2.1 Mathematische Grundlagen

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A};$$
 (2.157d)

$$x^2 + ax + b = 0, (2.157e)$$

$$x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$
 (2.157f)

2.1.4 Berechnung von Schaltungen der Leistungselektronik

Es würde hier zu weit führen, eine Beschreibung von Rechenmethoden speziell für leistungselektronische Schaltungen zu geben, da auf diesem Gebiet eine große Zahl verschiedener Rechenprogramme entwickelt wurde. Weiters ist zu bedenken, daß sowohl Analog- als auch Digitalrechner (und Hybridrechner) Verwendung finden konnten^{*}. Da in allen Fällen eine Reihe von rechentechnischen Details zu beachten ist, scheint die Angabe wichtiger Literaturstellen in diesem Fall zielführender als die Beschreibung teilweise heterogener Details.

a) Analogrechner. Eine der ersten erfolgreichen Berechnungen wichtiger leistungselektronischer Schaltungen, nämlich für eine dreiphasige Brücke mit Phasenanschnitt, dürfte in [2.12] beschrieben worden sein. Die für die verschiedenen Zeitbereiche, die durch das Zünden und Kommutieren der Ventile bestimmt werden, geltenden verschiedenen mathematischen Systemgleichungen werden durch monostabile Multivibratoren realisiert. Diese sind mit der Netzfrequenz-Zeitbasis entsprechend synchronisiert und schalten in den erforderlichen Zeitpunkten die verschiedenen Verstärker des Analogrechners zu bzw. weg. Zu einer leichten Realisierbarkeit werden verschiedene leicht zu vertretende Vereinfachungen vorgenommen, die im Detail in [2.12] beschrieben werden.

Weitere Publikationen über Analogrechneranwendungen in der Leistungselektronik fanden sich häufig in der Zeitschrift Elektrie, z. B. [2.13]...[2.15]. Eine umfangreiche Literaturliste über Anwendungen von Analogrechnern in der Elektrotechnik erschien in [2.16]. Hierin findet man auch Angaben zur Hybridrechentechnik. Spezielle Anwendungen bei der Antriebstechnik liegen in [2.17] vor.

b) Digitalrechner (digitale Simulation). Für die Berechnung am Digitalrechner wurden eigene Computerprogramme geschaffen, um die abschnittsweise Berechnung für die Zeitintervalle zwischen den Änderungen der Leitzustände und den Übergang ins nächste Intervall auf effiziente Weise zu ermöglichen. Hiebei müssen die Kontinuitätsbedingungen beachtet werden (Ströme in Induktivitäten und Spannungen an Kondensatoren stetig); weiters darf sich aus Gründen der Stabilität des Rechenprogramms bzw. der Berechnung der Widerstand der Ventile im

^{*}Heute werden überwiegend Digitalrechner verwendet, weil der seinerzeitige Vorteil der Analogrechner bezüglich Rechengeschwindigkeit zufolge der Zunahme an Rechenleistung digitaler Anlagen heute nicht mehr relevant ist.

leitenden und gesperrten Zustand bei manchen Programmen maximal um den Faktor 10^5 unterscheiden.

Auf dem Gebiet der digitalen Simulation hat sich eine eigene Bezeichnungsweise herausgebildet; es existiert eine große Zahl allgemeiner bzw. auf spezielle Anwendungen bezogener Literatur, wovon einige Stellen, die anwendungsorientiert erscheinen, zitiert seien: $[2.20] \dots [2.47]$. Um den Zugang zur Literatur zu erleichtern, sollen hier zunächst einige allgemeine Ausdrücke eingeführt und dann ein einfaches Beispiel gebracht werden^{*}: Um zu gewährleisten, daß die das elektrische Netzwerk charakterisierenden Differentialgleichungen linear unabhängig sind, werden die Kreisstrombahnen durch Wahl eines sogenannten vollständigen Baumes (V. B.) eingeschränkt. Es handelt sich dabei um ein System von Netzwerkzweigen, bei dem die Knoten eindeutig und nur über den vollständigen Baum verbunden sind. Die Kreisstrombahn verläuft in sich geschlossen von einem freien Zweig über den V. B. (Abb. 2.30). Daraus folgt, daß die Anzahl der freien Zweige gleich der Anzahl der Kreisströme m ist. Es gilt

$$m = z - k + 1$$

wobei z Anzahl der Zweige, k Anzahl der Knoten.



