

Inhaltsverzeichnis

A. Grundlagen

§ 1. Reelle Zahlen	1
1.1 Mengen	4
1.2 Funktionen	5
1.3 Körperaxiome	6
1.4 Anordnungsaxiome	7
1.5 Obere und untere Schranken, größtes und kleinstes Element, Supremum und Infimum	9
1.6 Das Vollständigkeitsaxiom	10
1.7 Vorzeichen und Absolutbetrag	10
1.8 Die Menge \mathbb{R}	11
1.9 Intervalle und Umgebungen, offene und abgeschlossene Mengen	12
1.10 Bemerkungen zur Axiomatik	13
1.11 Bemerkungen zur Logik und Beweistechnik	14
Aufgaben	15
§ 2. Natürliche Zahlen und vollständige Induktion	17
2.1 Definition der natürlichen Zahlen	18
2.2 Beweis durch vollständige Induktion	18
2.3 Einige Eigenschaften von \mathbb{N}	19
2.4 Die archimedische Eigenschaft der reellen Zahlen	20
2.5 Ganze und rationale Zahlen	21
2.6 Endliche Mengen	21
2.7 Folge, Kartesisches Produkt und n -Tupel	22
2.8 Rekursive Definition	22
2.9 Abzählbare Mengen	23
2.10 Nichtabzählbare Mengen	24
2.11 Definition des Summen- und des Produktzeichens	25
2.12 Einige einfache Tatsachen	27
2.13 Bernoullische Ungleichung	28
2.14 Die Binomialformel	28
2.15 Zahlendarstellung in Positionssystemen	31
2.16 Kombinatorische Aufgaben	32
2.17 Die Fibonacci-Zahlen	33
Aufgaben	34

§ 3.	Polynome und Wurzeln	37
3.1	Das Rechnen mit Funktionen. Funktionenraum und Funktionen- algebra	39
3.2	Polynome	39
3.3	Das Interpolationspolynom	42
3.4	Monotone Funktionen	43
3.5	Die Lipschitz-Bedingung	44
3.6	Die n -te Wurzel. Definition und Satz	46
3.7	Arithmetisches und geometrisches Mittel	47
3.8	Potenzen mit rationalen Exponenten	48
	Aufgaben	50
B.	Grenzwert und Stetigkeit	
§ 4.	Zahlenfolgen	52
4.1	Reelle Zahlenfolgen	58
4.2	Nullfolgen	58
4.3	Konvergente Folgen	60
4.4	Rechenregeln	62
4.5	Teilfolge, Umordnung einer Folge	64
4.6	Divergente Folgen	64
4.7	Konvergenzkriterien für monotone Folgen	65
4.8	Die Exponentialfunktion. Definition und Satz	66
4.9	Der Logarithmus	67
4.10	Iterationsverfahren. Berechnung von Wurzeln	69
4.11	Das arithmetisch-geometrische Mittel von Gauß	70
4.12	Häufungswerte von Folgen	71
4.13	Satz von Bolzano-Weierstraß für Folgen	72
4.14	Konvergenzkriterium von Cauchy	72
4.15	Oberer und unterer Limes beschränkter Folgen	73
4.16	Folgen in $\overline{\mathbb{R}}$	74
	Aufgaben	76
§ 5.	Unendliche Reihen	78
5.1	Definitionen und einfache Eigenschaften	86
5.2	Satz	88
5.3	Satz	89
5.4	Einige Reihensummen	89
5.5	Reihen mit positiven Gliedern	92
5.6	Alternierende Reihen	93
5.7	Das Konvergenzkriterium von Cauchy	94
5.8	Absolute Konvergenz	94
5.9	Kriterium für absolute Konvergenz	95
5.10	Verdichtungssatz von Cauchy	97
5.11	Umordnung von unendlichen Reihen	98
5.12	Reihen mit beliebigen Indexmengen	99

