Mengen und Zahlenarten

Wir beginnen ganz vorsichtig, indem wir uns mit zwei für die Mathematik grundlegenden Dingen befassen, mit Mengen und mit Zahlen.

1.1 Mengen

Zu Anfang eines Kurses frage ich manchmal die Studenten, auf welche mathematischen Objekte sie wohl zuerst in ihrem Leben gestoßen sind. Die Antwort ist immer die gleiche: ob man Bauklötze zählt oder anfängt, sich für Hausnummern zu interessieren, in jedem Fall hat man es zuerst mit Zahlen zu tun. So naheliegend diese Antwort auch ist, sie ist leider ganz falsch, denn ohne es zu wissen begegnet jedes Kleinkind dem Prinzip der *Menge*. Unter den zahllosen Eindrücken, denen es ausgesetzt ist, beginnt es sehr früh zu selektieren und bildet Einheiten aus Dingen oder auch Menschen, die ihm zusammengehörig erscheinen. Vater und Mutter gehören irgendwie zusammen, auch Geschwister und Großeltern mögen dazukommen, und schon hat das Kind eine Menge gebildet, denn das heißt nur, daß wir verschiedene Objekte zu einer Einheit zusammenfassen. Deshalb hat Georg Cantor gegen Ende des neunzehnten Jahrhunderts Mengen folgendermaßen definiert.

1.1.1 Definition Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens – welche die Elemente der Menge genannt werden – zu einem Ganzen.

Ich werde mich jetzt nicht auf eine Diskussion darüber einlassen, was ein Objekt unseres Denkens sein mag. Für uns ist im Moment nur wichtig, daß man Mengen erhält, indem man verschiedene Elemente zusammenfaßt. Man kann daher Mengen dadurch beschreiben, daß man ihre Elemente angibt. So sind zum Beispiel die Menge aller Turnschuhe in einem bestimmten Raum oder die Menge aller Segelboote auf dem Bodensee durchaus zulässige und sinnvolle Mengen. Von größerer Bedeutung sind aber Mengen mit mathematisch interessanten Objekten. Wir schauen uns ein paar Beispiele solcher Mengen an und können uns dabei gleich überlegen, wie man Mengen aufschreibt.

1.1.2 Beispiele

(i)

$$A = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Diese Menge besteht offenbar aus den ersten vier natürlichen Zahlen und hat den Namen A. Die Form, eine Menge aufzuschreiben, indem man einfach sämtliche Elemente zwischen zwei geschweifte Klammern schreibt, heißt aufzählende Form.

(ii)

$$\begin{aligned} A &= \{x|x \text{ ist eine natürliche Zahl zwischen 1 und 4}\} \\ &= \{x; x \text{ ist eine natürliche Zahl zwischen 1 und 4}\}. \end{aligned}$$

Hier haben wir die gleiche Menge wie in Beispiel (i), nur anders geschrieben, indem eine Eigenschaft der Elemente beschrieben wird. Diese Schreibweise ist also so zu verstehen: A ist die Menge aller x, für die gilt, daß x eine natürliche Zahl zwischen 1 und 4 ist. Dabei spielt es keine Rolle, ob man einen senkrechten Strich, ein Semikolon oder vielleicht einen Doppelpunkt verwendet.

(iii)

$$A = \{1, \ldots, 4\}.$$

Manchmal verzichtet man auf die genaue Beschreibung einer Menge in der Annahme, daß jeder weiß, was gemeint ist. Man sollte aber auch wirklich nur in diesem Fall eine so laxe Schreibweise wählen, denn was kann man zum Beispiel unter der Menge

$$B = \{1, 7, 95, \ldots, 217\}$$

verstehen? Hier ist offenbar sehr unklar, welche Elemente durch die drei Punkte vertreten werden sollen.

(iv)

$$C = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Sie sehen nun die Menge der natürlichen Zahlen vor sich, auf die wir später noch zu sprechen kommen werden. Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Mengen hat sie unendlich viele Elemente.

(v)

$$D = \{A, \{2, 3\}, \{x|x \text{ ist ein Turnschuh}\}, C\}.$$

Wie viele Elemente hat die Menge D? Man neigt dazu, unendlich viele zu antworten, weil ja schon C unendlich viele Elemente vorweisen kann, aber das stimmt nicht. D hat nur vier Elemente, nämlich A, $\{2, 3\}$, $\{x|x \text{ ist ein Turnschuh}\}$ und C. Die Elemente von D sind also selbst wieder Mengen. Das schadet gar nichts, denn in unserer Definition 1.1.1 haben wir nur verlangt, daß *irgendetwas* zu einer Menge zusammengefaßt wird – warum also nicht vier Mengen zu Elementen einer fünften machen?

Wir sollten noch ein Zeichen einführen, das auf kurze Weise die Beziehung zwischen einem Element und einer Menge beschreibt.

1.1.3 Definition Ist A eine Menge und x ein Element von A, so schreibt man: $x \in A$. Ist x kein Element von A, so schreibt man $x \notin A$.

1.1.4 Beispiele Verwenden wir die Mengen aus 1.1.2, so gilt $1 \in A$ und $2 \in A$, aber $17 \notin A$. Dagegen ist $17 \in C$. Weiterhin ist $A \in D$ und $\{2, 3\} \in D$, aber $2 \notin D$ und $3 \notin D$.

Nun habe ich schon mehrmals eine Form zum Aufschreiben einer Menge benutzt, die eine eigene Definition verdient, nämlich die beschreibende Form.

1.1.5 Definition Ist E eine Eigenschaft, die ein Element haben kann oder auch nicht, so beschreibt man die Menge der E erfüllenden Elemente durch

$$A = \{x | x \text{ hat Eigenschaft } E\}.$$

Diese Form heißt beschreibende Form.

