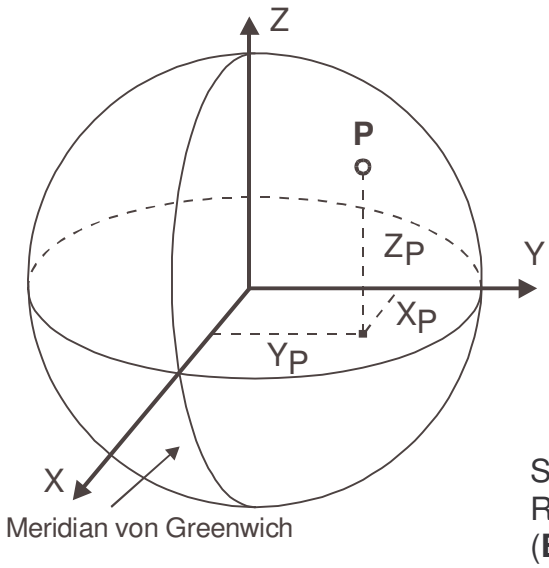
3 Geodätische Grundlagen

3.1 Geodätische Bezugssysteme und Bezugsflächen

3.1.1 Räumliches Bezugssystem

Dreidimensionales Koordinatensystem mit gegebener Orientierung zur Bestimmung der Raumkoordinaten von Punkten.



WGS 84 = **W**orld **G**eodetic **S**ystem 1984

Bezugsfläche: WGS 84 - Ellipsoid

Koordinatenursprung auf +/- 1m im Massenmittelpunkt der Erde

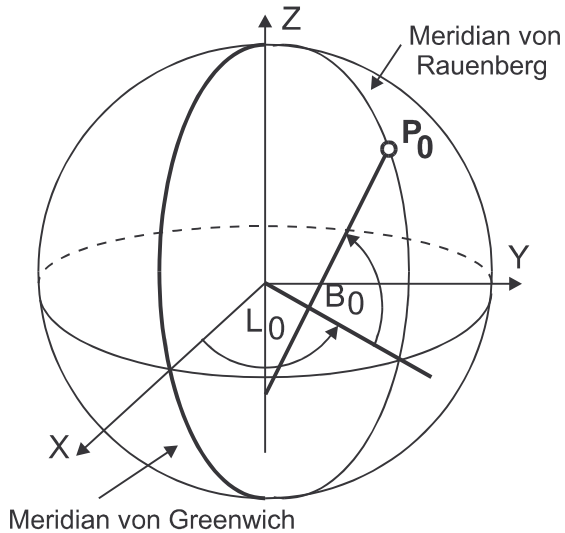
X-Achse durch den Meridian von Greenwich
Y-Achse rechtwinklig nach Osten auf der X-Achse
Z-Achse mittlere Umdrehungsachse der Erde

Seit 1989 realisiert durch das Europäische Referenznetz **ETRS 89**
(**E**uropean **T**errestrial **R**eference **S**ystem19**89**)

3.1.2 Lagebezugssystem

Auf einer Bezugsfläche, meist einem Rotationsellipsoid, festgelegtes System von Lagekoordinaten.
Im amtlichen Vermessungswesen der Bundesrepublik Deutschland benutztes Lagebezugssystem:

DHDN = Deutsches Hauptdreiecksnetz



Bezugsfläche: Bessel-Ellipsoid

Zentralpunkt:
TP Rauenberg L_0, B_0
Orientierung:

Dreieckseite
Rauenberg - Berlin, Marienkirche

Abbildung:
Gauß-Krüger-Projektion für Folgenetze

3.1.3 Höhenbezugssystem

In der Regel durch eine Höhenbezugsfläche und ihren Abstand zu einem Zentralpunkt definiertes System

3.1.4 Bezugsfläche

Mathematisch, physikalisch oder mittels vorhandener Festpunktfelder definierte Fläche, auf die sich Lagekoordinaten, Höhen oder Schwerepotenziale von Vermessungspunkten beziehen.

