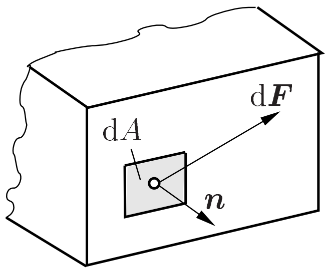
1 Spannung, Verzerrung, Elastizitätsgesetz

1.1 Spannung, Gleichgewichtsbedingung

Spannungen nennt man die auf die Flächeneinheit eines Schnittes bezogenen Kräfte. Der *Spannungsvektor* $\boldsymbol{t}$ ist definiert als

$$\boldsymbol{t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}A} ,$$

wobei $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ die Kraft auf das Flächenelement $\mathrm{d}A$ darstellt (Einheit: $\mathrm{Pa} \equiv \mathrm{N/m^2}$).

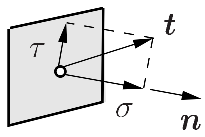


Beachte: Der Spannungsvektor und seine Komponenten hängen von der Schnittrichtung (Flächennormale $\boldsymbol{n}$) ab.

Komponenten des Spannungsvektors:

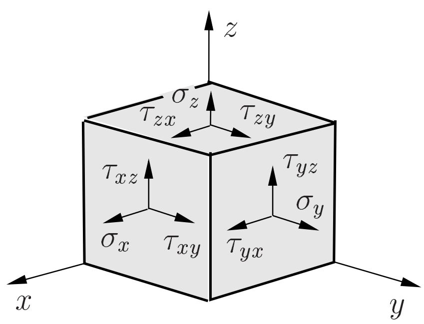
σ – Normalspannung (senkrecht zur Fläche)

τ – Schubspannung (in der Fläche)



Vorzeichenfestlegung: Positive Spannungskomponente zeigt am positiven (negativen) Schnittufer in positive (negative) Richtung.

Räumlicher Spannungszustand: ist eindeutig bestimmt durch Spannungsvektoren (Komponenten) für drei senkrecht aufeinander stehende Schnitte.



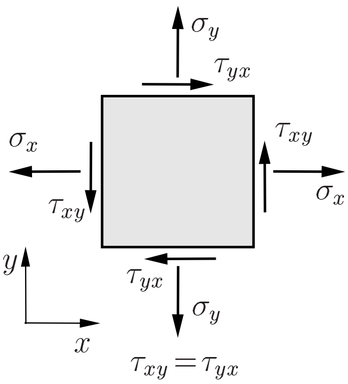
$$\text{Spannungsmatrix}: \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Es gilt (Momentengleichgewicht)

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} , \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx} , \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} .$$

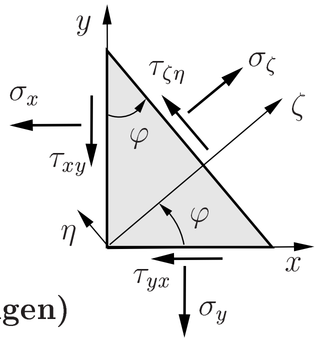
Die Komponenten der Spannungsmatrix sind Koeffizienten eines *Tensors 2. Stufe*, der wegen $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ *symmetrisch* ist.

Ebener Spannungszustand: ist eindeutig bestimmt durch die Spannungskomponenten für zwei senkrecht aufeinander stehende Schnitte. Die Spannungskomponenten in die 3. Richtung (hier z-Richtung) verschwinden ($\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$)



$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} .$$

Transformationsbeziehungen

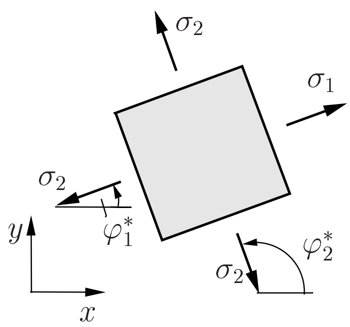


$$\begin{aligned}
\sigma_\xi &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \ , \\
\sigma_\eta &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi \ , \\
\tau_{\xi\eta} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \ .
\end{aligned}$$

Hauptspannungen (extremale Normalspannungen)

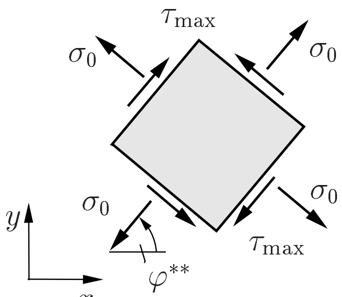
$$\boxed{\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$\boxed{\tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}}$$



Beachte:
- Die Schubspannungen sind in diesen Schnitten Null!
- Die Hauptspannungsrichtungen stehen senkrecht aufeinander: φ_1^*, $\quad \varphi_2^* = \varphi_1^* \pm \pi/2$.

Maximale Schubspannung



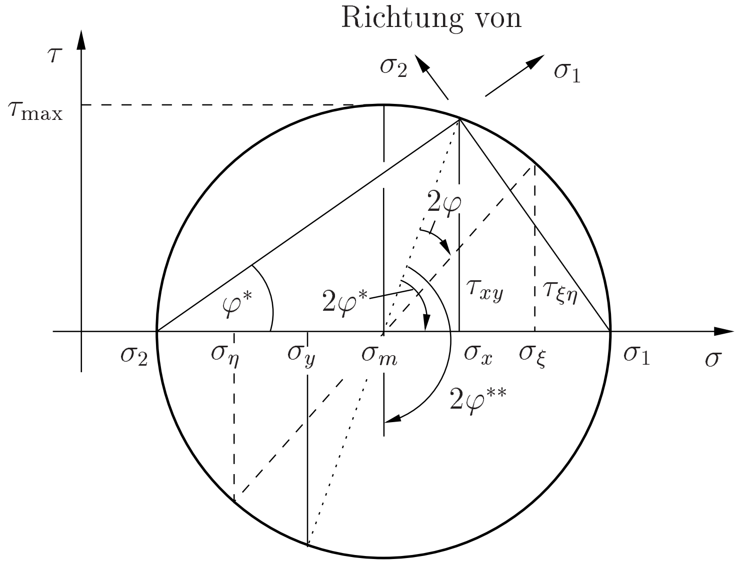
$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \ , \qquad \varphi^{**} = \varphi^* \pm \frac{\pi}{4} \ .$$

Die Normalspannungen haben in diesen Schnitten die Größe $\sigma_0 = (\sigma_x + \sigma_y)/2$.

Invarianten

$$\begin{aligned}
I_\sigma &= \sigma_x + \sigma_y = \sigma_\xi + \sigma_\eta = \sigma_1 + \sigma_2 \ , \\
II_\sigma &= \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = \sigma_\xi \sigma_\eta - \tau_{\xi\eta}^2 = \sigma_1 \sigma_2 \ .
\end{aligned}$$

MOHRscher Spannungskreis

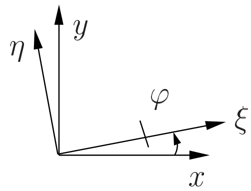


Mittelpunkt:

$$\sigma_m = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\,,$$
$$\tau = 0$$

Radius:

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



- Die Konstruktion des MOHRschen Kreises ist bei Kenntnis von drei unabhängigen Größen (zum Beispiel σ_x, σ_y, τ_{xy} oder σ_x, σ_y, φ^*) immer möglich.
- Die Schubspannung τ_{xy} wird über σ_x aufgetragen ($\tau_{\xi\eta}$ über σ_ξ).
- Der Transformationswinkel φ wird im Kreis doppelt (2φ) und in umgekehrter Richtung aufgetragen.

Gleichgewichtsbedingungen

Im Raum (3D)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0\,,\\
&\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0\,,\\
&\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + f_z = 0\,,
\end{aligned}\right\}\ \mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}\,.$$

In der Ebene (2D)

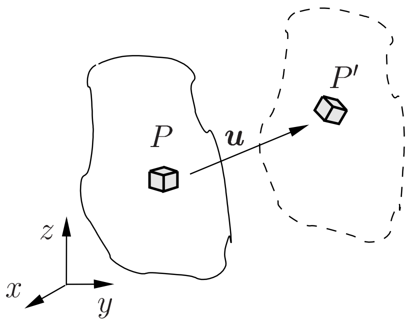
$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0\,,\\
&\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + f_y = 0\,,
\end{aligned}\right\}\ \mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}\,.$$

wobei

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} = \sum_i \left(\frac{\partial\sigma_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{iz}}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_i\,.$$

1.2 Verzerrung

Die *Verzerrungen* beschreiben die Änderung der Seitenlängen (Dehnungen) und der Winkel (Scherung, Winkelverzerrungen, Schiebungen) eines quaderförmigen Volumenelementes.