Beispiele für die beschreibende Form haben Sie schon in 1.1.2 (ii) und 1.1.2 (v) gesehen. Dabei war E die Eigenschaft, natürliche Zahl zwischen eins und vier bzw. ein Turnschuh zu sein.

Manchmal hat man eine recht große Menge gegeben, interessiert sich aber nur für einen Teil von ihr. So ist zum Beispiel die Menge der natürlichen Zahlen eine feine Sache, aber wenn Sie sie in einem Rechner speichern sollen, werden Sie feststellen, daß nur endlich viele Zahlen in Ihren Rechner passen, so daß Sie gezwungen sind, einen Teil der gesamten Zahlenmenge auszuwählen. Solche Teile haben den natürlichen Namen *Teilmenge*.

1.1.6 Definition Sind A und B Mengen, so heißt A Teilmenge von B, falls jedes Element von A auch Element von B ist. Man schreibt: $A \subseteq B$ und spricht: A ist Teilmenge von B, oder auch: A ist enthalten in B. Falls A keine Teilmenge von B ist, schreibt man: $A \not\subseteq B$.

Stellt man sich A und B als Ovale auf dem Papier vor, so zeigt Abbildung 1.1, was es heißt eine Teilmenge zu sein.

Offenbar ist jeder Punkt im inneren Oval A auch ein Punkt des großen Ovals B, das heißt $A \subseteq B$. Wir sehen uns aber noch ein paar Zahlenbeispiele an.

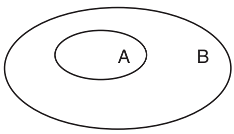


Abb. 1.1. Teilmengen

1.1.7 Beispiele

(i) Es sei $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Dann ist $A \subseteq B$. In Worten gesagt: jede gerade Zahl ist auch eine natürliche Zahl.
(ii) Es sei wieder $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, aber $C = \{3, 4, 5, 6, \ldots\}$. Dann ist $A \not\subseteq C$, denn $2 \in A$, aber $2 \notin C$.

Wie Sie sehen, muß man zum Nachweis der Teilmengeneigenschaft jedes Element aus der kleineren Menge daraufhin überprüfen, ob es auch in der größeren Menge liegt. Falls es auch nur ein Element aus A gibt, das nicht in B liegt, haben wir schon $A \not\subseteq B$ gezeigt. Man darf daraus aber nicht den vorschnellen Schluß ziehen, daß $B \subseteq A$ gilt; im allgemeinen folgt aus $A \not\subseteq B$ einfach gar nichts.

Noch ein Wort zum Teilmengensymbol $\subseteq$. Manche schreiben dafür auch $\subset$ und meinen genau das gleiche wie ich mit $\subseteq$. Andere wiederum benützen $\subset$, um zu beschreiben, daß zwar A Teilmenge von B ist, aber nicht $A = B$ gilt. In diesem Fall nennt man A eine echte Teilmenge von B. Für diesen Sachverhalt verwende ich allerdings, um die Verwirrung nicht noch größer zu machen, kein besonderes Zeichen.

Bevor wir eine Reihe von Folgerungen über Teilmengen notieren, möchte ich Ihnen noch eine ganz besondere Menge vorstellen. Stellen Sie sich vor, Sie fragen mich nach meinem Wissen über Mathematik. Dann kann ich Ihnen dies und das erzählen, und mein Wissen bildet eine Menge von Sätzen. Möchten Sie meinen Kenntnisstand über organische Chemie erfahren, so wird die neue Wissensmenge aus erheblich weniger Sätzen bestehen als die vorherige, und falls Sie mich über tibetanische Schriftzeichen examinieren, weiß ich gar nichts, die Menge meines Wissens ist leer. Um sich hier lästige Fallunterscheidungen zu ersparen und auch dann von einer Menge sprechen zu können, wenn keine Elemente vorhanden sind, betrachtet man auch die sogenannte leere Menge als zulässig, die überhaupt kein Element enthält. Man schreibt dafür $\emptyset$ oder auch $\{\}$.

Wir notieren nun:

1.1.8 Bemerkung

(i) Für jede Menge A ist $A \subseteq A$.
(ii) Für jede Menge A ist $\emptyset \subseteq A$.
(iii) Aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ folgt $A \subseteq C$.
(iv) Ist $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, dann folgt $A = B$.

Damit Sie sich langsam daran gewöhnen, werde ich diese Aussagen auch beweisen, obwohl sie einigermaßen intuitiv einsehbar sind.

Beweis

(i) Laut Definition 1.1.6 müssen wir zeigen, daß jedes Element $x \in A$ auch ein Element $x \in A$ ist, aber das ist klar.
(ii) Auch hier müssen wir zeigen, daß jedes Element der leeren Menge auch Element von A ist. Da die leere Menge aber keine Elemente hat, werden Sie schwerlich eines finden können, das *nicht* in A liegt. Folglich ist $\emptyset \subseteq A$.

(iii) Das Schema ist wieder dasselbe: wir müssen zeigen, daß jedes Element von A auch Element von C ist. Dazu nehmen wir irgendein beliebiges Element $x \in A$. Da A Teilmenge von B ist, folgt natürlich $x \in B$. Nun ist aber $B \subseteq C$ und somit gilt $x \in C$. Deshalb gilt für jedes $x \in A$ auch sofort $x \in C$, und das heißt $A \subseteq B$.

(iv) Offenbar sind zwei Mengen genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten. Wegen $A \subseteq B$ ist nun jedes Element von A auch Element von B, und umgekehrt folgt aus $B \subseteq A$, daß jedes Element von B auch Element von A ist. Deshalb haben A und B genau die gleichen Elemente, sind also gleich. Δ

Noch zwei Bemerkungen zu diesen kurzen Beweisen. Der Beweis zu Nummer (ii) mag Ihnen etwas künstlich vorkommen, aber er beruht nur auf der einfachen Tatsache, daß man über die leere Menge so ziemlich alles beweisen kann, außer daß sie voll ist. So ist ja auch der Satz „Jeder in diesem Raum ist Millionär“ mit Sicherheit wahr, vorausgesetzt der Raum ist leer.