Abb. 2.30. Beispiel einer leistungselektronischen Schaltung mit Bezeichnungsweisen der digitalen Simulation. F.Z. freier Zweig, V.B. vollständiger Baum, bestehend aus einzelnen Baumzweigen, i_{M_k} Kreisströme, Maschenströme (k = 1, 2, ...), i_k Zweigströme (k = 1, 2, ...)

Mit den Bezeichnungen aus Abb. 2.30 soll in die in der digitalen Simulation übliche Notation eingeführt werden:

Mit R_3 diskreter ohmscher Widerstand sowie $(R_i)_{i\neq 3}$ Darstellung der elektrischen Ventile durch veränderliche Widerstände, können wir schreiben

52

^{*}Bei heutigen Simulationsprogrammen sind die im folgenden beschriebenen Schritte automatisch implementiert.

2.1 Mathematische Grundlagen

$$\mathbf{i} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_{M} \leftrightarrow \begin{pmatrix} i_{1} \\ i_{2} \\ i_{3} \\ i_{4} \\ i_{5} \\ i_{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{M_{1}} \\ i_{M_{2}} \\ i_{M_{3}} \end{pmatrix}, \quad (2.158)$$

wobei *i* Vektor der Zweigströme, i_M Vektor der Maschenströme, *A* Zweig-Maschen-(Inzidenz)matrix sind; weiters benötigen wir im folgenden A_T , transponierte Zweigmaschenmatrix, d. h.,

$$(a_{ik})_T = a_{ki}$$

Für jede Kreisstrombahn läßt sich durch einen Spannungsumlauf eine lineare Differentialgleichung aufstellen. Die *m* Kreisstrombahnen liefern damit ein Differentialgleichungssystem, das allgemein wie folgt geschrieben werden kann:

$$\boldsymbol{e}_{M} = \boldsymbol{R}_{M} \cdot \boldsymbol{i}_{M} + \boldsymbol{L}_{M} \cdot \boldsymbol{i}_{M} + \boldsymbol{S}_{M} \cdot \boldsymbol{q}_{M}; \qquad \dot{\boldsymbol{q}}_{M} = \boldsymbol{i}_{M}. \tag{2.159}$$

q bedeutet die Ladung auf den Kondensatoren und S = 1/C die reziproke Kapazität, $\mathbf{R}_M, \mathbf{L}_M, \mathbf{S}_M$ sind die (Kreis-)Matrizen der ohmschen Widerstände, der Induktivitäten bzw. der reziproken Kapazitäten, \mathbf{e}_M ist der Vektor der eingeprägten Kreisspannungen.

Die Kreisgrößen (Index M) können durch folgende Beziehungen ermittelt werden:

$$\boldsymbol{e}_{M} = \boldsymbol{A}_{T} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_{z} \end{pmatrix}, \qquad (2.160)$$

$$\boldsymbol{R}_{M} = \boldsymbol{A}_{T} \begin{pmatrix} R_{1} & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \\ \vdots & R_{j} & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & R_{z} \end{pmatrix} \boldsymbol{A}, \qquad (2.161)$$

$$L_{M} = A_{T} \begin{pmatrix} L_{1} & & & \\ & \ddots & & & \\ & & L_{j} & \cdots & M_{jk} & \\ & & \vdots & & \vdots & \\ & & & M_{kj} & \cdots & L_{k} & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & L_{z} \end{pmatrix} A$$
(2.162)

2. Mathematische und elektrotechnische Grundlagen

und

$$S_{M} = A_{T} \begin{pmatrix} 1/C_{1} & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \\ \vdots & 1/C_{j} & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1/C_{z} \end{pmatrix} A.$$
(2.163)

、

Hiebei sind z Anzahl der Netzwerkzweige, m Anzahl der Kreisstrombahnen, e_i eingeprägte Spannung im Zweig j, R_j Widerstand im Zweig j, L_j Induktivität im Zweig j, C_j Kapazität im Zweig $j, M_{jk} = M_{kj}$ Gegeninduktivitäten zwischen den Zweigen j und k.

Hieraus folgt im speziellen Fall

$$\boldsymbol{e}_{M} = \boldsymbol{A}_{T} \begin{pmatrix} e_{1} \\ \vdots \\ e_{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E \\ E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.164)$$

Mit den Annahmen

$$R_1 = R_6 = 10^5 \Omega, \qquad R_2 = R_5 = 2 \Omega, \qquad R_4 = 0 \Omega$$

sowie R₃ allgemein (variabel), ohne speziellen Zahlenwert gegeben,

folgt aus Gl. (2.161)

Ebenso wird L_M mit Hilfe von Gl. (2.162) zu

berechnet. Einsetzen von Gln. (2.164)...(2.166) in Gl. (2.159) (mit $S_M = 0$, $q_M = 0$) erlaubt bereits eine systematische Vorgangsweise zur abschnittsweisen Berechnung von i_M auf Digitalrechnern [2.47].