Bezugsflächen für Lagevermessungen oder räumliche Vermessungen

Rotationsellipsoid

Mittleres Erdellipsoid: Ersatzfläche für das gesamte Geoid
Ellipsoidisches geodätisches Referenzsystem (GRS 80)

Lokal bestanschließendes Erdellipsoid: Ersatzfläche für einen Teil des Geoids

Referenzellipsoid: Rotationsellipsoid, das als Bezugsfläche für eine Landesvermessung dient (z. B. Bessel-Ellipsoid)

Parameter des Erdellipsoids:

Ellipsoid		Bessel	GRS80	Krassowski
große Halbachse	*a*	6 377 397,155 m	6 378 137,00 m	6 378 245 m
kleine Halbachse	*b*	6 356 078,963 m	6 356 752,314 m	6 356 863,019 m
Abplattung	*f*	1: 299,1528153	1: 298,257 223 563	1:298,3

Abplattung

$$f = \frac{(a-b)}{a}$$

Erste numerische Exzentrizität

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

Zweite numerische Exzentrizität

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

Meridiankrümmungshalbmesser

$$M = \frac{a^2 \cdot b^2}{\sqrt{(a^2 \cdot \cos^2 B + b^2 \cdot \sin^2 B)^3}} = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2 \cdot \sin^2 B)^3}}$$

Querkrümmungshalbmesser

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cdot \cos^2 B + b^2 \cdot \sin^2 B}} = \frac{a}{\sqrt{(1-e^2 \cdot \sin^2 B)}}$$

Kugel als Lagebezugsfläche

Bezugsfläche der Lagevermessung als Ersatz für ein Referenzellipsoid, für Vermessungen in kleineren Ländern

Erdkugel Radius R

Bildkugel Radius der Soldnerschen Bildkugel $R_S = N$
Radius der Gaußschen Schmiegungskugel $R_G = \sqrt{M \cdot N}$

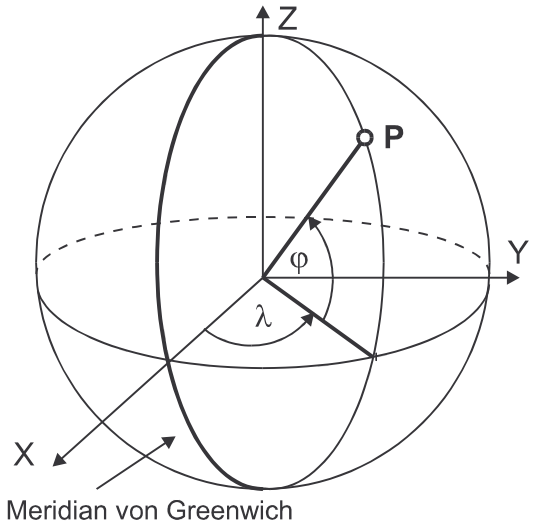
Ebene als Lagebezugsfläche

Bezugsfläche der Lagevermessung als Ersatz für ein Referenzellipsoid oder für eine Bildkugel, für Vermessungen in einem Gebiet bis zu 10 x10 km²

Höhenbezugsfläche siehe 9.1 Niveauflächen und Bezugsflächen

3.2 Geodätische Koordinatensysteme

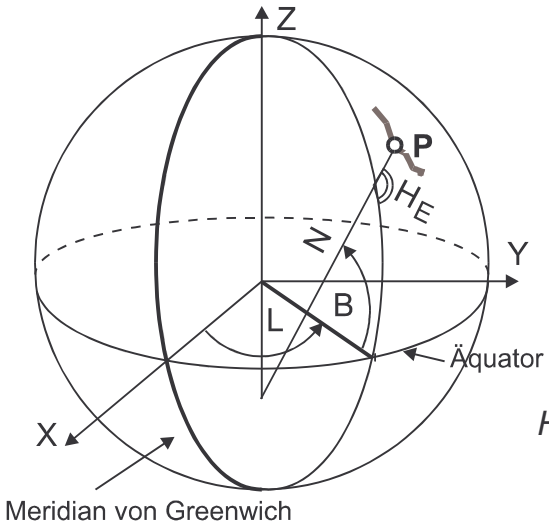
3.2.1 Sphärisches geographisches Koordinatensystem