Die Nummer (iv) liefert uns eine recht hilfreiche Methode, um die Gleichheit von zwei Mengen A und B zu zeigen: man nehme irgendetwas aus A und weise nach, daß es auch in B ist, und umgekehrt. Ich werde gleich in 1.1.11 darauf zurückkommen.

Nun wird es aber höchste Zeit, Sie mit den wichtigsten Operationen vertraut zu machen, die man gewöhnlich auf Mengen anwendet, nämlich mit Durchschnitt, Vereinigung und Differenz.

1.1.9 Definition Es seien A und B Mengen.

(i) Die Menge
$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}$$
heißt Durchschnitt oder auch Schnitt von A und B. Man bezeichnet sie als A geschnitten B.

(ii) Die Menge
$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}$$
heißt Vereinigung von A und B. Man bezeichnet sie als A vereinigt B.

(iii) Die Menge
$$A \backslash B = \{x | x \in A, \text{ aber } x \notin B\}$$
heißt Differenz von A und B. Man bezeichnet sie als A ohne B.

Die Mengenoperationen $\cap$, $\cup$ und $\backslash$ können Sie sich leicht veranschaulichen, indem Sie sich A und B als Kreise auf dem Papier vorstellen. Dann haben wir nämlich die Situation aus Abbildung 1.2.

Beachten Sie übrigens, daß das Wort „oder“ in der Definition nicht als entweder-oder gemeint ist, sondern als: das eine oder das andere oder beides. In der Vereinigung werden also alle Elemente zusammengefaßt, die in wenigstens einer der beiden Mengen auftreten. Falls ein Element in beiden auftritt: um so besser!

Im folgenden Beispiel verwende ich die Menge der ganzen Zahlen sowie die übliche kleiner-Relation zwischen zwei Zahlen. Über beides werde ich im Abschnitt 1.2 noch genauer reden.

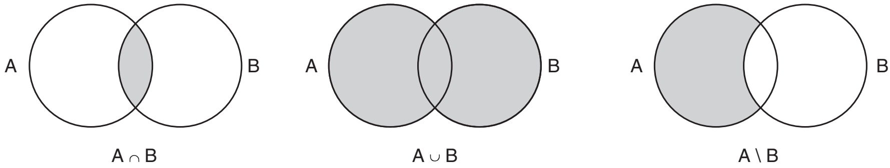


Abb. 1.2. Mengenoperationen

1.1.10 Beispiele

(i) Es sei

$$A = \{2, 4, 6, 8\} \text{ und } B = \{1, 3, 4, 5, 9\}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{4\}, \\ A \cup B &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}, \\ A \backslash B &= \{2, 6, 8\}, \end{aligned}$$

denn das einzige Element von B, das auch in A vorkommt und deshalb hinausgeworfen werden muß, ist die 4.

(ii) Es sei

$$A = \{x | x < 5\} \text{ und } B = \{x | x > 0\}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x | x \in A \text{ und } x \in B\} \\ &= \{x | x < 5 \text{ und } x > 0\} \\ &= \{1, 2, 3, 4\}, \end{aligned}$$

denn genau diese vier ganzen Zahlen sind *gleichzeitig* größer als Null *und* kleiner als fünf.
Beim Durchschnitt mehrerer Mengen müssen also sämtliche Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\} \\ &= \{x | x < 5 \text{ oder } x > 0\} \\ &= \text{ Menge aller ganzen Zahlen}, \end{aligned}$$

denn wenn Sie eine beliebige ganze Zahl nehmen, dann kann diese Zahl kleiner als fünf sein, wodurch sie automatisch in $A \cup B$ liegt, oder sie kann mindestens fünf sein. In diesem Fall ist sie aber auf jeden Fall auch größer als Null und somit auch Element von $A \cup B$.
Schließlich ist

$$\begin{aligned} A \backslash B &= \{x | x \in A \text{ und } x \notin B\} \\ &= \{x | x < 5 \text{ und } x \not> 0\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{x|x < 5 \text{ und } x \leq 0\} \\
&= \{x|x \leq 0\} \\
&= \{0, -1, -2, -3, \ldots\},
\end{aligned}
$$

denn wenn $x \leq 0$ sein soll, dann ist es auch ganz von alleine kleiner als fünf.

(iii) Es sei A die Menge der ungeraden Zahlen und B die Menge der geraden Zahlen. Dann ist $A \cap B = \emptyset$. Es kommt also vor, sogar ziemlich häufig, daß Mengen keine gemeinsamen Elemente und deshalb eine leere Schnittmenge haben.

Wie beim Rechnen mit Zahlen kann man auch die Mengenoperationen miteinander kombinieren, und erstaunlicherweise gelten dabei ganz ähnliche Regeln. Bei Zahlen ist es zum Beispiel egal, ob Sie $a+b$ oder $b+a$ nehmen, bei Mengen spielt es keine Rolle, ob Sie $A\cap B$ oder $B\cap A$ bestimmen. Aber auch die etwas komplizierteren Regeln des Ausmultiplizierens wie $a\cdot(b+c) = a\cdot b+a\cdot c$ finden eine Entsprechung bei den Mengenoperationen. Wir notieren nun die nötigen Regeln in einem Satz.

1.1.11 Satz Es seien A, B und C Mengen. Dann gelten:

(i) Kommutativgesetze:
$A \cap B = B \cap A$;
$A \cup B = B \cup A$.