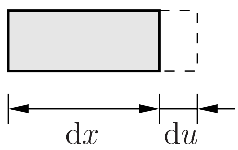
Verschiebungsvektor

$$\boldsymbol{u} = u\boldsymbol{e}_x + v\boldsymbol{e}_y + w\boldsymbol{e}_z$$

u, v, w = Verschiebungskomponenten

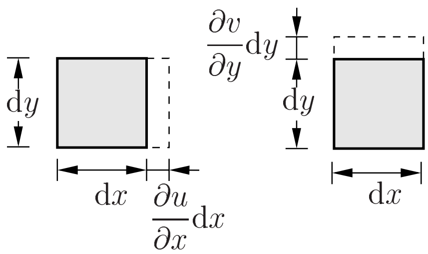
Einachsiger Verzerrungszustand

Dehnung $\boxed{\varepsilon = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}$

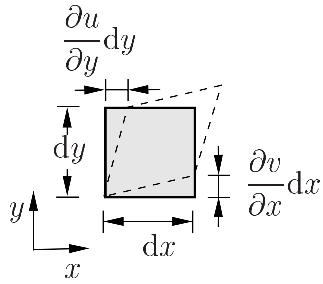


Zweiachsiger Verzerrungszustand

Dehnungen



Winkelverzerrung



$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}}\,, \qquad \boxed{\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}}\,, \qquad \boxed{\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}}\,.$$

Dreiachsiger Verzerrungszustand

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}\,, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}\,,$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\,,$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\,,$$

$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\,.$$

Verzerrungsmatrix: $$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Anmerkungen: • Die Verzerrungen sind (wie die Spannungen) Komponenten eines *symmetrischen Tensors 2. Stufe*. Daher können alle Eigenschaften (Transformationsbeziehungen etc.) vom Spannungstensor sinngemäß übertragen werden: $\sigma_x \to \varepsilon_x$, $\tau_{xy} \to \gamma_{xy}/2$, usw..

• Im *ebenen Verzerrungszustand* gilt $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$.

1.3 Elastizitätsgesetz

Durch das HOOKEsche Elastizitätsgesetz wird die experimentell festgestellte lineare Beziehung zwischen Spannungen und Verzerrungen ausgedrückt. Seine Gültigkeit wird durch die *Proportionalitätsgrenze* (1-achs. σ_p) begrenzt. Diese fällt bei elastisch–plastischen Werkstoffen meist mit der *Fließgrenze* (1-achs. σ_F) zusammen.

Einachsiger Spannungszustand (Stab, Balken)

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T} \; .$$

E – Elastizitätsmodul,
α_T – Temperaturausdehnungskoeffizient,
ΔT – Temperaturerhöhung.

Ebener Spannungszustand

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \alpha_T \Delta T \; , \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \alpha_T \Delta T \; , \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \quad ,
\end{aligned}$$

$$\text{Schubmodul:} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \; , \qquad \text{Querdehnzahl:} \quad \nu \; .$$

Dreiachsiger Spannungszustand

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha_T \Delta T \; , & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \; , \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha_T \Delta T \; , & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz} \; , \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha_T \Delta T \; , & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G}\tau_{zx} \; .
\end{aligned}$$

Einige Materialkennwerte

Material	E [MPa]	ν	α_T [1/°C]
Stahl	$2,1 \cdot 10^5$	$0,3$	$12 \cdot 10^{-6}$
Aluminium	$0,7 \cdot 10^5$	$0,3$	$23 \cdot 10^{-6}$
Kupfer	$1,2 \cdot 10^5$	$0,3$	$16 \cdot 10^{-6}$
Beton	$0,3 \cdot 10^5$	$0,15 \ldots 0,3$	$10 \cdot 10^{-6}$
Holz	$0,1 \cdot 10^5$		$3 \ldots 9 \cdot 10^{-6}$

Anmerkung: $1\text{MPa} = 10^6\text{Pa} = 10^3\text{kN/m}^2 = 1\text{N/mm}^2$

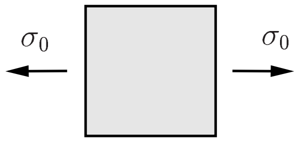
Aufgabe 1.1: Für die folgenden Spezialfälle des ebenen Spannungszustandes sind die Spannungskomponenten für beliebige Schnitte, die Hauptspannungen und Hauptspannungsrichtungen sowie die maximalen Schubspannungen zu bestimmen:

a) $\sigma_x = \sigma_0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$ (einachsiger Zug),

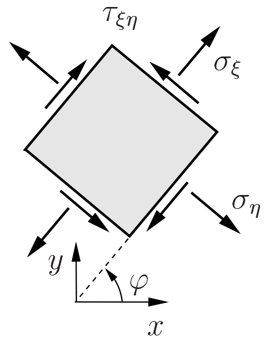
b) $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0$, $\tau_{xy} = 0$ (zweiachsiger, gleicher Zug),

c) $\sigma_x = \sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = \tau_0$ (reiner Schub).

Lösung: **zu a)** Die Spannungskomponenten für einen beliebigen, unter dem Winkel φ zur x- bzw. zur y-Richtung liegenden Schnitt erhält man durch Einsetzen von σ_x, σ_y und τ_{xy} in die Transformationsbeziehungen:

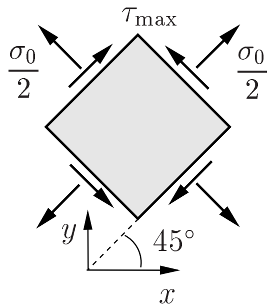


$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\sigma_\xi}} &= \tfrac{1}{2}(\sigma_0 + 0) + \tfrac{1}{2}(\sigma_0 - 0)\cos 2\varphi + 0 \cdot \sin 2\varphi \\
&= \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\sigma_0(1 + \cos 2\varphi)}}\ , \\
\underline{\underline{\sigma_\eta}} &= \tfrac{1}{2}(\sigma_0 + 0) - \tfrac{1}{2}(\sigma_0 - 0)\cos 2\varphi - 0 \cdot \sin 2\varphi \\
&= \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\sigma_0(1 - \cos 2\varphi)}}\ , \\
\underline{\underline{\tau_{\xi\eta}}} &= -\tfrac{1}{2}(\sigma_0 - 0)\sin 2\varphi + 0 \cdot \cos 2\varphi \\
&= \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\sigma_0 \sin 2\varphi}}\ .
\end{aligned}$$



Wegen $\tau_{xy} = 0$ sind die Spannungen σ_x, σ_y Hauptspannungen und die x- bzw. y-Richtung die Hauptrichtungen:

$$\underline{\underline{\sigma_1}} = \sigma_x = \underline{\underline{\sigma_0}}\,, \qquad \underline{\underline{\sigma_2}} = \sigma_y = \underline{\underline{0}}\,, \qquad \varphi_1^* = 0\ , \quad \varphi_2^* = \pm\frac{\pi}{2}\,.$$



Für die maximale Schubspannung und die entsprechenden Schnittrichtungen folgt

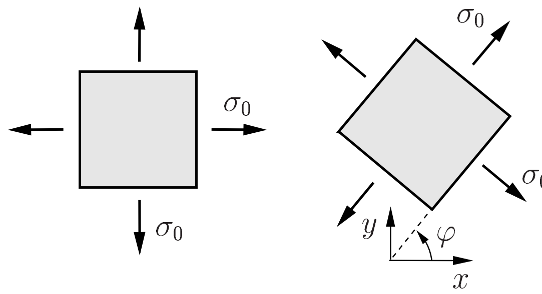
$$\underline{\underline{\tau_{\max}}} = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sigma_0}}\,, \qquad \varphi^{**} = \pm\frac{\pi}{4}\,.$$

Hinweis: Eine Scheibe aus einem Material, das nur begrenzte *Schubspannungen* aufnehmen kann, würde entlang von Linien unter ±45° zur x-Achse versagen.

zu b) Einsetzen der gegebenen Werte in die Transformationsbeziehungen liefert

$$\underline{\underline{\sigma_\xi = \sigma_0}}\,, \qquad \underline{\underline{\sigma_\eta = \sigma_0}}\,, \qquad \underline{\underline{\tau_{\xi\eta} = 0}}\,.$$

Danach tritt in jedem Schnitt die Normalspannung σ_0 auf, und die Schubspannung ist Null. Es gibt also keine ausgezeichnete Hauptrichtung; jeder Schnitt ist ein Hauptschnitt:



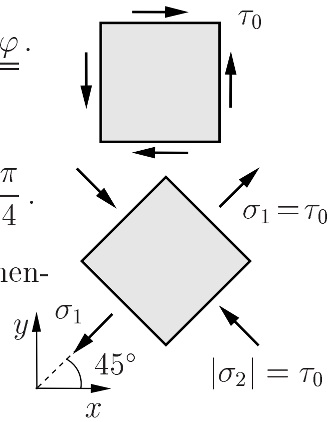
$$\underline{\underline{\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0}}\ .$$

zu c) In diesem Fall ergibt sich aus den Transformationsbeziehungen

$$\underline{\underline{\sigma_\xi = \tau_0 \sin 2\varphi}}\,, \qquad \underline{\underline{\sigma_\eta = -\tau_0 \sin 2\varphi}}\,, \qquad \underline{\underline{\tau_{\xi\eta} = \tau_0 \cos 2\varphi}}\,.$$