5.13	Großer Umordnungssatz	100
5.14	Doppelreihen	101
5.15	Multiplikation von Reihen	102
5.16	Bedingte und unbedingte Konvergenz	104
5.17	Riemannscher Umordnungssatz	105
5.18	Dezimalbrüche und g -adische Entwicklung	105
	Aufgaben	107
§ 6.	Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit	109
6.1	Grenzwert und Stetigkeit	114
6.2	Einseitiger Limes, einseitige Stetigkeit	116
6.3	Folgenkriterium	117
6.4	Das Konvergenzkriterium von Cauchy	118
6.5	Rechenregeln	119
6.6	Satz	119
6.7	Zusammengesetzte Funktionen (Komposition)	120
6.8	Stetigkeit auf einem kompakten Intervall. Maximum und Minimum einer Funktion	120
6.9	Gleichmäßige Stetigkeit	121
6.10	Zwischenwertsatz	123
6.11	Satz über die Umkehrfunktion	124
6.12	Limes für $x \rightarrow \pm\infty$	125
6.13	Uneigentliche Grenzwerte	126
6.14	Konvergenzkriterium für monotone Funktionen	127
6.15	Sprungstelle und Schwankung	127
6.16	Stetigkeitsmodul	128
6.17	Stetige Fortsetzung	128
	Aufgaben	129
§ 7.	Potenzreihen. Elementar-transzendente Funktionen	131
7.1	Gleichmäßige Konvergenz	139
7.2	Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz	140
7.3	Satz	140
7.4	Gleichmäßige Konvergenz von Reihen	141
7.5	Das Weierstraßsche Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz	142
7.6	Potenzreihen	142
7.7	Satz	144
7.8	Multiplikation von Potenzreihen	144
7.9	Die Exponentialreihe	145
7.10	Identitätssatz für Potenzreihen	147
7.11	Die logarithmische Reihe	147
7.12	Der Grenzwertsatz von Abel	149
7.13	Einsetzen von Potenzreihen	150
7.14	Division von Potenzreihen	151
7.15	Berechnung von Potenzreihen, Koeffizientenvergleich	151

7.16	Sinus und Cosinus	152
7.17	Die Arcusfunktionen (zyklometrische Funktionen)	156
7.18	Die Hyperbelfunktionen	158
7.19	Die Areafunktionen	159
7.20	Potenzreihen für Tangens und Cotangens	160
7.21	Nochmals Potenzsummen	162
	Aufgaben	163
§ 8.	Komplexe Zahlen und Funktionen	166
8.1	Der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen	166
8.2	Polarkoordinaten	168
8.3	Wurzeln und Einheitswurzeln	169
8.4	Polynome	170
8.5	Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen	171
	Komplexe Analysis	174
8.6	Umgebungen	174
8.7	Konvergenz von Folgen und Reihen	174
8.8	Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen	176
8.9	Potenzreihen	176
8.10	Entwicklung um einen neuen Mittelpunkt	177
8.11	Die Exponentialfunktion im Komplexen	178
8.12	Die Partialbruchzerlegung des Cotangens	181
8.13	Die Riemannsche Zetafunktion	183
	Aufgaben	184
C. Differential- und Integralrechnung		
§ 9.	Das Riemannsche Integral	187
9.1	Zerlegung, Ober- und Untersumme	197
9.2	Hilfssatz	198
9.3	Oberes und unteres Integral. Das Riemann-Integral	199
9.4	Satz	199
9.5	Integrabilitätskriterium von Riemann	201
9.6	Satz über Integrierbarkeit	201
9.7	Die Riemannsche Definition des Integrals	202
9.8	Komplexwertige Funktionen	205
9.9	Satz über die Linearität des Integrals	205
9.10	Einige Eigenschaften des Integrals	206
9.11	Satz	207
9.12	Dreiecksungleichung für Integrale	207
9.13	Mittelwertsatz der Integralrechnung	208
9.14	Satz über gliedweise Integration	209
9.15	Integrale über Teilintervalle	211
9.16	Das Integral als Funktion der oberen Grenze	212
9.17	Die Bestimmung von Summen durch Integrale	213
9.18	Die Berechnung von π	215
	Aufgaben	218