(ii) Assoziativgesetze:
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

(iii) Distributivgesetze:
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Beweis Die Nummern (i) und (ii) sind wohl ziemlich klar. Ob Sie nun die gemeinsamen Elemente von A und B zusammenpacken oder die gemeinsamen Elemente von B und A, dürfte keinen Unterschied ausmachen, das heißt $A\cap B = B \cap A$. Daß $A \cup B = B \cup A$ gilt, können Sie sich auf ähnliche Weise selbst überlegen.

Weiterhin sind sowohl $A\cap(B\cap C)$ als auch $(A\cap B)\cap C$ nur zwei verschiedene Schreibweisen für die Menge der Elemente, die alle drei auftretenden Mengen gemeinsam haben, während $A \cup (B \cup C)$ genauso wie $(A \cup B) \cup C$ die Elemente beschreibt, die in wenigstens einer der drei beteiligten Mengen auftreten.

Interessanter wird der Satz, wenn wir an die Distributivgesetze gehen. Zunächst einmal werde ich die Formel

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

an zwei Bildern veranschaulichen. Wir tragen zuerst die linke Seite der Gleichung in eines der üblichen Ovalen-Diagramme ein.

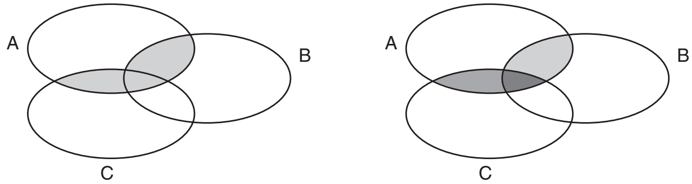


Abb. 1.3. und **1.4.** Distributivgesetz

Die Menge $B \cup C$ entspricht der Vereinigung der beiden Ovale auf der rechten bzw. unteren Seite von Abbildung 1.3, und wenn Sie diese Vereinigung mit A schneiden müssen, bleibt gerade der markierte Teil übrig.

Sehen wir uns nun die rechte Seite der Gleichung an.

Die beiden schraffierten Teile von Abbildung 1.4 kennzeichnen die Mengen $A \cap B$ und $A \cap C$. Deshalb ergibt die Vereinigung von $A \cap B$ und $A \cap C$ die gleiche Menge, die wir oben erhalten haben.

Auf diese Weise ist die Regel des ersten Distributivgesetzes zwar veranschaulicht, aber keinesfalls gültig bewiesen. Schließlich bestehen die meisten Mengen nicht aus Ovalen auf weißem Papier, die auch noch so praktisch angeordnet sind wie in unseren Diagrammen. Da der Satz sich auf irgendwelche Mengen bezieht und nicht nur auf ovalförmige, müssen wir noch einen Beweis finden, der die bildliche Anschauung vermeidet. Glücklicherweise habe ich im Anschluß an 1.1.8 schon einmal erwähnt, wie das geht: man schnappt sich irgendein beliebiges Element aus der linken Menge und weist nach, daß es zwangsläufig auch in der rechten Menge liegt, und umgekehrt.

Sei also

$$x \in A \cap (B \cup C).$$

Dann ist $x \in A$ und $x \in B \cup C$. Folglich ist $x \in A$ und darüber hinaus liegt x in B oder in C. Wenn $x \in B$ ist, dann erhalten wir $x \in A \cap B$, und wenn $x \in C$ ist, dann folgt $x \in A \cap C$, denn wir wissen ja, daß in jedem Fall $x \in A$ gilt. Somit ist $x \in A \cap B$ oder $x \in A \cap C$ und deshalb

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Wir haben damit gezeigt, daß jedes Element aus

$$A \cap (B \cup C)$$

auch Element aus

$$(A \cap B) \cup (A \cap C)$$

ist.

Gehen wir an die Umkehrung. Dazu sei

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Nach der Definition der Vereinigung ist dann $x \in A \cap B$ oder $x \in A \cap C$. Im ersten Fall ist $x \in A$ und $x \in B$, während im zweiten Fall gilt: $x \in A$ und $x \in C$.

Deshalb muß in jedem Fall $x \in A$ gelten, und da einer der beiden Fälle sicher zutrifft, ist auch $x \in B$ oder $x \in C$. Das heißt aber $x \in B \cup C$. Somit ist

$$x \in A \cap (B \cup C),$$

und wir haben gezeigt, daß jedes Element von

$$(A \cap B) \cup (A \cap C)$$

auch Element von

$$A \cap (B \cup C)$$

ist.

Insgesamt folgt:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \qquad \Delta$$

Das war nun eine sehr ausführliche Herleitung eines noch recht einfachen Gesetzes. Ich werde das in Zukunft nicht immer so detailliert vortragen, aber für den Anfang und zum Eingewöhnen ist ein gewisses Maß an Gründlichkeit wichtig. Das zweite Distributivgesetz werde ich hier nicht mehr herleiten, das sollten Sie als Übungsaufgabe sowohl an Diagrammen veranschaulichen als auch ohne Diagramme beweisen.

Der nächste Satz beschreibt die Zusammenhänge zwischen Differenzbildung und Schnitt bzw. Vereinigung. Ich will es mit formalen Beweisen nicht übertreiben und nur die graphische Veranschaulichung des ersten Teils aufzeichnen, den zweiten Teil können Sie dann als Übungsaufgabe selbst machen.

1.1.12 Satz Es seien A, B und C Mengen. Dann gelten:

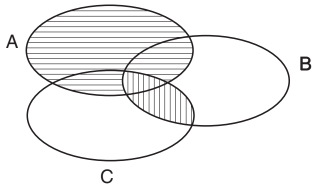
(i) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.
(ii) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

Beweis Zunächst wird die linke Seite der Gleichung (i) in das Diagramm 1.5 übersetzt.