Die Hauptspannungen und -richtungen folgen zu

$$\underline{\underline{\sigma_1 = +\tau_0}}\,, \qquad \underline{\underline{\sigma_2 = -\tau_0}}\,, \qquad \varphi_1^* = \frac{\pi}{4}\,, \quad \varphi_2^* = -\frac{\pi}{4}\,.$$



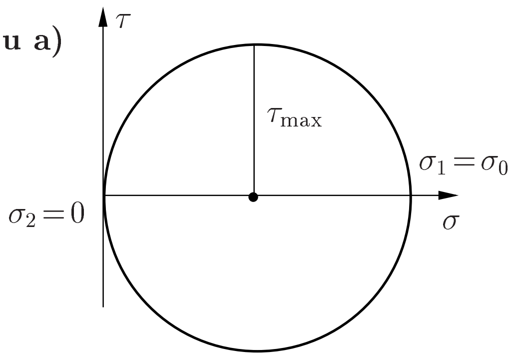
Für die maximale Schubspannung und die entsprechenden Schnitte erhält man schließlich

$$\underline{\underline{\tau_{\max} = \tau_0}}\,, \qquad \varphi_1^{**} = 0\,, \qquad \varphi_2^{**} = \pi/2\,.$$

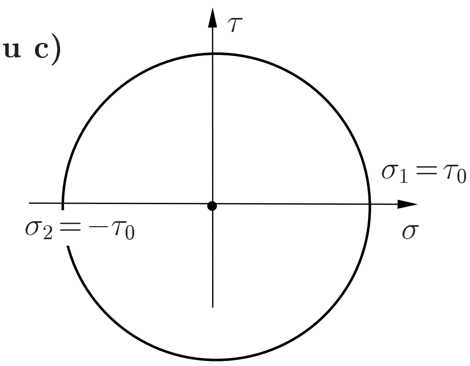
Hinweis: Eine Scheibe aus einem Material, das nur begrenzte *Normalspannungen* aufnehmen kann, würde entlang von Linien unter $\pm 45^o$ zur x-Achse versagen.

Alle Ergebnisse für die drei Spannungszustände lassen sich auch aus den MOHRschen Kreisen ablesen:

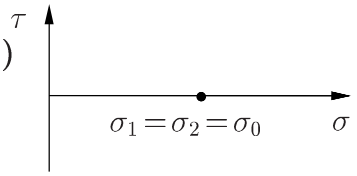
zu a)



zu c)



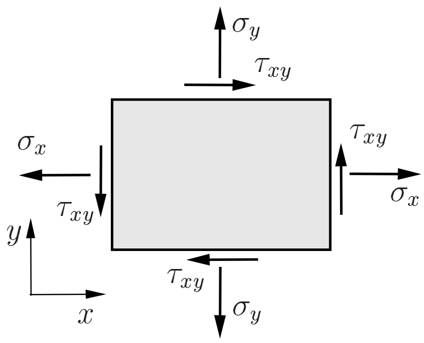
zu b)



Beachte: Im Fall **b)** entartet der MOHRsche Kreis zu einem Punkt auf der σ-Achse!

Aufgabe 1.2: In einem Blech seien die Spannungen σ_x, σ_y, τ_{xy} bekannt. Gesucht sind die Größe und die Richtung der Hauptspannungen.

Geg.: $\sigma_x = 20$ MPa, $\sigma_y = 30$ MPa,
$\tau_{xy} = 10$ MPa.



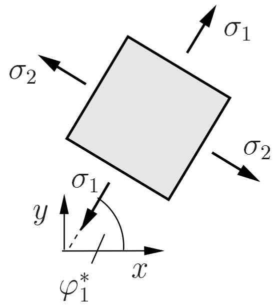
Lösung: Wir gehen zunächst analytisch vor. Die Hauptspannungen errechnen sich aus

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 25 \pm \sqrt{25 + 100} = 25 \pm 11,18$$

zu

$$\underline{\underline{\sigma_1 = 36,18 \text{ MPa}}}\,, \qquad \underline{\underline{\sigma_2 = 13,82 \text{ MPa}}}\,.$$

Für die Hauptspannungsrichtungen erhält man aus



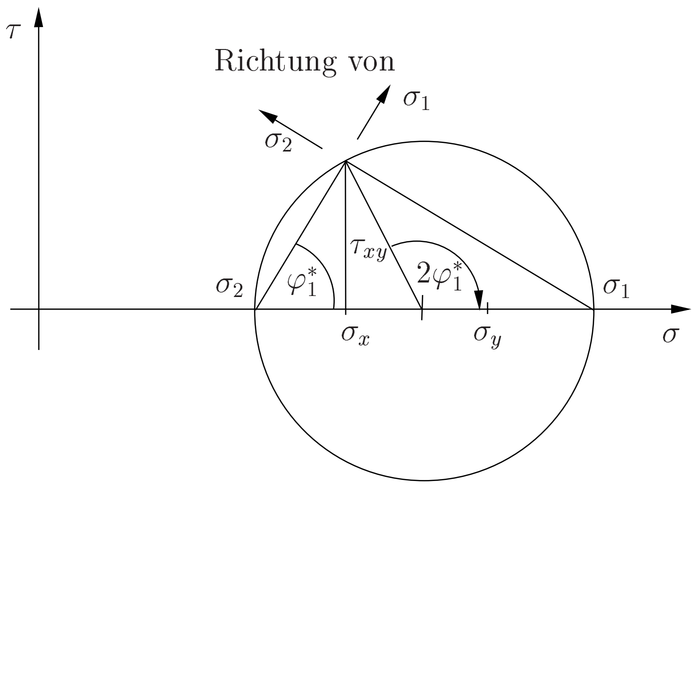
$$\tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -2$$

die Ergebnisse

$$\underline{\underline{\varphi_1^* = 58,28^\circ}}\,, \qquad \underline{\underline{\varphi_2^* = 148,28^\circ}}.$$

Zur Verdeutlichung ist es zweckmäßig, das durch die Hauptspannungen belastete Element zu skizzieren.

Man kann die Aufgabe auch grafisch mit Hilfe des Mohrschen Kreises lösen:



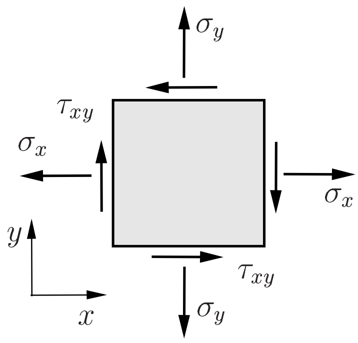
Maßstab: 10 MPa

Man liest ab:

$\sigma_1 \cong 36,5$ MPa ,
$\sigma_2 \cong 14$ MPa ,
$\varphi_1^* \cong 59^\circ$.

Aufgabe 1.3: In einer Scheibe wirken die Spannungen $\sigma_x = 20$ MPa, $\sigma_y = 60$ MPa und $\tau_{xy} = -40$ MPa.

Bestimmen Sie analytisch und grafisch die Hauptspannungen und die maximale Schubspannung sowie deren Richtungen. Die zugehörigen Schnittbilder sind zu skizzieren.

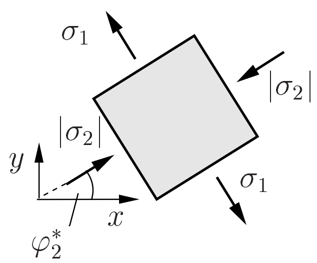


Lösung: Die Hauptspannungen und deren Richtungen ergeben sich analytisch zu

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= 40 \pm \sqrt{(20)^2 + (40)^2}\,,$$

$$\leadsto \quad \underline{\underline{\sigma_1 = 84,72 \text{ MPa}}}\,, \quad \underline{\underline{\sigma_2 = -4,72 \text{ MPa}}}\,,$$



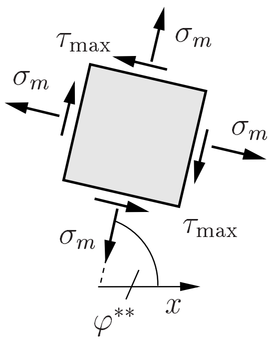
$$\tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = 2 \quad \leadsto \quad \underline{\underline{\varphi_1^* = 121,7^\circ}}\,, \quad \underline{\underline{\varphi_2^* = 31,7^\circ}}\,.$$

Welcher Winkel zu welcher Hauptspannung gehört, kann nur durch Einsetzen in die Transformationsbeziehungen bzw. am Mohrschen Kreis geklärt werden.