φ = *Geographische Breite*

λ = *Geographische Länge*

3.2.2 Ellipsoidisches geographisches Koordinatensystem

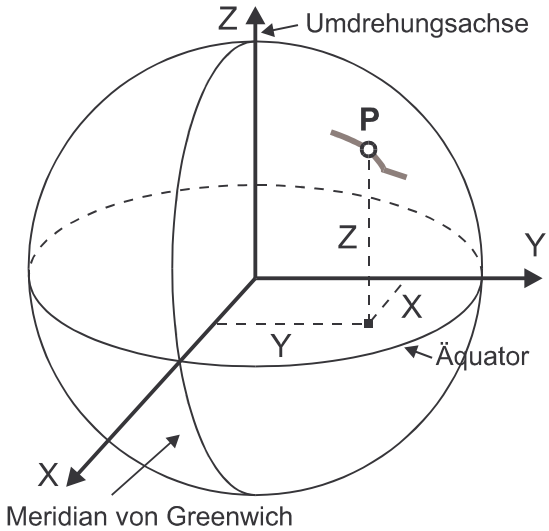


B = *Ellipsoidische Breite*
Winkel, den der in der Meridianebene liegende Normalkrümmungshalbmesser N mit der Äquatorebene bildet

L = *Ellipsoidische Länge*
Winkel, den die elliposidische Merdianebene eines Punktes mit der geodätischen Nullmeridianebene bildet

H_E = *Ellipsoidische Höhe*
Punkthöhe über dem Ellipsoid

3.2.3 Ellipsoidisches kartesisches Globalsystem



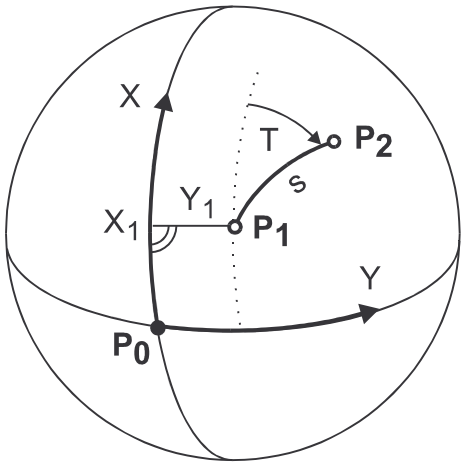
$$X = (N + H_E) \cdot \cos B \cdot \cos L$$

$$Y = (N + H_E) \cdot \cos B \cdot \sin L$$

$$Z = N \cdot \sin B \cdot \frac{b^2}{a^2} + H_E \cdot \sin B$$

a = *große Halbachse*
b = *kleine Halbachse*
N = *Normalkrümmungshalbmesser*

3.2.4 Rechtwinklig-sphärisches Koordinatensystem

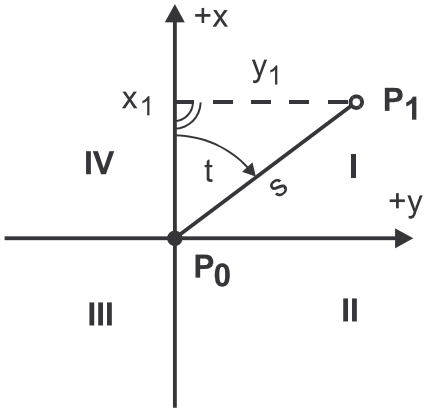


Die Abszissenachse ist ein Meridian durch den Koordinatenanfangspunkt P_0.

Die **Ordinate Y** eines Punktes P_i ist das sphärische Lot von P_i auf die Abszissenachse,
die **Abszisse X** von P_i ist der Meridianbogen vom Koordinatenanfangspunkt P_0 bis zum Ordinatenlotfußpunkt.