Die senkrechte Schraffierung beschreibt $B \cap C$, die waagrechte Schraffierung zeigt, was von A übrigbleibt, wenn Sie alle Elemente von $B \cap C$ aus der Menge A herausnehmen. Folglich entspricht die waagrechte Schraffierung gerade $A \backslash (B \cap C)$.

In Abbildung 1.6 symbolisiert die senkrechte Schraffierung die Menge $A \backslash B$ und die waagrechte Schraffierung die Menge $A \backslash C$. Die Vereinigung beider Mengen stimmt offenbar mit der oben gefundenen Menge $A \backslash (B \cap C)$ überein. Δ

Die Sätze 1.1.11 und 1.1.12 werden wir nicht sehr dringend brauchen. Ich habe sie vorgestellt, um an ihrem Beispiel die Begriffe Beweis und Veranschaulichung zu verdeutlichen und die Unterschiede zwischen beiden Vorgehensweisen klar zu machen. Aber natürlich sind die beiden Sätze auch für



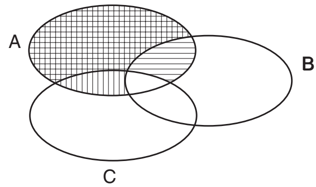


Abb. 1.5. und **1.6.** Mengendiagramme

sich genommen von Interesse, weil sie zeigen, wie die verschiedenen Mengenoperationen zusammenarbeiten.

Was Sie über Mengen wissen sollten, haben wir nun besprochen und könnten eigentlich zum nächsten Abschnitt übergehen, in dem ich Ihnen zeigen möchte, was für Arten von Zahlen es gibt und wie man damit umgeht. Sie können auch, ohne dem Gang der Handlung zu schaden, zum Abschnitt 1.2 weiterblättern. Sie würden allerdings etwas versäumen, denn ich werde Ihnen jetzt noch kurz vorführen, in was für Schwierigkeiten man gerät, wenn man mit Mengen allzu sorglos umgeht.

Es gibt eine Reihe von Antinomien, von Widersprüchlichkeiten, die darauf beruhen, daß Cantors Mengenbegriff aus Definition 1.1.1 zu schwammig ist und zu weltumfassend, daß es erlaubt ist, alles, was einem einfallen mag, in einer Menge zusammenzufassen. Auf diese Weise erhält man nämlich mit etwas Pech ganz schnell Mengen, die einen direkt in Teufels Küche führen. Die wohl berühmteste Antinomie wurde von Bertrand Russel, einem britischen Mathematiker und Philosophen, gefunden: das Russelsche Paradoxon. Dabei wird eine Menge konstruiert und gleichzeitig gezeigt, daß es sie nicht geben kann.

1.1.13 Bemerkung Sie haben in Beispiel 1.1.2 (v) gesehen, daß Mengen aus Elementen bestehen können, die selbst wieder Mengen sind. Da wir über irgendwelche Mengen in vollster Allgemeinheit reden, liegt nichts näher, als alle nur irgendwie möglichen Mengen in einer großen Menge zusammenzufassen. So erhalten wir die Menge aller Mengen, die ich mit **M** bezeichne, das heißt

$$\mathbf{M} = \{A | A \text{ ist Menge}\}.$$

Jede Menge A ist also Element von **M**. Nun ist aber **M** selbst auch eine Menge, und da **M** alle Mengen als Elemente enthält, kommt man zu der eigenartigen Beziehung

$$\mathbf{M} \in \mathbf{M}.$$

Das ist zwar ungewöhnlich, aber noch nicht erschreckend. Natürlich enthalten die üblicherweise auftretenden Mengen sich nicht selbst als Element – zum Beispiel ist die Menge der geraden Zahlen selbst keine gerade Zahl – doch es muß ja nichts schaden, wenn einmal etwas Außergewöhnliches geschieht.

Dennoch scheint es sinnvoll zu sein, die Gesamtheit aller Mengen aufzuteilen: in solche, die sich selbst als Element enthalten, und solche, die sich eben nicht selbst als Element enthalten. Ich nenne deshalb

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \{A|A \text{ enthält sich selbst als Element}\}\\ &= \{A|A \in A\},\end{aligned}$$

und im Gegensatz dazu

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \{A|A \text{ enthält sich nicht selbst als Element}\}\\ &= \{A|A \notin A\}.\end{aligned}$$

N ist die Menge, die uns einige Schwierigkeiten bereiten wird. Beide Mengen sind nicht leer, denn wie Sie gesehen haben ist $\mathbf{M} \in \mathbf{S}$, und die Menge aller geraden Zahlen ist Element von **N**. Weiterhin ist

$$\mathbf{M} = \mathbf{S} \cup \mathbf{N},$$

denn jede Menge enthält sich als Element oder eben nicht, liegt also entweder in **S** oder in **N**. Von Bedeutung ist hier auch das entweder-oder: keine Menge kann gleichzeitig in **S** und in **N** sein, da **N** genau die Mengen enthält, die in **S** keine Heimat finden. Folglich ist

$$\mathbf{N} \cap \mathbf{S} = \emptyset.$$

Sehen wir uns **N** einmal genauer an. Da **N** eine Menge ist, muß **N** Element von **S** oder von **N** sein, denn $\mathbf{M} = \mathbf{S} \cup \mathbf{N}$. Wir nehmen versuchsweise an, daß $\mathbf{N} \in \mathbf{S}$ gilt. In **S** befinden sich aber genau die Mengen, die sich selbst als Element enthalten, das heißt, wenn **N** in **S** liegt, muß $\mathbf{N} \in \mathbf{N}$ gelten. Das kann nicht sein, weil wegen $\mathbf{N} \cap \mathbf{S} = \emptyset$ nichts, was in **S** liegt, gleichzeitig in **N** liegen kann.