Für die maximale Schubspannung folgt

$$\underline{\underline{\tau_{\max}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \underline{\underline{44,72 \text{ MPa}}}\,,$$

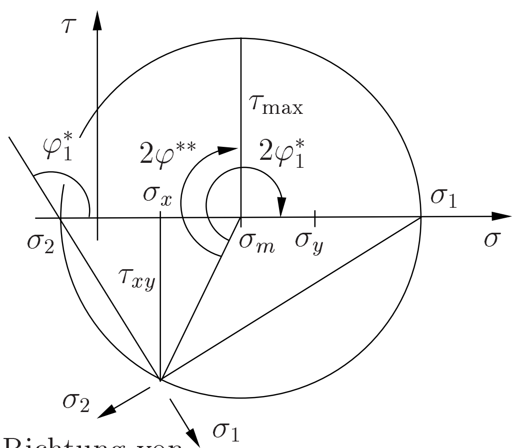
$$\underline{\underline{\varphi^{**}}} = \varphi^* \pm 45^\circ = \underline{\underline{31,7^\circ \pm 45^\circ}}\,.$$



Die grafische Lösung erhält man aus dem Mohrschen Kreis:

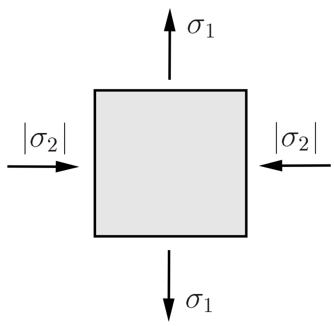
Maßstab: 20 MPa

$$\sigma_1 \cong 85 \text{ MPa}\,,$$
$$\sigma_2 \cong -5 \text{ MPa}\,,$$
$$\tau_{\max} \cong 45 \text{ MPa}\,,$$
$$\varphi_1^* \cong 122^\circ\,,$$
$$\varphi^{**} \cong 77^\circ\,.$$



Aufgabe 1.4: In einem ebenen Bauteil herrschen die Hauptspannungen

$$\sigma_1 = 96 \text{ MPa} \quad \text{und} \quad \sigma_2 = -52 \text{ MPa} .$$

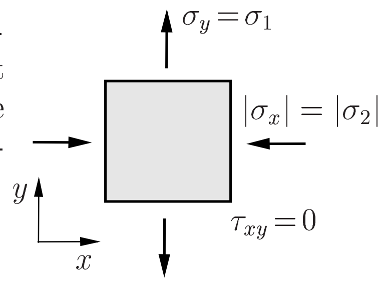


a) Wie groß sind die Spannungen in Schnitten, die um $\varphi^a = 60°$ gegenüber den Hauptachsen geneigt sind?

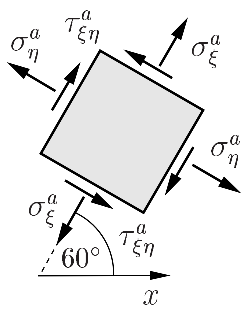
b) In welchem Schnitt φ^b wird die Normalspannung Null? Wie groß sind dann die Schubspannung und die Normalspannung in einer zu φ^b senkrechten Richtung?

c) In welchen Schnitten treten die maximalen Schubspannungen auf und wie groß sind die zugehörigen Normalspannungen?

Lösung: **zu a)** Entsprechend der Skizze verwenden wir ein Koordinatensystem x, y, das mit den Hauptachsen zusammenfällt. Dann folgen die Spannungen in den um $\varphi^a = 60°$ gedrehten Schnitten aus den Transformationsbeziehungen zu



$$\begin{aligned}
\sigma_\xi^a &= \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \cos 2\varphi^a = 22 + 74 \cdot \frac{1}{2} \\
&= \underline{\underline{59 \text{ MPa}}} , \\
\sigma_\eta^a &= \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2} - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \cos 2\varphi^a = 22 - 74 \cdot \frac{1}{2} \\
&= \underline{\underline{-15 \text{ MPa}}} , \\
\tau_{\xi\eta}^a &= -\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \sin 2\varphi^a = 74 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \\
&= \underline{\underline{64,1 \text{ MPa}}} .
\end{aligned}$$



zu b) Damit die Normalspannung σ_ξ Null wird, muss gelten

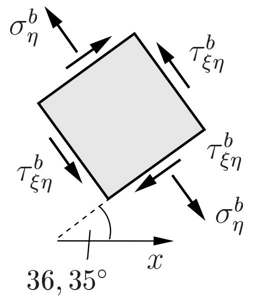
$$\sigma_\xi^b = \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \cos 2\varphi^b = 0$$

$$\rightsquigarrow \quad \cos 2\varphi^b = \frac{22}{74} = 0,297 \quad \rightsquigarrow \quad 2\varphi^b = 72,7° \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\underline{\varphi^b = 36,35°}} \quad .$$

Für σ_η^b und $\tau_{\xi\eta}^b$ erhält man

$$\underline{\underline{\sigma_\eta^b}} \;=\; \frac{\sigma_2+\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\cos 2\varphi^b = \underline{\underline{44\ \text{MPa}}}\ ,$$

$$\underline{\underline{\tau_{\xi\eta}^b}} \;=\; -\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\sin 2\varphi^b = 74\cdot 0,955$$
$$= \underline{\underline{70,7\ \text{MPa}}}\ .$$



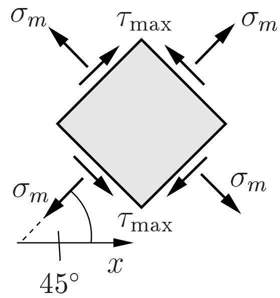
zu c) Die maximale Schubspannung tritt in Schnitten unter ±45° zu den Hauptachsen auf. Sie hat die Größe

$$\underline{\underline{\tau_{\max}}} = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} = \underline{\underline{74\ \text{MPa}}}\ .$$

Die zugehörigen Normalspannungen nehmen den Wert

$$\underline{\underline{\sigma_m}} = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} = \underline{\underline{22\ \text{MPa}}}$$

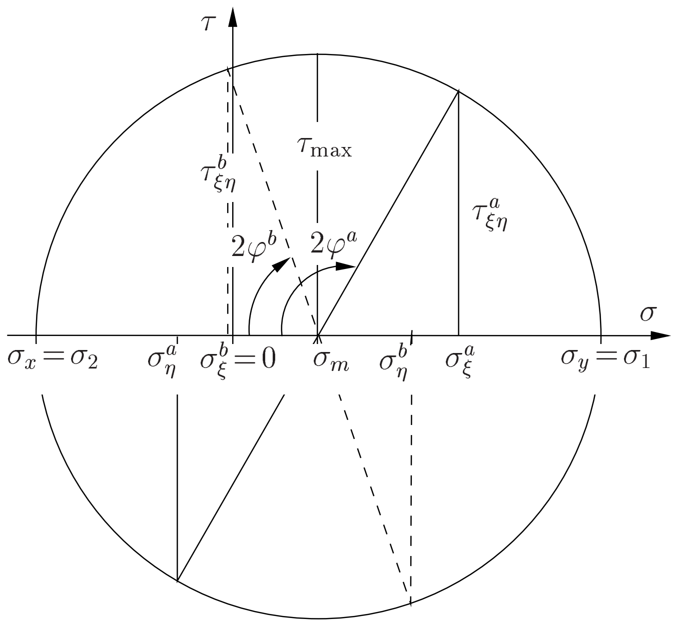
an.



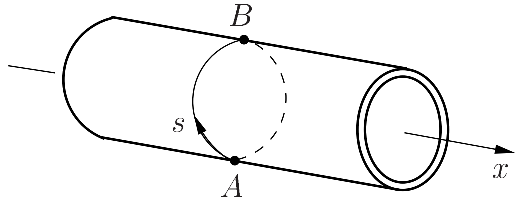
Alle Informationen lassen sich auch aus dem MOHRschen Spannungskreis entnehmen:

Maßstab: 50 MPa

$\sigma_\xi^a \cong 59$ MPa ,
$\sigma_\eta^a \cong -15$ MPa ,
$\tau_{\xi\eta}^a \cong 64$ MPa ,
$\varphi^b \cong 37°$,
$\sigma_\eta^b \cong 44$ MPa ,
$\tau_{\xi\eta}^b \cong 71$ MPa ,
$\tau_{\max} \cong 74$ MPa ,
$\sigma_m \cong 22$ MPa .



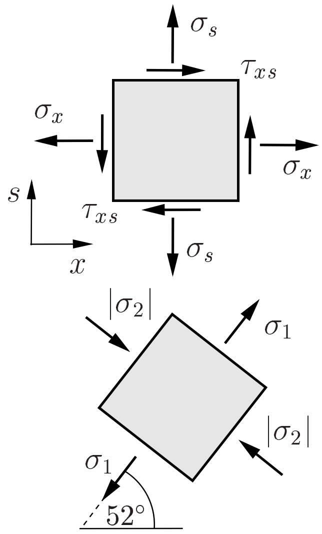
Aufgabe 1.5: Ein dünnwandiges Rohr wird durch ein Biegemoment, einen Innendruck und ein Torsionsmoment belastet. Dabei treten in den Punkten A und B folgende Spannungen auf:



$$\sigma_x^{A,B} = \pm 25 \text{ MPa}\,, \quad \sigma_s^{A,B} = 50 \text{ MPa}\,, \quad \tau_{xs}^{A,B} = 50 \text{ MPa}\,.$$

Es sind die Größe und die Richtung der Hauptspannungen in A und B zu bestimmen.