T = Sphärischer Richtungswinkel

3.2.5 Rechtwinklig-ebenes Koordinatensystem

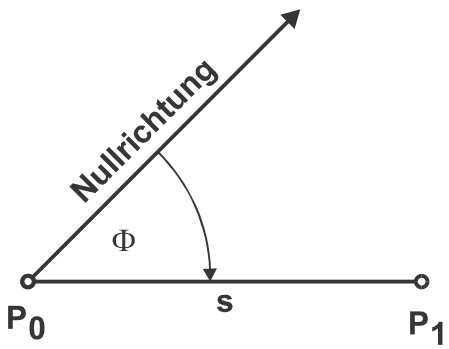


I,II,... Quadranten

t = ebener Richtungswinkel

s = Strecke

3.2.6 Polarkoordinaten



Φ = Polarwinkel

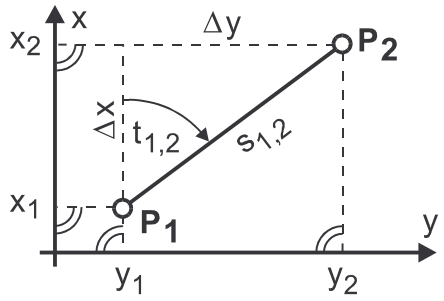
Anmerkung:
Ist die Nullrichtung = Abszissenachse, so ist der Polarwinkel = Richtungswinkel

s = Strecke

4 Vermessungstechnische Grundaufgaben

4.1 Einfache Koordinatenberechnungen

4.1.1 Richtungswinkel und Strecke



Gegeben: *Koordinaten der Punkte* $P_1(y_1, x_1)$ *und* $P_2(y_2, x_2)$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Richtungswinkel

$$t_{1,2} = \arctan \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Quadrant	t	Δy	Δx	Funktion auf Taschenrechner: arctan = $\tan^{-1}$
I	t	+	+	+ arctan
II	t + 200 gon	+	-	- arctan
III	t + 200 gon	-	-	+ arctan
IV	t + 400 gon	-	+	- arctan

Formel für quadrantengerechten Richtungswinkel nach JOECKEL

$$\Delta y = y_2 - y_1 + 1 \cdot 10^{-a}$$
$$\Delta x = x_2 - x_1 + 1 \cdot 10^{-a}$$

a entspricht der Stellenzahl, mit der gerechnet wird.
(z.B. a = 8 bei achtstelliger Genauigkeit)

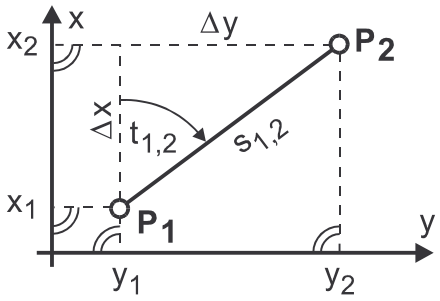
$$t[rad] = \arctan \frac{\Delta y}{\Delta x} + \pi - (1 + sgn\Delta x) \cdot sgn\Delta y \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$t[gon] = \frac{200}{\pi} \arctan \frac{\Delta y}{\Delta x} + 200 - (1 + sgn\Delta x) \cdot sgn\Delta y \cdot 100$$

Für Taschenrechner mit voreingestellter Einheit ”Gon”

$$t[gon] = \arctan \frac{\Delta y}{\Delta x} + 200 - (1 + sgn\Delta x) \cdot sgn\Delta y \cdot 100$$

Richtungswinkel und Strecke



Gegeben: *Koordinaten der Punkte*
$P_1(y_1, x_1)$ *und* $P_2(y_2, x_2)$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Strecke

$$s_{1,2} = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2}$$

Probe: $\Delta y + \Delta x = (y_2 + x_2) - (y_1 + x_1) = s \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(t_{1,2} + 50\ \text{gon})$

Genauigkeit:

Standardabweichung eines Richtungswinkels

$$s_t[\text{rad}] = \sqrt{\frac{s_P}{s}}$$

s_P = *Standardabweichung eines Punktes*
s = *Strecke*

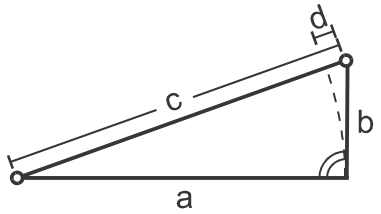
Standardabweichung einer Strecke nach PYTHAGORAS