2.2 Elektrotechnische Grundlagen

2.2.1 Allgemeines

Hier soll vorausgesetzt werden, daß die Grundlagen der Elektrotechnik weitgehend bekannt sind. Wir wollen daher nur einige Bereiche herausgreifen, die für die Leistungselektronik wichtig sind, aber in vielen Fällen in den allgemeinen Grundlagen höchstens gestreift werden. Vorher sollen noch Konventionen zu den Zählpfeilen erwähnt werden.

2.2.2 Spannungen und elektromotorische Kräfte (Zählpfeile und Definitionen)

Allgemein gilt

$$u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b, \tag{2.167}$$

wobei der Zählpfeil für u_{ab} bei Punkt *a* beginnt und zu Punkt *b* weist. Ebenso weist der Zählpfeil von e_{ab} von Punkt *a* nach Punkt *b*. Es gilt immer $u_{ab} = e_{ba}$; der Einfachheit halber soll hiebei nur jeweils ein Schaltelement betrachtet werden.



Abb. 2.31. Batterie und Transformatorwicklungen: Potentiale φ_i , Spannungen u_{ij} und elektromotorische Kräfte e_{kl} [e_{01} ist die (innere) Ursache (die EMK, physikalisch von 0 nach 1 gerichtet) für eine (äußere) Potentialdifferenz, die als "Gegengewicht" zur EMK von 1 nach 0 gerichtet ist.]

Dies kann man sich anschaulich z. B. an Hand der Batterie erklären: e_{01} ist die elektromotorische Kraft (EMK, gemessen in Volt, also physikalisch eine Span-

nung), die einen Transport der positiven Ionen derart bewirkt, daß Punkt 1 gegenüber Punkt 0 ein positives Potential erhält, wodurch die äußere Spannung an den Batterieklemmen $u_{10} = \varphi_1 - \varphi_0 \ge 0$ wird. e_{01} ist also sozusagen die Ursache, u_{10} die Wirkung.

Analoges gilt bei Transformatorwicklungen: Die Induktion zufolge des Faradayschen Induktionsgesetzes in einer Richtung innerhalb der Wicklung bewirkt, daß außen eine Spannung in der entgegengesetzten Richtung auftritt. Somit gilt hier

$$e_{01} = u_{10} = \varphi_1 - \varphi_0 \tag{2.168}$$

bzw.

$$e_{01} = -u_{01} = \varphi_1 - \varphi_0. \tag{2.169}$$

Man kann auch sagen, daß die äußere Spannung u_{10} der induzierten Spannung (EMK) e_{01} das Gleichgewicht halten muß.

2.2.3 Transformatoren

Als Konvention bei der Darstellung von Transformatoren in der Leistungselektronik gilt, daß parallel gezeichnete Wicklungen auf demselben Kern liegen. Das heißt also, tritt in einer Wicklung eine Spannung auf, so entsteht in allen parallel gezeichneten Wicklungen ebenso eine Spannung, die allerdings je nach Wicklungszahl und -sinn eine andere Größe und Polarität haben kann. Weiters wird bei den Zeichnungen meist darauf geachtet, daß Phasenverschiebungen zwischen den Spannungen von Wicklungen verschiedener Kerne durch entsprechende Verdrehung der einzelnen Wicklungssymbole angedeutet werden. Als Alternative wird der Wicklungssinn durch Punkte an der Wicklung gekennzeichnet (vgl. Abschnitt 11.2).

Eine spezielle Transformatorart, nämlich der Spartransformator (Abb. 2.32), wird speziell bei selbstgeführten Wechselrichtern verwendet (vgl. Abschnitte 4.3 und 16.1).



