zwei Systeme identisches E/A-Verhalten aufweisen, so überführt man beide Zustandsraummodelle beispielsweise in die kanonische Normalform. Die Systeme sind genau dann identisch, wenn die Parameter der erhaltenen Modelle übereinstimmen. Da die Matrizen

$$CB, CAB, CA^2B, \dots, CA^{n-1}B, \quad (3.65)$$

die man auch als MARKOV-Parameter eines Systems bezeichnet, unabhängig von einer Transformation des Zustandsraumes sind und nur den steuerbaren und beobachtbaren Teil des Systems beschreiben, kann man auch diese Parameter für beide Systeme berechnen und miteinander vergleichen.

|| Aus einer beliebigen Realisierung erhält man eine minimale Realisierung, indem man aus der Kalmanzerlegung den steuerbaren und beobachtbaren Teil „herausnimmt“.

Aufgabe 3.12* Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit der Gilbertrealisierung

Beweisen Sie, dass die Gilbertrealisierung (3.62) - (3.64) minimal ist. \square

Aufgabe 3.13* Minimale Realisierung eines Dampferzeugermodells

Ein Dampferzeuger mit dem Eingangsvektor

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \text{Frischwassereinspeisung } \dot{Q}_w \\ \text{Brennstoffzufuhr } \dot{Q}_{Br} \end{pmatrix}$$

und den Regelgrößen

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \text{Dampfdruck } p \\ \text{Dampftemperatur } \vartheta \end{pmatrix}$$

ist durch folgende Übertragungsfunktionsmatrix beschrieben:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} \frac{0,0081}{(s + 0,037)(s + 0,1)} & \frac{0,00006353}{(s + 0,0385)(s + 0,05)} \\ \frac{-0,001}{(s + 0,0385)(s + 0,1)} & \frac{0,0001125}{(s + 0,025)(s + 0,05)} \end{pmatrix}$$

Ermitteln Sie für diesen Dampferzeuger ein Zustandsraummodell minimaler dynamischer Ordnung. \square

3.6 MATLAB-Funktionen zur Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsanalyse

Für die Bildung der Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{S}_S und der Beobachtbarkeitsmatrix \mathbf{S}_B von `System` gibt es die Funktionen

```
SS = ctrb(System);
SB = obsv(System);
```

deren Namen man sich an den englischen Begriffen *controllability* bzw. *observability* leicht merken kann. Für den Steuerbarkeits- bzw. Beobachtbarkeitstest nach Kalman braucht man dann nur den Rang dieser Matrizen zu bestimmen und mit der Systemordnung zu vergleichen:

```
rank(ctrb(System))
rank(obsv(System))
```

Da dieser Weg zu numerischen Problemen führen kann, wenn die Systemparameter sich um Größenordnungen unterscheiden, kann man auch die gramscche Steuerbarkeits- bzw. Beobachtbarkeitsmatrix bilden und deren Rang bestimmen. Die Funktionsaufrufe

```
WS = gram(System, 'o');
WB = gram(System, 'c');
```

liefern die Matrizen \mathbf{W}_S bzw. \mathbf{W}_B nach Gln. (3.7) bzw. (3.30) für $T_e = \infty$. Wenn diese Matrizen den Rang n haben, ist das System steuerbar bzw. beobachtbar.

Die Funktion

```
minRealSystem = minreal(System);
```

berechnet für `System` eine minimale Realisierung, d.h., sie eliminiert die nicht steuerbaren oder nicht beobachtbaren kanonischen Zustandsvariablen.

Aufgabe 3.14** Steuerbarkeitskriterium von HAUTUS

Welche Folge von Funktionsaufrufen ist notwendig, um mit dem Steuerbarkeitskriterium von HAUTUS die nicht steuerbaren Eigenwerte des Systems (\mathbf{A}, \mathbf{B}) zu ermitteln? \square

Literaturhinweise

Der Begriff der Steuerbarkeit wurde von KALMAN 1960 im Zusammenhang mit Untersuchungen zur optimalen Steuerung dynamischer Systeme in [42] eingeführt. Dort ist auch das Kalmankriterium angegeben. Die Steuerbarkeitsuntersuchungen von GILBERT, die sich im Wesentlichen auf die kanonische Normalform des Zustandsraummodells beziehen, sind in [31] veröffentlicht. Das Kriterium von HAUTUS entstand wesentlich später [37]. Die Ausgangssteuerbarkeit wurde in [50] untersucht.

Dass die Zahl der steuerbaren und beobachtbaren Eigenwerte invariant gegenüber einer Transformation des Zustandsraumes ist, ist seit langem bekannt und wurde beispielsweise 1972 in [115] ausführlich diskutiert. Eine Übersicht über Steuerbarkeitsmaße kann in [59] nachgelesen werden.

Die Dekomposition eines Systems in steuerbare, beobachtbare bzw. nicht steuerbare und nicht beobachtbare Anteile wurde von KALMAN 1963 in [43] veröffentlicht.

Die Aufgabe 3.7 ist [27] entnommen.

Die Erweiterung der Regelungsnormform des Zustandsraummodells auf Mehrgrößensysteme wurde von LUENBERGER in dem 1967 erschienenen Aufsatz [61] vorgeschlagen.

Trotz ihrer Anschaulichkeit haben strukturelle Betrachtungen zur Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit noch keinen Eingang in Lehrbücher gefunden. Für dieses Thema wird auf die Monografien [97] und [112] verwiesen. Die hier verwendeten Beispiele stammen aus [69]. Aufgabe 3.9 ist [112] entnommen.

Der Realisierung dynamischer Systeme wird in der Literatur zur Systemtheorie ausführlich behandelt. Das hier behandelte Verfahren wurde von GILBERT in dessen grundlegender Arbeit [31] zur Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit linearer Systeme 1963 angegeben.