§ 10. Differentiation	221
10.1 Differenzenquotient und Ableitung	240
10.2 Einseitige Differenzierbarkeit	242
10.3 Einfache Tatsachen	243
10.4 Das Differential	245
10.5 Rechenregeln für die Ableitung	246
10.6 Die Kettenregel	247
10.7 Ableitung der Umkehrfunktion	248
10.8 Zusammenfassung	249
10.9 Höhere Ableitungen, die Klassen C^k	251
10.10 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung	254
10.11 Regel von de l'Hospital	256
10.12 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	259
10.13 Satz über gliedweise Differentiation	261
10.14 Taylor-Reihe und Taylor-Polynom	262
10.15 Satz von Taylor	263
10.16 Die Taylorsche Entwicklung von Funktionen	265
10.17 Satz von S. Bernstein (1914)	267
10.18 Das Gegenbeispiel von Cauchy	267
Aufgaben	268
§ 11. Anwendungen	273
11.1 Die Stammfunktion oder das unbestimmte Integral	273
11.2 Die Technik des Integrierens	274
11.3 Partielle Integration	275
11.4 Die Substitutionsregel	277
11.5 Die Integration der rationalen Funktionen	278
11.6 Satz	280
11.7 Vorläufiges zum Inhaltsproblem	282
11.8 Die Fläche ebener Bereiche als Integral	283
11.9 Darstellung in Polarkoordinaten	284
11.10 Das Volumen von Rotationskörpern	286
11.11 Schwerpunkte	290
11.12 Trägheitsmomente	293
11.13 Mechanische Arbeit	295
11.14 Numerische Integration	296
11.15 Hinreichende Kriterien für Maxima und Minima	300
11.16 Kriterien für Wendepunkte	300
11.17 Konvexe und konkave Funktionen	301
11.18 Die Jensensche Ungleichung für konvexe Funktionen	301
11.19 Mehr über konvexe Funktionen	303
11.20 Kurvendiskussion	304
11.21 Mittelwerte mit einer beliebigen Funktion	307
11.22 Satz über die Mittel r -ter Ordnung	308
11.23 Höldersche Ungleichung	309
11.24 Minkowskische Ungleichung	310

11.25 Eine Ungleichung von Redheffer	311
11.26 Kontrahierende Abbildungen. Das Kontraktionsprinzip	312
11.27 Das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung	317
Aufgaben	320
§ 12. Ergänzungen	323
Uneigentliche Integrale	323
12.1 Unbeschränkter Integrationsbereich	323
12.2 Rechenregeln	324
12.3 Das Konvergenzkriterium von Cauchy	325
12.4 Absolute Konvergenz, Majorantenkriterium	325
12.5 Unendliche Reihen und uneigentliche Integrale	326
12.6 Grenzübergang unter dem Integralzeichen	327
12.7 Unbeschränkter Integrand	328
12.8 Die Gammafunktion	330
Einfache Differentialgleichungen	333
12.9 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	334
12.10 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung	336
12.11 Der harmonische Oszillator	339
12.12 Reibungskräfte	341
12.13 Gedämpfte Schwingung	342
12.14 Resonanz	344
Die Eulersche Summenformel	346
12.15 Bernoullische Polynome	346
12.16 Eulersche Summenformel	347
12.17 Die Eulersche Konstante	349
12.18 Produktdarstellung des Sinus	350
12.19 Wallissches Produkt	351
12.20 Die Stirlingsche Formel	351
Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes. Dini-Derivierte	353
12.21 Satz	355
12.22 Limes superior und Limes inferior	356
12.23 Die vier Dini-Derivierten	357
12.24 Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung	358
12.25 Satz	359
12.26 Eine stetige, nirgends differenzierbare Funktion	359
12.27 Das Lemma von Gronwall	361
12.28 Ungleichungen vom Faltungstyp	364
12.29 Nichtlineare Integral-Gleichungen	366
Lösungen und Lösungshinweise zu ausgewählten Aufgaben	374
Literatur	383
Bezeichnungen und Grundformeln	386
Namen- und Sachverzeichnis	387