Lösung: Für den Punkt A folgen die Hauptspannungen aus



$$\begin{aligned}\sigma_{1,2} &= \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_s) \pm \sqrt{[\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_s)]^2 + \tau_{xs}^2} \\ &= 37,5 \pm \sqrt{(-12,5)^2 + 50^2} \\ &= 37,5 \pm 51,54\end{aligned}$$

zu

$$\underline{\underline{\sigma_1 = 89,04 \text{ MPa}}}\,, \qquad \underline{\underline{\sigma_2 = -14,04 \text{ MPa}}}\,.$$

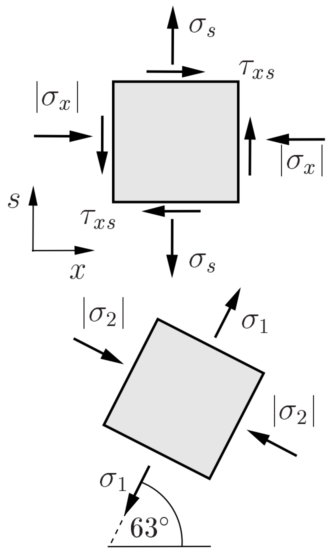
Für die Hauptspannungsrichtungen erhält man

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xs}}{\sigma_x - \sigma_s} = \frac{2 \cdot 50}{25 - 50} = -4 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\underline{\varphi_1^* = 52,02^\circ}}\,, \quad \underline{\underline{\varphi_2^* = -37,98^\circ}}\,.$$

Dass die Richtung φ_1^* zur Hauptspannung σ_1 gehört, kann man durch Einsetzen in die Transformationsbeziehungen erkennen:

$$\begin{aligned}\sigma_\xi &= \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_s) + \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_s)\cos 2\varphi_1^* + \tau_{xs}\sin 2\varphi_1^* \\ &= 37,5 - 12,5 \cdot (-0,242) + 50 \cdot 0,970 \\ &= 89,3 \text{ MPa} = \sigma_1\,.\end{aligned}$$

Auf gleiche Weise ergeben sich die Hauptspannungen und ihre Richtungen für den Punkt B:



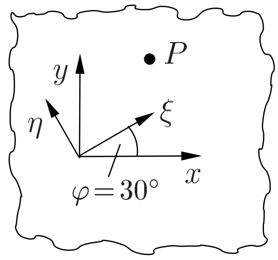
$$\begin{aligned}\sigma_{1,2} &= 12,5 \pm \sqrt{(-37,5)^2 + 50^2} \\ &= 12,5 \pm 62,5\end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \quad \underline{\underline{\sigma_1 = 75,0 \text{ MPa}}}\,, \qquad \underline{\underline{\sigma_2 = -50,0 \text{ MPa}}}\,.$$

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2 \cdot 50}{-25 - 50} = -1,33$$

$$\rightsquigarrow \quad \underline{\underline{\varphi_1^* = 63,4^\circ}}\,, \qquad \underline{\underline{\varphi_2^* = -26,6^\circ}}\,.$$

Aufgabe 1.6: In einem dünnen Aluminiumblech ($E = 0,7 \cdot 10^5\,\text{MPa}$, $\nu = 0,3$) werden im Punkt P die Verzerrungen $\varepsilon_x = 0,001$, $\varepsilon_y = 0,0005$, $\gamma_{xy} = 0$ aus Messungen bestimmt.



Wie groß sind die Hauptspannungen, die maximale Schubspannung sowie die Spannungen in Schnitten, die unter $\varphi = 30°$ zu den Hauptachsen geneigt sind?

Lösung: Im Blech herrscht ein ebener Spannungszustand. Aus dem entsprechenden Elastizitätsgesetz

$$E\varepsilon_x = \sigma_x - \nu\sigma_y\,, \qquad E\varepsilon_y = \sigma_y - \nu\sigma_x\,, \qquad G\gamma_{xy} = \tau_{xy}$$

folgen die Spannungen zu

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\sigma_x}} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) = \frac{0,7 \cdot 10^5}{1-0,09}(0,001 + 0,00015) = \underline{\underline{88,5\ \text{MPa}}}\,,\\
\underline{\underline{\sigma_y}} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) = \frac{0,7 \cdot 10^5}{1-0,09}(0,0005 + 0,0003) = \underline{\underline{61,5\ \text{MPa}}}\,,\\
\underline{\underline{\tau_{xy} = 0}}\,.
\end{aligned}$$

Da die Schubspannung τ_{xy} Null ist, sind σ_x, σ_y Hauptspannungen, und die Achsen x, y sind Hauptachsen:

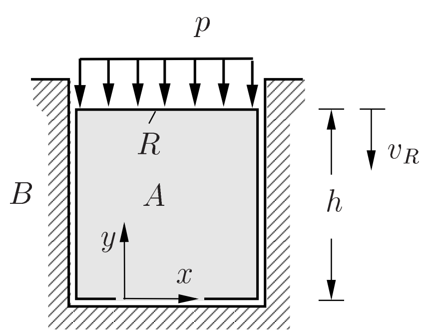
$$\sigma_x = \sigma_1 \qquad \sigma_y = \sigma_2\,.$$

Die maximale Schubspannung folgt damit zu

$$\underline{\underline{\tau_{\max}}} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) = \underline{\underline{13,5\ \text{MPa}}}\,.$$

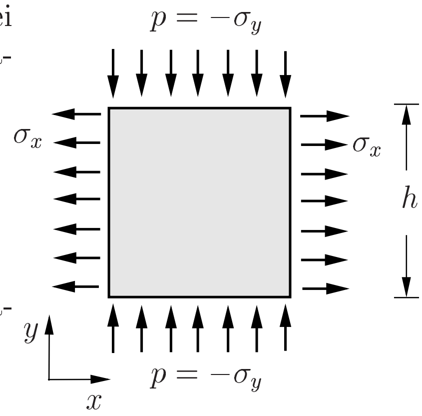
Für die unter $\varphi = 30°$ geneigten Schnitte ergibt sich mit $\tau_{xy} = 0$ aus den Transformationsbeziehungen

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\sigma_\xi}} &= \frac{\sigma_x + \sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi &&= 75 + 13,5\cos 60° = \underline{\underline{81,75\ \text{MPa}}}\,,\\
\underline{\underline{\sigma_\eta}} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi &&= 75 - 13,5\cos 60° = \underline{\underline{68,25\ \text{MPa}}}\,,\\
\underline{\underline{\tau_{\xi\eta}}} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\varphi &&= -13,5\sin 60° = \underline{\underline{-11,69\ \text{MPa}}}\,.
\end{aligned}$$



Aufgabe 1.7: In einen starren Sockel B wird eine passende elastische Scheibe A (Elastizitätsmodul E, Querdehnzahl ν) der Höhe h eingesetzt.

Wie groß ist die Spannung σ_x und um welchen Betrag v_R verschiebt sich der Rand R unter der konstanten Druckspannung p? Dabei sei angenommen, dass die Scheibe an den Sockelberandungen reibungsfrei gleiten kann.



Lösung: In der Scheibe herrscht ein gleichförmiger ebener Spannungszustand, wobei die Spannung σ_y bekannt ist: $\sigma_y = -p$. Damit lautet das Elastizitätsgesetz

$$E\varepsilon_x = \sigma_x - \nu\sigma_y = \sigma_x + \nu p\,,$$

$$E\varepsilon_y = \sigma_y - \nu\sigma_x = -p - \nu\sigma_x\,.$$

Da die Scheibe in x-Richtung keine Deformationen erfährt, gilt

$$\varepsilon_x = 0\,.$$

Einsetzen liefert die gesuchte Spannung σ_x und die Dehnung in y-Richtung:

$$\underline{\underline{\sigma_x = -\nu p}}\,, \qquad \varepsilon_y = -p\,\frac{1-\nu^2}{E}\,.$$

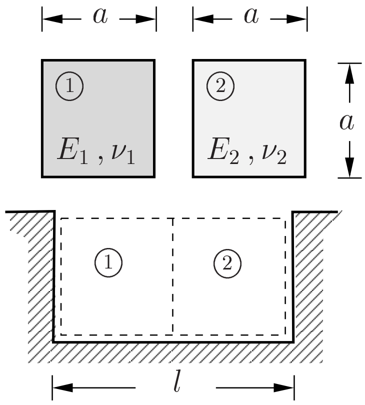
Aus der nun bekannten Dehnung ε_y erhält man die Verschiebung v durch Integration:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y \quad \rightsquigarrow \quad v(y) = \int \varepsilon_y \mathrm{d}y = -p\,\frac{1-\nu^2}{E}\,y + C \quad .$$

Da der untere Rand der Scheibe keine Verschiebung erfährt, gilt $v(0) = 0$, d. h. $C = 0$. Für den Betrag der Verschiebung am oberen Rand folgt damit

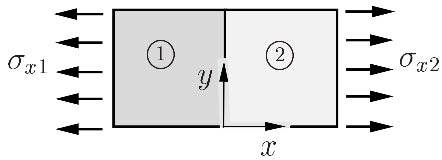
$$\underline{\underline{v_R = |v(h)| = \frac{1-\nu^2}{E}\,ph}}\,.$$

Aufgabe 1.8: Zwei quadratische Scheiben aus verschiedenem Material haben im unbelasteten Zustand die Seitenlängen a. Sie werden entsprechend der Skizze in einen starren Sockel eingepresst, dessen Öffnung l kleiner ist als $2a$.