Die Annahme $\mathbf{N} \in \mathbf{S}$ führt demnach zu einem widersprüchlichen Resultat und muß falsch sein. Folglich ist **N** Element von **N**, denn in einem von beiden muß es schließlich liegen. Das geht aber auch nicht, denn in diesem Fall würde **N** in sich selbst liegen und wäre eine der Mengen, die sich selbst als Element enthalten. Der angestammte Platz all dieser Mengen ist aber nun einmal die Menge **S**. Die Annahme $\mathbf{N} \in \mathbf{N}$ führt also zu der Folgerung $\mathbf{N} \in \mathbf{S}$, so daß **N** schon wieder gleichzeitig in **N** und in **S** liegen müßte – und das ist bekanntlich unmöglich. Deshalb muß auch $\mathbf{N} \in \mathbf{N}$ falsch sein.

Sehen Sie, in was für eine üble Situation wir uns hineinmanövriert haben? **N** ist eine Menge, und jede Menge muß Element von **N** oder von **S** sein, aber Sie haben gesehen, daß **N** weder Element von **N** noch von **S** sein kann.Unser **N** hat deshalb in der Menge aller Mengen keinen Platz, obwohl es doch selbst eine Menge ist! Mit anderen Worten: wir haben eine Menge konstruiert und stellen fest, daß es sie nicht geben kann.

Es ist nicht überraschend, daß Bertrand Russel, als er auf dieses Problem stieß, erst einmal nicht im entferntesten wußte, wie man es lösen könnte. Wie würden Sie sich fühlen, wenn Sie beispielsweise ein Auto konstruieren, das zweifelsfrei ein Auto ist und von dem Sie genauso zweifelsfrei nachweisen, daß es kein Auto sein kann? Vielleicht kämen Sie auf die Idee, daß an Ihrer Vorstellung von einem Auto etwas falsch sein muß, denn mit einem ähnlichen Gedanken läßt sich das Russelsche Paradoxon auflösen. Cantors Vorstellung von einer Menge war, wie schon erwähnt, zu schwammig und ließ jeden beliebigen Unsinn zu. Der einzig mögliche Lösungsweg bestand deshalb darin, den Mengenbegriff um einiges genauer zu fassen, damit keine Widersprüche mehr auftreten können – aber das ist ein zu weites Feld, und es bräuchte ein weiteres Buch, um zu beschreiben, wie man mit Russels Entdeckung zu Rande kam.

Was nun die Mengen betrifft, die im folgenden auftreten werden, so kann ich Ihnen versichern, daß sie alle völlig unproblematisch sind. Keine von ihnen taucht kurz auf, um gleich darauf wieder hinter einem Vorhang von Widersprüchen zu verschwinden, sie sind solide und verursachen keine nennenswerten Probleme.

Damit beende ich unseren Ausflug in die Welt der Paradoxien und wende mich einem zweiten grundlegenden mathematischen Objekt zu: den Zahlen.

1.2 Zahlenarten

Die für unsere Zwecke wichtigsten Mengen sind Zahlenmengen, das heißt Mengen, deren Elemente Zahlen sind. Am vertrautesten sind wohl jedem die natürlichen Zahlen, die wir andauernd beim Zählen benutzen.

1.2.1 Definition Unter der Menge der natürlichen Zahlen versteht man die Menge

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Mit natürlichen Zahlen kann man die üblichen Rechenoperationen durchführen, zumindest sind Addition und Multiplikation gefahrlos möglich. Schon beim Subtrahieren können Sie aber in Schwierigkeiten geraten, wie Sie sehr leicht merken werden, wenn Sie von Ihrem Konto mehr Geld abheben wollen als vorhanden ist und damit den Bereich der natürlichen Zahlen in Richtung Negativität verlassen.

Um beliebig subtrahieren zu können, muß man die negativen Zahlen hinzunehmen, womit man die Menge der ganzen Zahlen erhält.

1.2.2 Definition Unter der Menge der ganzen Zahlen versteht man die Menge

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &= \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots\}\\ &= \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.\end{aligned}$$

Tatsächlich sind sich die Mathematiker manchmal nicht ganz einig, ob sie die Null erst bei den ganzen Zahlen auftreten lassen wollen oder sie schon den natürlichen Zahlen zuordnen. Das ist sicher kein weltbewegendes Problem, aber die natürlichen Zahlen sollten doch die Zahlen sein, mit denen wir zu

Anfang unserer mathematischen Karriere zählen lernen – und ich bin ziemlich sicher, daß auch Ihre ersten Zählversuche mit der Eins angefangen haben und nicht mit der Null. Deshalb ordne ich die Null der Menge $\mathbb{Z}$ zu und nicht der Menge $\mathbb{N}$. In jedem Fall ist in $\mathbb{Z}$ die Subtraktion jederzeit möglich, man muß nur wissen, daß das Abziehen einer negativen Zahl der Addition einer positiven Zahl entspricht. Das bedeutet zum Beispiel $1 - 4 = -3$, aber $1 - (-4) = 1 + 4 = 5$ und natürlich auch $-1 - 4 = -5$.

Leider stehen wir auch bei den ganzen Zahlen vor dem Problem, nicht nach Herzenslust dividieren zu können. Zwar ist $10 : 2 = 5$ und $(-8) : (-4) = 2$, aber der Ausdruck $7 : 3$ macht innerhalb der ganzen Zahlen keinen Sinn. Um über eine vollständige Arithmetik zu verfügen, ist es also nötig, die Brüche hinzuzunehmen, die man normalerweise als rationale Zahlen bezeichnet. Es wäre nur konsequent, die entstehende Menge mit $\mathbb{R}$ zu benennen, aber dieses Zeichen wird noch für die Menge der reellen Zahlen gebraucht. Die Menge der rationalen Zahlen heißt deshalb $\mathbb{Q}$ und umfaßt alle möglichen Quotienten ganzer Zahlen.