$$s_s = \sqrt{\left(\frac{\Delta y}{s}\right)^2 \cdot \left(s_{y_1}^2 + s_{y_2}^2\right) + \left(\frac{\Delta x}{s}\right)^2 \cdot \left(s_{x_1}^2 + s_{x_2}^2\right)}$$
$$s_s = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} \text{ für } s_1 = s_{y_1} = s_{x_1} \text{ und } s_2 = s_{y_2} = s_{x_2}$$

s_{x_i}, s_{y_i} = *Standardabweichung der Koordinaten eines Punktes*

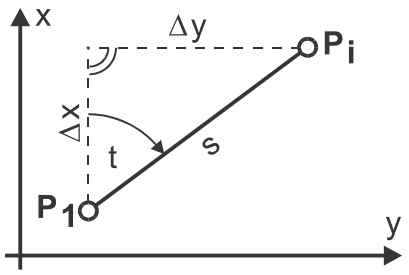
Die Berechnung von **Richtungswinkel** und **Strecke** ist auch mit der Tastenfunktion **R - P** eines Taschenrechners möglich. Die Rechenfolge ist aus der Gebrauchsanweisung des Taschenrechners zu entnehmen.

Näherungsformel für Spannmaßberechnung



$$c = a + d \qquad d \approx \frac{b^2}{2a} \qquad a \approx c\ ;\ b \text{ klein}$$

4.1.2 Polarpunktberechnung



Gegeben: *Koordinaten des Punktes* $P_1(y_1, x_1)$
Richtungswinkel t
Strecke s

Koordinatenunterschiede

$$\Delta y = s \cdot \sin t \qquad \Delta x = s \cdot \cos t$$

Probe: $s^2 = \Delta y^2 + \Delta x^2$

Koordinaten des Punktes P_i

$$y_i = y_1 + \Delta y \qquad x_i = x_1 + \Delta x$$

Die **Polarpunktberechnung** kann auch mit der Tastenfunktion **P - R** eines Taschenrechners erfolgen. Die Rechenfolge ist der Gebrauchsanweisung des Taschenrechners zu entnehmen.

Genauigkeit:

Standardabweichung der Koordinaten

$$s_y = \sqrt{\left(\frac{\Delta y}{s} \cdot s_s\right)^2 + (\Delta x \cdot s_\alpha[\text{rad}])^2} \qquad s_x = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{s} \cdot s_s\right)^2 + (\Delta y \cdot s_\alpha[\text{rad}])^2}$$

Standardabweichung eines Punktes

$$s_P = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$$

$$s_P = \sqrt{s_s^2 + (s \cdot s_\alpha[\text{rad}])^2}$$

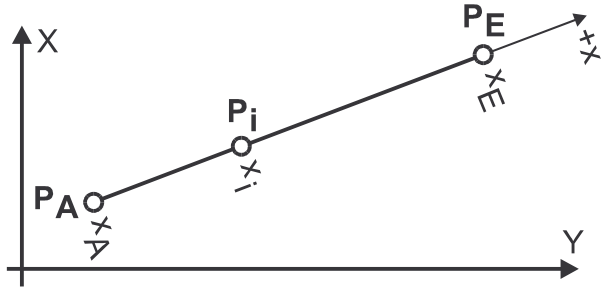
Standardabweichung der Querabweichung

$$s_q = s \cdot s_\alpha[\text{rad}]$$

$s_t = s_\alpha$ = *Standardabweichung des Richtungswinkels*
s_s = *Standardabweichung einer Strecke*
s_y, s_x = *Standardabweichung der Koordinaten eines Punktes*

4.1.3 Kleinpunktberechnung

Kleinpunkt in der Geraden



Gegeben: *Koordinaten der Punkte* $P_A(Y_A, X_A)$ *und* $P_E(Y_E, X_E)$
Abszissen im örtlichen Koordinatensystem x_A, x_i, x_E
$s = x_E - x_A =$ *gemessene Strecke*
$S = \sqrt{(Y_E - Y_A)^2 + (X_E - X_A)^2}$ = *gerechnete Strecke*

Parameter

$$o = \frac{Y_E - Y_A}{s} \qquad a = \frac{X_E - X_A}{s}$$

Probe:

$a^2 + o^2 \approx 1$

$Y_E = Y_A + o \cdot s$ $\qquad$ $X_E = X_A + a \cdot s$

Maßstabsfaktor

$$m = \frac{S}{s}$$

Koordinaten der Punkte P_i

$$Y_i = Y_A + o \cdot (x_i - x_A) \qquad X_i = X_A + a \cdot (x_i - x_A)$$

Probe:
$[Y_i] = n \cdot Y_A + o \cdot ([x_i] - n \cdot x_A)$ $\qquad$ $[X_i] = n \cdot X_A + a \cdot ([x_i] - n \cdot x_A)$

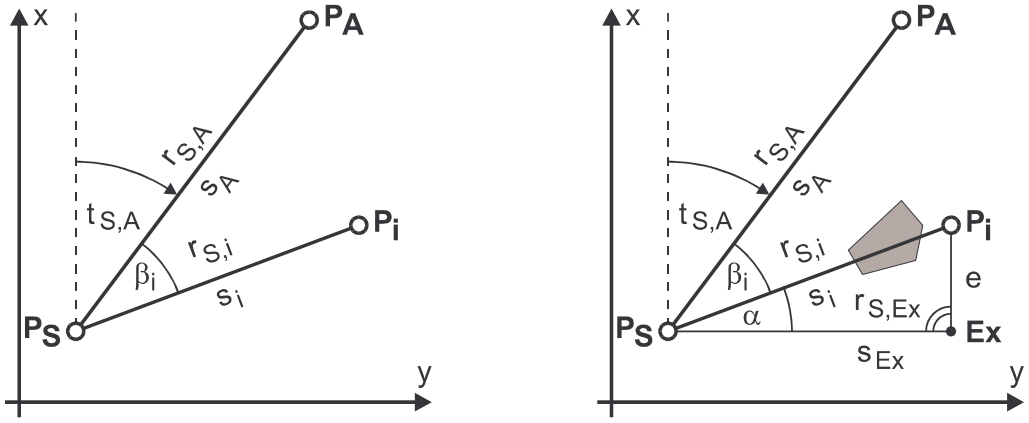
n = *Anzahl der Punkte* P_i

oder

Berechnung von Y_E, X_E von P_A über P_i

7.2 Einzelpunktbestimmung

7.2.1 Polare Punktbestimmung



Gegeben: *Koordinaten des Standpunktes* $P_S(y_S, x_S)$
Koordinaten des Anschlusspunktes $P_A(y_A, x_A)$

Gemessen: *Horizontalrichtungen* $r_{S,A}$, $r_{S,i}$ *bzw.* $r_{S,A}$, $r_{S,Ex}$
Horizontalstrecken s_A , s_i *bzw.* s_A , s_{Ex} , e

Anschlussrichtungswinkel $t_{S,A}$ aus Koordinaten berechnen

$$t_{S,A} = \arctan \frac{y_A - y_S}{x_A - x_S}$$

Horizontalwinkel

$$\boxed{\beta_i = r_{S,i} - r_{S,A}}$$

$$\boxed{\beta_i = r_{S,EX} - r_{S,A} - \alpha}$$

$$\boxed{\alpha = \arctan \frac{e}{s_{EX}}}$$

$$\boxed{s_i = \sqrt{e^2 + s_{EX}^2}}$$

Richtungswinkel

$$\boxed{t_{S,i} = t_{S,A} + \beta_i}$$

Maßstab s_A gemessen: $m = \dfrac{\bar{s}_A}{s_A}$
Strecke $\bar{s}_A$ aus Koordinaten berechnen
s_A nicht gemessen: $m = 1$