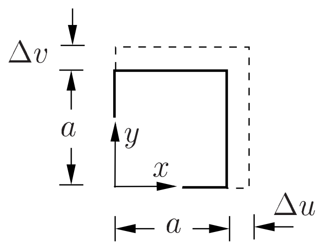
Wie groß sind die Spannungen und die Änderungen der Seitenlängen, wenn angenommen wird, dass die Scheiben an allen Rändern reibungsfrei gleiten können?

Lösung: In den Scheiben herrscht nach dem Einpressen in den Sockel ein gleichförmiger ebener Spannungszustand. Gleichgewicht in horizontaler Richtung liefert $\sigma_{x1} = \sigma_{x2} = \sigma_x$. Unter Beachtung von $\sigma_{y1} = \sigma_{y2} = 0$ lauten damit die Elastizitätsgesetze für die beiden Scheiben



1 $\qquad E_1\varepsilon_{x1} = \sigma_x\,, \qquad E_1\varepsilon_{y_1} = -\nu_1\sigma_x\,,$

2 $\qquad E_2\varepsilon_{x2} = \sigma_x\,, \qquad E_2\varepsilon_{y_2} = -\nu_2\sigma_x\,.$



Mit den Dehnungs–Verschiebungsbeziehungen (konstante Dehnungen)

$$\varepsilon_{x1} = \frac{\Delta u_1}{a}\,, \qquad \varepsilon_{y1} = \frac{\Delta v_1}{a}\,, \qquad \varepsilon_{x2} = \frac{\Delta u_2}{a}\,, \qquad \varepsilon_{y2} = \frac{\Delta v_2}{a}$$

und der kinematischen Verträglichkeitsbedingung

$$(a + \Delta u_1) + (a + \Delta u_2) = l$$

erhält man zunächst für die Spannung

$$\underline{\underline{\sigma_x = -\frac{2a-l}{a}\,\frac{E_1E_2}{E_1+E_2}}}\,.$$

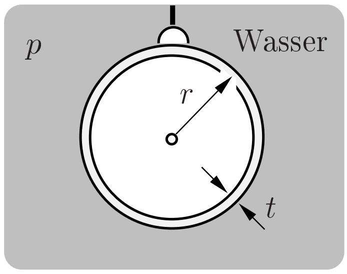
Damit ergeben sich dann die Längenänderungen

$$\underline{\underline{\Delta u_1 = -(2a-l)\frac{E_2}{E_1+E_2}}}\,, \qquad \underline{\underline{\Delta u_2 = -(2a-l)\frac{E_1}{E_1+E_2}}}\,,$$

$$\underline{\underline{\Delta v_1 = -\nu_1\Delta u_1}}\,, \qquad \underline{\underline{\Delta v_2 = -\nu_2\Delta u_2}}\,.$$

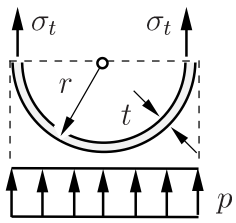
Aufgabe 1.9: Eine dünnwandige Tauchkugel (Radius $r = 500$ mm, Wandstärke $t = 12,5$ mm) befindet sich 500 m unter der Wasseroberfläche (Druck $p = 5$ MPa).

Wie groß sind die Spannungen in der Wandung?



Lösung: Wir teilen die Kugel durch einen beliebigen Schnitt senkrecht zur Oberfläche, so dass Halbkugeln entstehen. Die Gleichgewichtsbedingung

$$\uparrow: \quad \sigma_t 2\pi r t + p r^2 \pi = 0$$

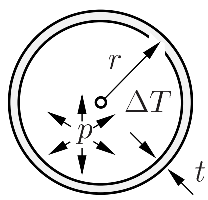


liefert dann für jeden Schnitt (Kugelsymmetrie) die Spannung

$$\underline{\underline{\sigma_t}} = -p\,\frac{r}{2t} = -5\,\frac{500}{2 \cdot 12,5} = \underline{\underline{-100 \text{ MPa}}}\,.$$

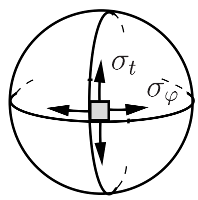
Aufgabe 1.10: Ein kugelförmiger Stahlkessel wird durch heißes Gas um die Temperatur $\Delta T = 200\,^\circ$C erwärmt und durch den Druck $p = 1$ MPa belastet.

Wie groß ist die Änderung des Radius?
Geg.: $r = 2\,\text{m}$, $t = 10\,\text{mm}$, $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa,
$\nu = 0,3$, $\alpha_T = 12 \cdot 10^{-6}\,^\circ\text{C}^{-1}$.



Lösung: Aus der Gleichgewichtsbedingung folgt für jeden Schnitt senkrecht zur Kugeloberfläche

$$\sigma_t = \sigma_\varphi = p\,\frac{r}{2t}\,.$$

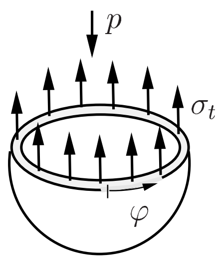


Die Dehnung ergibt sich aus der Umfangsänderung zu

$$\varepsilon_t = \varepsilon_\varphi = \frac{2\pi(r + \Delta r) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{\Delta r}{r}\,.$$

Einsetzen in das Elastizitätsgesetz

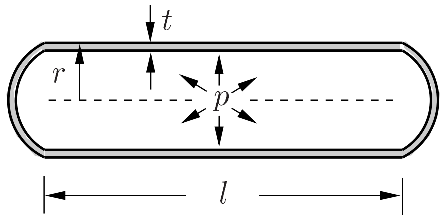
$$E\varepsilon_t = \sigma_t - \nu\sigma_\varphi + E\alpha_T \Delta T$$



liefert

$$\underline{\underline{\Delta r}} = r\left[\frac{p\,r(1-\nu)}{2Et} + \alpha_T \Delta T\right] = 2000\left[\frac{10^{-3}}{3} + 2,4 \cdot 10^{-3}\right] = \underline{\underline{5,5 \text{ mm}}}\,.$$

Aufgabe 1.11: Ein dünnwandiger Zylinderkessel aus Stahl wird durch den Innendruck p belastet.

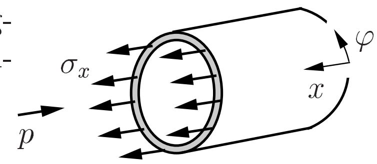


Wie groß darf die Spannung höchstens sein, damit die größte Normalspannung im ungestörten Bereich die zulässige Spannung σ_{zul} nicht überschreitet?

Wie groß sind in diesem Fall die Änderungen vom Radius r und Länge l?

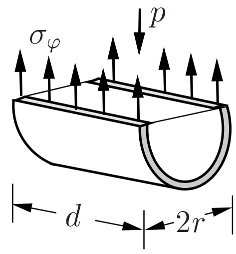
Geg.: $l = 5$ m, $r = 1$ m, $t = 1$ cm, $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa, $\nu = 0,3$,
$\sigma_{\text{zul}} = 150$ MPa.

Lösung: Die Spannungen ergeben sich nach geeignetem Schneiden aus den Gleichgewichtsbedingungen:



$$\rightarrow \;:\; pr^2\pi - \sigma_x 2r\pi t = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\underline{\sigma_x = p\,\frac{r}{2t}}}\,,$$

$$\uparrow \;:\; \sigma_\varphi 2d\,t - p2rd = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\underline{\sigma_\varphi = p\,\frac{r}{t}}}\,.$$



Diese Spannungen sind Hauptspannungen, da Schubspannungen in den Schnitten nicht auftreten. Damit die größte Normalspannung die zulässige Spannung nicht überschreitet, muss gelten

$$\sigma_\varphi \le \sigma_{\text{zul}} \quad \rightsquigarrow \quad p \le \frac{t}{r}\sigma_{\text{zul}} = 1,5 \text{ MPa} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\underline{p_{\max} = 1,5 \text{ MPa}}}\,.$$

Die Dehnung ε_φ ergibt sich aus der Umfangsänderung:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{2\pi(r+\Delta r) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{\Delta r}{r}\,.$$

Einsetzen in das Elastizitätsgesetz $E\varepsilon_\varphi = \sigma_\varphi - \nu\sigma_t$ liefert

$$\underline{\underline{\Delta r}} = r\,\frac{p_{\max} r}{Et}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right) = \underline{\underline{0,61 \text{ mm}}}\,.$$

Auf die gleiche Weise ergibt sich aus der Dehnung $\varepsilon_t = \Delta l/l$ und dem Elastizitätsgesetz $E\varepsilon_t = \sigma_t - \nu\sigma_\varphi$ für die Längenänderung

$$\underline{\underline{\Delta l}} = l\,\frac{p_{\max} r}{Et}\left(\frac{1}{2} - \nu\right) = \underline{\underline{0,71 \text{ mm}}}\,.$$

Anmerkung: Die Deckel des Kessels sind aus der Betrachtung ausgeschlossen, d. h. die Lösung für die Spannungen gilt erst in hinreichender Entfernung von den Deckeln.