1.2.3 Definition Unter der Menge der rationalen Zahlen versteht man die Menge

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \right\}.$$

Ist $p = \frac{a}{b}$ eine rationale Zahl, so heißt a der Zähler und b der Nenner von p.

Beachten Sie dabei die Einschränkung, die wir für den Nenner vornehmen: durch Null darf man nicht dividieren, und somit ist eine Null im Nenner eines Bruchs nicht erlaubt. Bei der Berechnung bestimmter Grenzwerte und auch beim Differenzieren werde ich darauf noch einmal zurückkommen.

Während das Rechnen mit ganzen Zahlen, die sogenannte ganzzahlige Arithmetik, den wenigsten Leuten ernsthafte Schwierigkeiten macht, ist die Lage bei der Bruchrechnung etwas komplizierter. Die Rechenregeln für ganze Zahlen braucht man sich nicht großartig zu merken, sie sind recht natürlich, aber wenn Sie sich an Ihre Schulzeit erinnern, dann denken Sie vielleicht an Kuchen- oder Tortenstücke, die zur Veranschaulichung der Bruchrechnung herangezogen wurden. Darauf werde ich hier allerdings verzichten, sondern nur die Rechenregeln anführen und das eine oder andere Beispiel rechnen.

1.2.4 Satz Für rationale Zahlen gelten die folgenden Regeln:

(i) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ falls $b \neq 0$ und $d \neq 0$;

(ii) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ falls $b \neq 0$, $c \neq 0$ und $d \neq 0$;

(iii) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$ falls $b \neq 0$ und $d \neq 0$.

Diese Regeln beschreiben die gesamte Bruchrechnung. In Worte gefaßt stellen sie einfach die alten Merksätze dar, die Sie unter Umständen aus der Schule kennen: man multipliziert zwei Brüche, indem man jeweils die Zähler und die Nenner multipliziert, man dividiert zwei Brüche, indem man den ersten mit dem Kehrbruch des zweiten multipliziert, und man addiert zwei Brüche, indem man sie auf den Hauptnenner bringt und dann die neuen Zähler addiert.

Die Regel 1.2.4 (iii) wendet man allerdings oft nicht ganz wörtlich an, wie Sie gleich an den Beispielen sehen werden.

1.2.5 Beispiele

(i)

$$\frac{5}{3}+\frac{7}{8}=\frac{5\cdot 8+7\cdot 3}{24}=\frac{61}{24}.$$

(ii)

$$\frac{5}{3}+\frac{7}{9}=\frac{5\cdot 9+7\cdot 3}{27}=\frac{66}{27}=\frac{22}{9}.$$

Wenn Sie hier nach Regel 1.2.4 (iii) rechnen, erhalten Sie den Bruch $\frac{66}{27}$, in dem sowohl Zähler als auch Nenner den Faktor 3 enthalten, das heißt:

$$\frac{66}{27}=\frac{22\cdot 3}{9\cdot 3}=\frac{22}{9}\cdot\frac{3}{3}=\frac{22}{9}.$$

Sofern Zähler und Nenner einen gemeinsamen Faktor haben, kann man diesen Faktor herauskürzen, indem man einfach Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl teilt. Man hätte aber auch gleich einfacher rechnen können, nämlich

$$\frac{5}{3}+\frac{7}{9}=\frac{15}{9}+\frac{7}{9}=\frac{22}{9}.$$

Sie sehen daran, daß der Hauptnenner nicht unbedingt das Produkt der beiden ursprünglichen Nenner sein muß, sondern das sogenannte kleinste gemeinsame Vielfache. Bei 3 und 9 ist das gerade die 9, bei 4 und 6 wäre es 12, denn 12 ist die kleinste Zahl, die sowohl 4 als auch 6 als Faktor hat. Sie können zwar immer die brachiale Regel 1.2.4 (iii) verwenden, aber bei einigermaßen großen Nennern achtet man besser darauf, den kleinstmöglichen Hauptnenner zu finden.

Man sollte glauben, daß uns nun genügend Zahlen zur Verfügung stehen, um mit der ganzen Welt fertig zu werden. Im antiken Griechenland gab es auch tatsächlich eine sehr einflußreiche philosophische Schule, die Pythagoreer, die genau dieser Auffassung waren. „Alles ist Zahl" war ihr Wahlspruch, und damit meinten sie ganze Zahlen oder Verhältnisse ganzer Zahlen, also Brüche. Ich werde Ihnen gleich etwas mehr darüber erzählen, doch zuerst zeige ich Ihnen, warum dieser Wahlspruch falsch war.

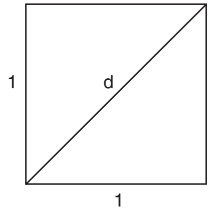


Abb. 1.7. Diagonale im Quadrat

Zeichnet man in einem Quadrat der Seitenlänge eins die Diagonale ein, so folgt aus dem Satz des Pythagoras leicht, daß die Länge d dieser Diagonalen die Quadratwurzel aus 2 ist, die man mit $\sqrt{2}$ bezeichnet. Es gilt nämlich $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, wobei wie üblich d^2 für $d \cdot d$ steht. So sehr man sich nun auch bemühen mag, einen Bruch zu finden, dessen Quadrat genau 2 ergibt, man wird beim besten Willen keinen auftreiben können. Der Grund dafür ist ganz einfach: die Quadratwurzel aus 2 ist keine rationale Zahl. Es gibt also Zahlen, die nicht in der Menge $\mathbb{Q}$ liegen.