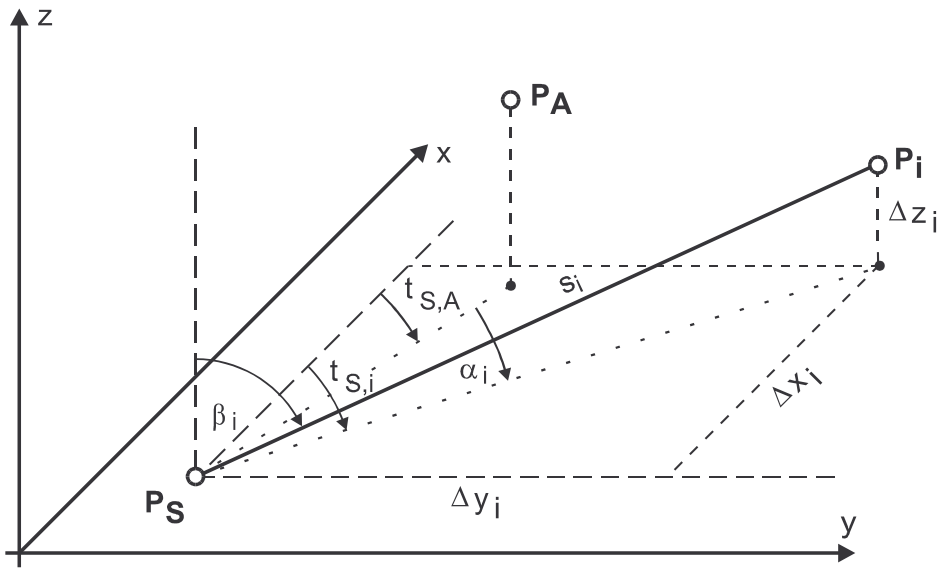
Koordinaten des Neupunkts

$$\boxed{y_i = y_S + s_i \cdot m \cdot \sin t_{S,i}} \qquad \boxed{x_i = x_S + s_i \cdot m \cdot \cos t_{S,i}}$$

Genauigkeit:

Standardabweichung der Koordinaten und Standardabweichung eines Punktes P_i
siehe 4.1.3 Polarpunktberechnung

7.2.2 Dreidimensionale polare Punktbestimmung



Gegeben: *Koordinaten der Punkte* $P_S(y_S, x_S)$, $P_A(y_A, x_A)$

Gemessen: *Schrägstrecke* s_i
Horizontalwinkel α_i
Zenitwinkel β_i

Anschlussrichtungswinkel $t_{S,A}$ aus Koordinaten berechnen

$$t_{S,A} = \arctan \frac{y_A - y_S}{x_A - x_S}$$

Richtungswinkel

$$t_{S,i} = t_{S,A} + \alpha_i$$

Koordinaten des Neupunkts

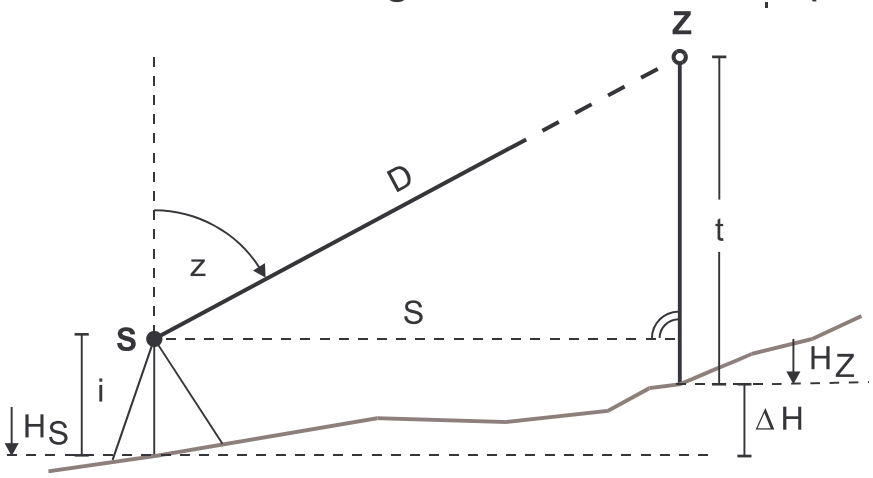
$$\Delta y_i = s_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin t_{S,i} \qquad y_i = y_S + \Delta y_i$$

$$\Delta x_i = s_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos t_{S,i} \qquad x_i = x_S + \Delta x_i$$

$$\Delta z_i = s_i \cdot \cos \beta_i \qquad z_i = z_S + \Delta z_i$$

9.4 Trigonometrische Höhenbestimmung

9.4.1 Höhenbestimmung über kurze Distanzen (< 250m)



Gemessen: *Zenitwinkel z*
Distanz D oder Strecke S
Instrumentenhöhe i
Zieltafelhöhe t