Aufgabe 1.12: Die Schienen eines Eisenbahngleises werden bei einer Temperatur von 15°C so verlegt, dass keine inneren Kräfte auftreten.

Wie groß ist die Spannung bei einer Temperatur von −25°C, wenn angenommen wird, dass die Schienen keine Längenänderung erleiden können?
Geg.: $E = 2,1 \cdot 10^5\,\text{MPa}$, $\alpha_T = 12 \cdot 10^{-6}\,{}^\circ\text{C}^{-1}$.

Lösung: In der Schiene herrscht ein einachsiger Spannungszustand, und das Elastizitätsgesetz lautet

$$E\,\varepsilon = \sigma + E\,\alpha_T\,\Delta T\ .$$

Da keine Verschiebungen auftreten, muss ε Null sein. Mit $\Delta T = -40°\text{C}$ folgt daher für die Spannung

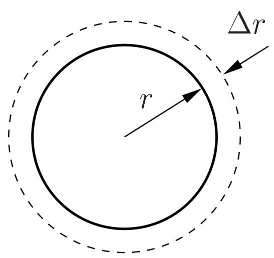
$$\underline{\underline{\sigma}} = -E\,\alpha_T\,\Delta T = 2,1 \cdot 10^5 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 40 = \underline{\underline{100,8\ \text{MPa}}}\ .$$

Beachte: Die Temperaturspannungen in Schienen können recht groß werden!

Aufgabe 1.13: Ein dünner Kupferring vom Radius r wird um die Temperaturdifferenz ΔT erwärmt.

Wie groß sind die Änderungen von Radius und Umfang, wenn sich der Ring frei deformieren kann?
Geg.: $r = 100$ mm, $\alpha_T = 16 \cdot 10^{-6}\,{}^\circ\text{C}^{-1}$, $\Delta T = 50°\text{C}$.

Lösung: Im Ring herrscht nach der Erwärmung ein gleichförmiger, spannungsfreier, einachsiger Dehnungszustand. Die Dehnung ist durch die Umfangsänderung (Längenänderung) Δl bestimmt:



$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{2\pi(r+\Delta r) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{\Delta r}{r}\ .$$

Aus dem einachsigen Elastizitätsgesetz

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T$$

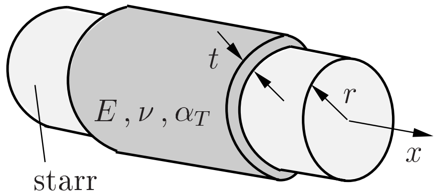
folgen mit $\sigma = 0$ durch Einsetzen

$$\underline{\underline{\Delta r}} = r\,\alpha_T \Delta T = 100 \cdot 16 \cdot 10^{-6} \cdot 50 = \underline{\underline{0,08\ \text{mm}}}\ ,$$

$$\underline{\underline{\Delta l}} = \frac{l}{r}\Delta r = 2\pi\Delta r = \underline{\underline{0,50\ \text{mm}}}\ .$$

Aufgabe 1.14: Eine dünnwandige Muffe muss um die Temperaturdifferenz ΔT^* erwärmt werden, damit sie auf eine Welle geschoben werden kann.

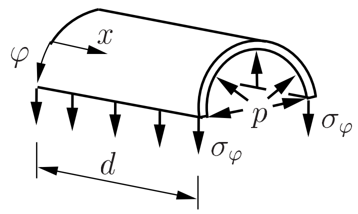
Wie groß sind die Spannungen in der Muffe und der Druck p zwischen Muffe und Welle nach dem Abkühlen? Es sei angenommen, dass die Welle *starr* ist und die Verschiebungen der Muffe in $x-$Richtung infolge Haftung verhindert werden.



Lösung: Vor dem Abkühlen ist die Muffe spannungsfrei. Die Spannungen nach dem Abkühlen ergeben sich aus dem Gleichgewicht, dem Elastizitätsgesetz und der Kinematik. Die Gleichgewichtsbedingung liefert

$$p \cdot 2rd = \sigma_\varphi 2t\, d \quad \rightsquigarrow \quad \sigma_\varphi = p\,\frac{r}{t}\ .$$

Das Elastizitätsgesetz lautet mit $\Delta T = -\Delta T^*$ (Abkühlvorgang!)



$$E\varepsilon_\varphi = \sigma_\varphi - \nu\sigma_x - E\alpha_T\Delta T^*\ ,$$

$$E\varepsilon_x = \sigma_x - \nu\sigma_\varphi - E\alpha_T\Delta T^*\ .$$

Beim Abkühlen werden die Dehnungen der Muffe (Schrumpfen) durch die starre Welle und durch die Haftung verhindert. Demnach lauten die kinematischen Bedingungen

$$\varepsilon_\varphi = 0\ , \qquad \varepsilon_x = 0\ .$$

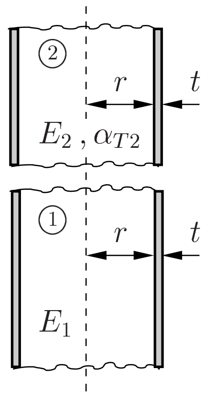
Einsetzen und Auflösen liefert für die Spannungen und den Druck

$$\underline{\underline{\sigma_x = \sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu}\,\alpha_T\Delta T^*}}\ , \qquad \underline{\underline{p = \frac{t}{r}\,\frac{E}{1-\nu}\,\alpha_T\Delta T^*}}\ .$$

Anmerkungen:

- In der Muffe herrscht ein ebener Spannungszustand mit allseits gleichen Normalspannungen: $\sigma_x = \sigma_\varphi$.
- Kann sich das Rohr in x-Richtung frei deformieren (keine Haftung, $\varepsilon_x \neq 0$), so ist $\sigma_x = 0$, und es folgt $\sigma_\varphi = E\alpha_T\Delta T^*$.

Aufgabe 1.15: Auf die dünnwandige elastische Welle ① soll das Rohr ② aufgeschrumpft werden. Beide Teile haben vor dem Aufschrumpfen gleiche geometrische Abmessungen, sind aber aus unterschiedlichem Material.



Um welche Temperaturdifferenz muss das Rohr ② erwärmt werden, damit es auf die Welle ① aufgeschoben werden kann?

Wie groß ist der Druck p zwischen Welle und Rohr nach dem Abkühlen, wenn angenommen wird, dass Spannungen in axialer Richtung nicht auftreten?

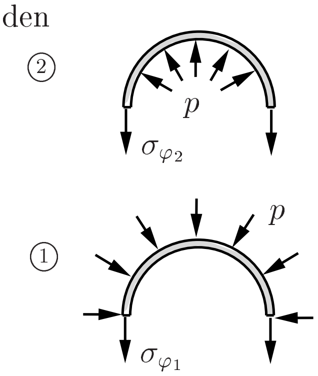
Lösung: Damit das Rohr ② auf die Welle ① geschoben werden kann, muss sein Radius durch Erwärmen um t vergrößert werden. Im erwärmten Zustand muss demnach die Umfangsdehnung den Wert

$$\varepsilon_{\varphi 2} = \frac{2\pi(r+t) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{t}{r}$$

annehmen. Einsetzen in das Elastizitätsgesetz liefert unter Beachtung von $\sigma_{\varphi 2} = 0$ (das Rohr ist im erwärmten Zustand spannungsfrei!)

$$\varepsilon_{\varphi 2} = \alpha_{T2}\Delta T \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\underline{\Delta T = \frac{1}{\alpha_{T2}} \frac{t}{r}}} \; .$$

Der Druck nach dem Abkühlen ergibt sich aus den Gleichgewichtsbedingungen



$$\sigma_{\varphi 1} = -\frac{r}{t}\, p \; , \qquad \sigma_{\varphi 2} = +\frac{r}{t}\, p \; ,$$

den Elastizitätsgesetzen

$$E_1 \varepsilon_{\varphi 1} = \sigma_{\varphi 1} \; , \qquad E_2 \varepsilon_{\varphi 2} = \sigma_{\varphi 2} \; ,$$

den Verzerrungen

$$\varepsilon_{\varphi 1} = \frac{\Delta r_1}{r} \; , \qquad \varepsilon_{\varphi 2} = \frac{\Delta r_2}{r}$$

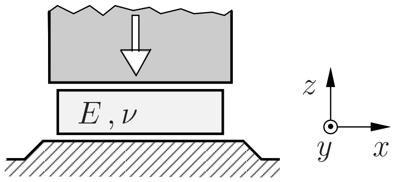
und der geometrischen Verträglichkeit

$$\Delta r_2 = \Delta r_1 + t$$

zu

$$\underline{\underline{p = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \left(\frac{t}{r}\right)^2}} \; .$$

Aufgabe 1.16: Eine Platte wird in einer Presse einem Druck p_0 in z-Richtung ausgesetzt.