Beim Beweis dieser Tatsache werde ich von zwei Dingen Gebrauch machen. Erstens benütze ich das Implikationszeichen oder auch Daraus-folgt-Zeichen $\Rightarrow$. Es beschreibt den Umstand, daß aus einer Aussage A eine Aussage B folgt, kurz durch $A \Rightarrow B$. Zum Beispiel folgt aus $x+2=4$ natürlich $x=2$, und man schreibt

$$x + 2 = 4 \Rightarrow x = 2.$$

Zweitens werde ich einen Widerspruchsbeweis führen, dessen Prinzip ich kurz erklären sollte. Will man eine Aussage beweisen (z.B. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$), so kann man erst einmal versuchsweise das Gegenteil dieser Aussage annehmen (das heißt $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$) und sehen, zu welchen Konsequenzen das führt. Falls man Konsequenzen findet, von denen man weiß, daß sie falsch sind, dann muß schon die versuchsweise Annahme des Gegenteils falsch gewesen sein.

Das ist ein bißchen „von hinten durch die Brust ins Auge“; ein einfaches Beispiel wird Ihnen zeigen, was gemeint ist. Wenn Sie mit dem Auto in eine fremde Stadt kommen, werden Sie möglicherweise irgendwann vor der Wahl stehen, rechts oder links abzubiegen, ohne zu wissen, was nun richtig wäre. Vielleicht wollen Sie links ab fahren, aber Ihr Mitfahrer plädiert eher für rechts, und als friedlicher Mensch fügen Sie sich. Dummerweise geraten Sie in eine düstere Sackgasse, die ganz offensichtlich nicht die gesuchte Straße ist, das heißt die Annahme, rechts sei die richtige Richtung, führt zu falschen Konsequenzen, muß also selbst falsch gewesen sein. Deshalb war die ursprüngliche Idee, Sie sollten links fahren, richtig.

Genauso werde ich jetzt beweisen, daß die Wurzel aus 2 nicht rational ist.

1.2.6 Bemerkung Die Quadratwurzel aus 2 ist keine rationale Zahl.

Beweis Sei $d = \sqrt{2}$. Wir nehmen versuchsweise an, d sei rational, das heißt $d = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Z}$. Natürlich kann man p und q so weit wie möglich kürzen, damit sie keine gemeinsamen Faktoren mehr haben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 2 = d^2 = \frac{p^2}{q^2} \quad &\Rightarrow \quad p^2 = 2q^2 \\ &\Rightarrow \quad p^2 \text{ ist gerade} \\ &\Rightarrow \quad p \text{ ist gerade, d.h. 2 ist Teiler von } p \\ &\Rightarrow \quad 4 \text{ ist Teiler von } p^2 \\ &\Rightarrow \quad \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N}, \text{ so daß } p^2 = 4n \text{ gilt} \\ &\Rightarrow \quad 4n = p^2 = 2q^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad 2n = q^2 \\ &\Rightarrow \quad q^2 \text{ ist gerade} \\ &\Rightarrow \quad q \text{ ist gerade, d.h. 2 ist Teiler von } q. \end{aligned}$$

Jetzt sind wir schon fertig, denn aus der Annahme $d = \frac{p}{q}$ haben wir gefolgert, daß sowohl p als auch q den Faktor 2 aufweisen, also gerade sein müssen. Wir hatten aber vorausgesetzt, daß p und q *keine* gemeinsamen Faktoren mehr haben und somit auch keinen gemeinsamen Faktor 2 mehr haben *können*. Die Annahme $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ führt folglich zu einer absurden Konsequenz und muß daher falsch sein. Deshalb ist

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Falls Ihnen jeder Schritt in der obigen Implikationskette klar ist, können Sie zum nächsten Punkt übergehen. Falls nicht, sollten Sie sich die folgenden Erläuterungen ansehen.

Aus $2 = \frac{p^2}{q^2}$ folgt natürlich durch Ausmultiplizieren $p^2 = 2q^2$. Damit ist p^2 durch 2 teilbar, also gerade. Eine ungerade Zahl kann niemals ein gerades Quadrat haben und das heißt, daß schon p gerade sein muß. Wenn aber schon p den Faktor 2 enthält, wird p^2 den Faktor $2^2 = 4$ enthalten, und wir können p^2 darstellen als $p^2 = 4n$ mit einer natürlichen Zahl n. Im nächsten Schritt verwenden wir die alte Gleichung $p^2 = 2q^2$ und wissen gleichzeitig $p^2 = 4n$, woraus sofort $2q^2 = 4n$ folgt. Dividieren durch 2 auf beiden Seiten ergibt $q^2 = 2n$, das heißt, auch q^2 ist gerade. Mit dem gleichen Argument wie oben schließen wir, daß dann schon q selbst gerade ist und haben das Ende der Implikationskette erreicht. Δ

Wir haben nun eine Zahl gefunden, die sich nicht als Bruch darstellen läßt, aber durchaus einem Punkt auf der altbekannten Zahlengeraden entspricht, wie Abbildung 1.8 zeigt.

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist also nicht in der Lage, die gesamte Zahlengerade auszufüllen. Offenbar brauchen wir noch eine Zahlenmenge, die sämtliche Punkte der Zahlengeraden als Elemente enthält. Diese Menge ist die Menge der reellen Zahlen.

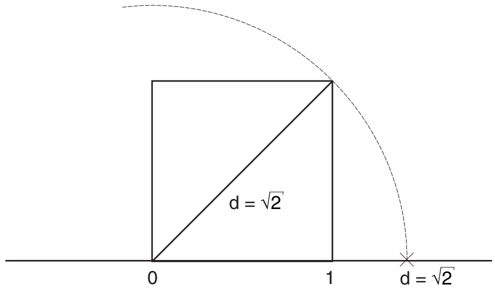


Abb. 1.8. Quadratwurzel aus 2 auf der Zahlengerade