Abb. 2.32. Spartransformator

Wird von außen z. B. eine Spannung $u_{10} = U_B$ angelegt und gilt für die Wicklungszahlen $w_1 = w_2$, so wird zufolge des gemeinsamen Kernes

$$u_{12} = 2u_{10} = 2U_B. (2.170)$$

2.2 Elektrotechnische Grundlagen

2.2.4 Drehstromsysteme – Verhalten bei Oberschwingungen

Wie in Abschnitt 2.1.1.3.2 bereits gezeigt, tritt auf der Netzseite (Primärseite) einer leistungselektronischen Schaltung ein mit Oberschwingungen behafteter Strom auf. Nehmen wir nun ein Amplitudenspektrum z. B. nach Abb. 2.8 (oder Abb. 2.12) an, so sehen wir, daß dort nur ungeradzahlige Harmonische auftreten. Im allgemeinen Fall (siehe Kapitel 4 und 6, z. B. Abb. 6.29) treten aber auch geradzahlige Oberschwingungen auf, was im folgenden berücksichtigt werden soll:

$$i_x = c_0 + c_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + c_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + c_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + c_4 \sin(4\omega t + \varphi_4) + c_5 \sin(5\omega t + \varphi_5) + \cdots, \quad (2.171)$$

wobei die c_i die Dimension eines Stromes haben. $c_0 \text{ muß} = 0$ sein, falls zwischen der Leistungselektronik (mit Last) und der Generatorseite ein Transformator liegt (vgl. Abschnitte 4.2 und 6.6.1 sowie 6.6.2).



Abb. 2.33. Zeigerdiagramme zur Zusammensetzung der Linienströme aus den Phasenströmen am Beispiel der 1., 3. und 5. Harmonischen

Zufolge der Phasenverschiebungen in den beiden anderen Wicklungen treten dort folgende Ströme auf:

$$i_{y} = c_{1} \sin(\omega t + \varphi_{1} - 2\pi/3) + c_{2} \sin(2\omega t + \varphi_{2} - 2 \cdot 2\pi/3) + c_{3} \sin(3\omega t + \varphi_{3} - 3 \cdot 2\pi/3) + c_{4} \sin(4\omega t + \varphi_{4} - 4 \cdot 2\pi/3) + c_{5} \sin(5\omega t + \varphi_{5} - 5 \cdot 2\pi/3) + \cdots$$
 (2.172)

und

2. Mathematische und elektrotechnische Grundlagen

$$i_{z} = c_{1} \sin(\omega t + \varphi_{1} - 4\pi/3) + c_{2} \sin(2\omega t + \varphi_{2} - 2 \cdot 4\pi/3) + c_{3} \sin(3\omega t + \varphi_{3} - 3 \cdot 4\pi/3) + c_{4} \sin(4\omega t + \varphi_{4} - 4 \cdot 4\pi/3) + c_{5} \sin(5\omega t + \varphi_{5} - 5 \cdot 4\pi/3) + \cdots, \quad (2.173)$$

was sich einfach durch Verschiebung der Zeitbasis, also Ersetzen von ωt durch $\omega t - 2\pi/3$ bzw. $\omega t - 4\pi/3$, in allen Termen von i_x ergibt. Man sieht hieraus z. B., daß alle 3. Harmonischen gleichphasig werden (Abb. 2.33).



Abb. 2.34. Schaltungsvarianten der Dreiphasensysteme. *a* Sternschaltungen ohne Nulleiter, *b* mit Nulleiter, *c* Kombination mit Dreieckschaltung, *LE* leistungselektronische Schaltung, *V* selektives Voltmeter zur Messung von Spannungsharmonischen, die durch Stromharmonische in den Verbindungsleitungen verursacht werden

Sind die Wicklungen x, y, z in Stern mit Nulleiter geschaltet, treten auch in den Zuleitungen die Wicklungsströme unmittelbar auf. Bei Dreieckschaltung ergibt sich in den äußeren Zuleitungen (Linien) jeweils die Differenz zweier Ströme, z. B.

$$i_R = i_x - i_y,$$

woraus sich nach mathematischer Umformung bzw. durch Betrachtung des Zeigerdiagramms (Abb. 2.33) ergibt:

$$i_{R} = \sqrt{3}c_{1}\sin(\omega t + \varphi_{1} + \pi/6) + \sqrt{3}c_{2}\sin(2\omega t + \varphi_{2} - \pi/6) + \sqrt{3}c_{4}\sin(4\omega t + \varphi_{4} + \pi/6) + \sqrt{3}c_{5}\sin(5\omega t + \varphi_{5} - \pi/6) + \cdots$$
(2.174)

Man kann sich leicht überlegen, daß alle Harmonischen mit den Ordnungszahlen 3n (n = 1, 2, 3, ...) wegfallen. Analoge Ausdrücke ergeben sich für i_S und i_T , wobei auch hier alle Harmonischen der Ordnung 3n zu null werden.