Höhenbestimmung mit Distanz *D*

$$\Delta H = D \cdot \cos z + i - t$$

Höhenbestimmung mit Strecke *S*

$$\Delta H = S \cdot \cot z + i - t$$

Höhenbestimmung des Standpunktes $H_S = H_Z - \Delta H$

Höhenbestimmung des Zielpunktes $H_Z = H_S + \Delta H$

Genauigkeit:

Standardabweichung des Höhenunterschiedes ΔH

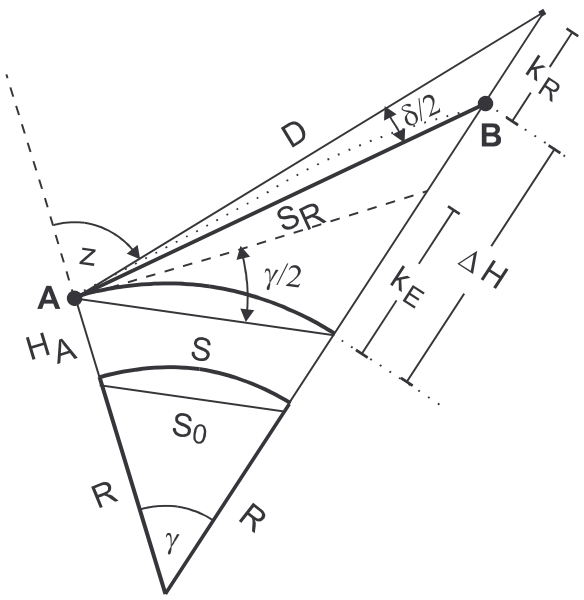
$$s_{\Delta H} = \sqrt{(\cot z \cdot s_S)^2 + \left(\frac{S}{\sin^2 z} \cdot s_z[\text{rad}]\right)^2 + s_i^2 + s_t^2}$$

s_S = *Standardabweichung der Strecke S*
s_z = *Standardabweichung des Zenitwinkels*
s_i = *Standardabweichung der Instrumentenhöhe*
s_t = *Standardabweichung der Zieltafelhöhe*

9.4.2 Höhenbestimmung über große Distanzen

Einseitige Zenitwinkelmessung

für Strecken < 10 km: $D = S_R$ und $S = S_0$



Gemessen: *Zenitwinkel z*
Distanz D
Instrumentenhöhe i
Zieltafelhöhe t

Einfluss der Erdkrümmung

$$k_E \approx \frac{S^2}{2R} \qquad \frac{\gamma}{2}[\text{rad}] = \frac{S}{2R}$$

Einfluss der Refraktion

$$k_R \approx -\frac{k \cdot S^2}{2R} \qquad \frac{\delta}{2}[\text{rad}] = \frac{k \cdot S}{2R}$$

R = Erdradius 6380 km
k = Refraktionskoeffizient
$k \approx 0{,}13$

Höhenbestimmung mit Distanz *D*

$$\Delta H = D \cdot \cos z + \frac{D^2 \cdot \sin^2 z}{2R} \cdot (1 - k) + i - t$$

Höhenbestimmung mit Strecke *S* im Bezugshorizont

$$\Delta H = \left(1 + \frac{H_A}{R}\right) \cdot S \cdot \cot z + \frac{S^2}{2R \cdot \sin^2 z} \cdot (1 - k) + i - t$$

Genauigkeit:

Standardabweichung des Höhenunterschiedes ΔH

$$s_{\Delta H} = \sqrt{(\cos z \cdot s_D)^2 + (D \cdot \sin z \cdot s_z[\text{rad}])^2 + \left(\frac{D^2}{2R} \cdot s_k\right)^2 + s_i^2 + s_t^2}$$

s_D = *Standardabweichung der Distanz D*
s_z = *Standardabweichung des Zenitwinkels*
s_i = *Standardabweichung der Instrumentenhöhe*
s_t = *Standardabweichung der Zieltafelhöhe*
s_k = *Standardabweichung des Refraktionskoeffizienten*