Wie groß sind die Dehnungen und die Spannungen, wenn

a) die Verformungen in x- und y-Richtung behindert sind,

b) nur die Verformung in y-Richtung behindert ist,

c) die Verformungen in x- und y-Richtung *nicht* behindert sind?

Lösung: In der Platte herrscht in allen drei Fällen ein homogener 3-achsiger Spannungs- bzw. Verzerrungszustand. Mit $\sigma_z = -p_0$ lautet das Elastizitätsgesetz (Schubspannungen treten nicht auf!)

$$E\varepsilon_x = \sigma_x - \nu\sigma_y + \nu p_0\,, \quad E\varepsilon_y = \sigma_y + \nu p_0 - \nu\sigma_x\,, \quad E\varepsilon_z = -p_0 - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y\,.$$

Im Fall **a)** sind $\varepsilon_x^a = \varepsilon_y^a = 0$, und aus

$$0 = \sigma_x^a - \nu\sigma_y^a + \nu p_0\,, \quad 0 = \sigma_y^a + \nu p_0 - \nu\sigma_x^a\,, \quad E\varepsilon_z^a = -p_0 - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y$$

folgen

$$\underline{\underline{\varepsilon_z^a = -\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}\,\frac{p_0}{E}}}\,, \qquad \underline{\underline{\sigma_x^a = \sigma_y^a = -\frac{\nu}{1-\nu}\,p_o}}\,.$$

Im Fall **b)** gelten $\varepsilon_y^b = 0$ und $\sigma_x^b = 0$ (freie Verformung, d. h. keine Spannung in x-Richtung). Aus dem Elastizitätsgesetz

$$E\varepsilon_x^b = -\nu\sigma_y^b + \nu p_0\,, \quad 0 = \sigma_y^b + \nu p_0\,, \quad E\varepsilon_z = -p_0 - \nu\sigma_y^b$$

erhält man dann

$$\underline{\underline{\varepsilon_x^b = \nu(1+\nu)\,\frac{p_0}{E}}}\,, \qquad \underline{\underline{\varepsilon_z^b = -(1-\nu^2)\,\frac{p_0}{E}}}\,, \qquad \underline{\underline{\sigma_y^b = -\nu\,p_0}}\,.$$

Im Fall **c)** sind $\sigma_x^c = \sigma_y^c = 0$, da die Verformungen in diesen Richtungen nicht behindert sind. Das Elastizitätsgesetz reduziert sich damit auf

$$E\varepsilon_x^c = \nu\,p_0\,, \qquad E\varepsilon_y^c = \nu\,p_0\,, \qquad E\varepsilon_z^c = -p_0\,,$$

und es ergibt sich

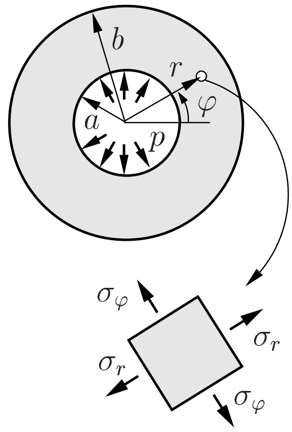
$$\underline{\underline{\varepsilon_x^c = \varepsilon_y^c = \nu\,\frac{p_0}{E}}}\,, \qquad \underline{\underline{\varepsilon_z^c = -\frac{p_0}{E}}}\,.$$

Anmerkung: Für $\nu > 0$ gilt $|\varepsilon_z^a| < |\varepsilon_z^b| < |\varepsilon_z^c|$. Speziell für $\nu = 1/3$ erhält man

$$\varepsilon_z^a = -\frac{6}{9}\,\frac{p_0}{E}\,, \qquad \varepsilon_z^b = -\frac{8}{9}\,\frac{p_0}{E}\,, \qquad \varepsilon_z^c = -\frac{9}{9}\,\frac{p_0}{E}\,.$$

Infolge der Verformungsbehinderung in x- und y-Richtung verhält sich die Platte im Fall a) in z-Richtung recht *steif!*

Aufgabe 1.17: In einem dickwandigen Zylinder, dessen Deformation in Längsrichtung verhindert ist (ebener Verzerrungszustand), herrschen unter dem Innendruck p die Spannungen



$$\sigma_r = -p\,\frac{a^2}{b^2-a^2}\left(\frac{b^2}{r^2}-1\right) ,$$

$$\sigma_\varphi = p\,\frac{a^2}{b^2-a^2}\left(\frac{b^2}{r^2}+1\right) .$$

Wie groß sind die Spannung σ_z und die daraus resultierende Kraft F_z in Zylinderlängsrichtung?

Wo tritt die größte Normalspannung auf und wie groß ist sie?

Geg.: $p = 50$ MPa, $a = 100\,\text{mm}$, $b = 200\,\text{mm}$, $\nu = 1/3$.

Lösung: Da die Deformation in Zylinderlängsrichtung verhindert ist, gilt $\varepsilon_z = 0$. Damit liefert das Elastizitätsgesetz in dieser Richtung

$$E\varepsilon_z = 0 = \sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\varphi) .$$

Durch Einsetzen folgt die Spannung

$$\underline{\underline{\sigma_z}} = \nu(\sigma_r+\sigma_\varphi) = 2\nu\,p\,\frac{a^2}{b^2-a^2} = \frac{2}{9}\,p = \underline{\underline{11,1\text{ MPa}}} .$$

Da σ_z über den Querschnitt konstant ist, ergibt sich die resultierende Kraft durch Multiplikation von σ_z mit der Querschnittsfläche:

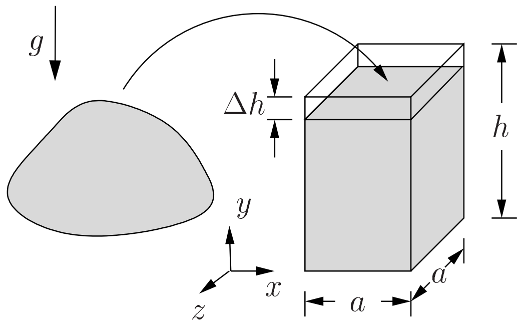
$$\underline{\underline{F_z}} = \sigma_z\pi(b^2-a^2) = 2\pi\nu\,p\,a^2 = \underline{\underline{1,05\cdot 10^6\text{ N}}} .$$

Die Spannungen σ_r und σ_φ sind am Innenrand des Zylinders ($r = a$) betragsmäßig am größten. Dort erhält man

$$\sigma_r(a) = -p\,, \qquad \sigma_\varphi(a) = \frac{5}{3}\,p\,, \qquad \sigma_z = \frac{2}{9}\,p\,.$$

Dementsprechend ist die *Umfangsspannung* σ_φ am Innenrand die größte auftretende Normalspannung.

Aufgabe 1.18: Eine starre Kiste mit quadratischem Querschnitt wird mit Tonboden (Volumen $V = a^2 h$, Dichte ρ) gefüllt. Das Materialverhalten des Bodens kann näherungsweise durch das HOOKEsche Gesetz (Elastizitätsmodul E, Querdehnzahl ν) beschrieben werden.
Zu ermitteln sind die Setzung Δh des Bodens infolge Eigengewicht und die horizontale Druckverteilung auf die Kiste in Abhängigkeit von y.



Lösung: Bei der gegebenen Beanspruchung treten nur Normalspannungen σ_x, σ_y und σ_z in den drei Koordinatenrichtungen x, y und z auf. Außer der Dehnung ε_y in y-Richtung sind keine Dehnungen vorhanden.

Für σ_y gilt nach dem HOOKEschen Gesetz mit $\varepsilon_x = \varepsilon_z = 0$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}\,\varepsilon_y\right) = \frac{E}{1+\nu}\frac{1-\nu}{1-2\nu}\,\varepsilon_y \; .$$

Mit der Spannungsverteilung

$$\sigma_y = -\rho g(h-y)$$

berechnet sich die Setzung Δh aus

$$\varepsilon_y = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \; .$$

Durch Integration erhält man Δh:

$$\underline{\underline{\Delta h}} = v(h) = \int_0^h \varepsilon_y \,\mathrm{d}y = -\int_0^h \rho g(h-y)\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\,\mathrm{d}y$$

$$= -\left[\rho g \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\left(hy - \frac{y^2}{2}\right)\right]_0^h = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\rho g h^2}} \; .$$

Die horizontale Druckverteilung in Abhängigkeit von y ergibt sich mit dem HOOKEschen Gesetz:

$$\sigma_x = \sigma_z = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,\varepsilon_y \quad , \qquad \varepsilon_y = -\rho g(h-y)\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}$$

$$\rightsquigarrow \quad \underline{\underline{\sigma_x(y) = \sigma_z(y) = \frac{-\nu}{1-\nu}\rho g(h-y)}} \; .$$