Man sieht, daß in erster Näherung bei Dreieckschaltung in den Zuleitungen keine 3. Harmonischen auftreten, da sie in den Dreieckswicklungen praktisch kurzgeschlossen werden. Bei Sternschaltung mit Nulleiter fließen sie jedoch gleichsinnig durch letzteren. Gleiches gilt für alle Harmonischen mit Ordnungszahlen 3n, n = 1, 2, 3, ...

Die verschiedenen Schaltungen (Abb. 2.34) sind deshalb auf Grund der entsprechenden Vorschriften mit unterschiedlichen Stromrichterleistungen belastbar, wie in Abschnitt 6.1.2 angeführt wird, d. h., Dreieckschaltungen dürfen höhere Stromrichterleistungen aufweisen.

2.2.5 Leistungsarten und Kennwerte nichtsinusförmiger Ströme und Spannungen

Eng zusammenhängend mit dem Betrieb leistungselektronischer Schaltungen am Netz ist selbstverständlich der Begriff von Wirk- und Scheinleistung, wobei hier noch Blind- und Verzerrungsleistung berücksichtigt werden sollen. Zwar trägt die Verzerrungsleistung nicht zum Transport von Energie bei und könnte deshalb als Blindleistung bezeichnet werden; die Blindleistung wird aber meist nur für rein sinusförmige Spannungen und Ströme derselben Frequenz definiert. Um hier mathematisch klare Verhältnisse zu schaffen, hat es sich in der Leistungselektronik eingebürgert, die Verzerrungsleistung, die im folgenden abgeleitet werden soll, separat zu behandeln. Die Motivation dafür wird auch an Hand eines Beispieles verdeutlicht werden. Zunächst sollen jedoch die Effektivwerte nichtsinusförmiger Spannungen und Ströme (oft als Mischspannungen bzw. -ströme bezeichnet) speziell am Beispiel des Stromes berechnet werden.

A. Effektivwerte

Die Definition des Effektivwertes lautet

$$I = I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{0}^{T} i^{2}(t) dt}.$$
 (2.175)

i(t) sei als Fouriersche Reihe dargestellt:

2. Mathematische und elektrotechnische Grundlagen

$$i = i_0 + i_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + i_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \cdots$$
 (2.176)

mit der Periode

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.\tag{2.177}$$

Einsetzen in die Definitionsgleichung bringt ein Integral über quadratische Glieder der Form

$$i_v^2 \sin^2(v \omega t + \varphi_v)$$

und über Kreuzprodukte

$$i_i i_k \sin(j\omega t + \varphi_i) \sin(k\omega t + \varphi_k); \qquad k \neq j,$$

wobei letztere wegen der Orthogonalität der Kreisfunktionen nach Integration über die Periode T den Wert 0 ergeben. Man erhält somit, da

$$\sin^2 v \omega t + \cos^2 v \omega t = 1$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} (\sin^2 v \omega t + \cos^2 v \omega t) d\omega t = 1$$

und, weil sowohl $\sin^2 v \omega t$ als auch $\cos^2 v \omega t$ im Intervall $[0, 2\pi]$ denselben Flächeninhalt aufweisen (beide sind ja nur in Richtung ωt -Achse verschoben und v sei ganzzahlig),

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \sin^2 v \, \omega t \, d \, \omega t = \frac{1}{2} \tag{2.178}$$

bzw.

$$\frac{1}{T} \int_{0}^{T} i_{v}^{2} \sin^{2} v \, \omega t \, dt = \frac{i_{v}^{2}}{2}.$$
(2.179)

Somit wird

$$I = I_{eff} = \sqrt{i_0^2 + \frac{i_1^2}{2} + \frac{i_2^2}{2} + \cdots}.$$
 (2.180)

Da bekanntlich bei einem rein sinusförmigen Strom, also auch bei jeder Harmonischen für sich betrachtet,

$$I_{\nu} = I_{\nu,eff} = \frac{i_{\nu}}{\sqrt{2}}$$
 (2.181)

und beim Gleichstrom

$$I_0 = I_{0,eff} = i_0 \tag{2.182}$$



http://www.springer.com/978-3-211-89213-8

Leistungselektronik Ein Handbuch Band 1 / Band 2 Zach, F. 2010, LXXXVI, 2787 S. In 2 Bänden, nicht einzeln erhaeltlich., Hardcover ISBN: 978-3-211-89213-8