

Franz Schwabl

Quantenmechanik (QM I)

Fünfte, erweiterte Auflage
mit 123 Abbildungen, 16 Tabellen
und 126 Aufgaben



Springer

Professor Dr. Franz Schwabl
Institut für Theoretische Physik
Technische Universität München
James-Franck-Strasse
85747 Garching
e-mail: schwabl@physik.tu-muenchen.de

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Schwabl, Franz:

Quantenmechanik: QM I / Franz Schwabl. – 5., erw. Aufl. –

Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Budapest; Hongkong; London; Mailand; Paris; Santa Clara;
Singapur; Tokio: Springer, 1998

(Springer-Lehrbuch)

ISBN 3-540-63779-6

ISBN 3-540-63779-6 5. Auflage Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

ISBN 3-540-56812-3 4. Auflage Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funk- sendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1988, 1990, 1992, 1993, 1998

Printed in Germany

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Satz: Datenkonvertierung durch Springer-Verlag

Einbandgestaltung: *design & production* GmbH, Heidelberg

SPIN: 10427319

56/3144 - 5 4 3 2 1 0 – Gedruckt auf säurefreiem Papier

Inhaltsverzeichnis

1. Historische und experimentelle Grundlagen	1
1.1 Einleitung und Überblick	1
1.2 Historisch grundlegende Experimente und Erkenntnisse	3
1.2.1 Teilcheneigenschaften elektromagnetischer Wellen	3
1.2.2 Welleneigenschaften von Teilchen, Beugung von Materiestrahlen	7
1.2.3 Diskrete Zustände	8
2. Wellenfunktion und Schrödinger-Gleichung	13
2.1 Die Wellenfunktion und ihre Wahrscheinlichkeitsinterpretation	13
2.2 Schrödinger-Gleichung für freie Teilchen	15
2.3 Superposition von ebenen Wellen	16
2.4 Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine Impulsmessung	19
2.4.1 Veranschaulichung der Unschärferelation	21
2.4.2 Impuls im Ortsraum	22
2.4.3 Operatoren und Skalarprodukt	23
2.5 Korrespondenzprinzip und Schrödinger-Gleichung	26
2.5.1 Korrespondenzprinzip	26
2.5.2 Postulate der Quantentheorie	27
2.5.3 Mehrteilchensysteme	28
2.6 Das Ehrenfestsche Theorem	29
2.7 Die Kontinuitätsgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte	31
2.8 Stationäre Lösungen der Schrödinger-Gleichung, Eigenwertgleichungen	32
2.8.1 Stationäre Zustände	32
2.8.2 Eigenwertgleichungen	33
2.8.3 Entwicklung nach stationären Zuständen	35
2.9 Physikalische Bedeutung der Eigenwerte eines Operators	36
2.9.1 Einige wahrscheinlichkeitstheoretische Begriffe	36
2.9.2 Anwendung auf Operatoren mit diskreten Eigenwerten	37

2.9.3	Anwendung auf Operatoren mit kontinuierlichem Spektrum	38
2.9.4	Axiome der Quantentheorie	41
2.10	Ergänzungen	42
2.10.1	Das allgemeine Wellenpaket	42
2.10.2	Bemerkung zur Normierbarkeit der Kontinuumszustände	44
	Aufgaben	44
3.	Eindimensionale Probleme	47
3.1	Der harmonische Oszillator	47
3.1.1	Algebraische Methode	48
3.1.2	Die Hermite-Polynome	52
3.1.3	Die Nullpunktsenergie	54
3.1.4	Kohärente Zustände	56
3.2	Potentialstufen	57
3.2.1	Stetigkeit von $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ für stückweise stetiges Potential	58
3.2.2	Die Potentialstufe	58
3.3	Tunneleffekt, Potentialschwelle	63
3.3.1	Die Potentialschwelle	63
3.3.2	Kontinuierliche Potentialberge	67
3.3.3	Anwendungsbeispiel: Der α -Zerfall	67
3.4	Potentialtopf	70
3.4.1	Gerade Symmetrie	72
3.4.2	Ungerade Symmetrie	73
3.5	Symmetrieeigenschaften	76
3.5.1	Parität	76
3.5.2	Konjugation	77
3.6	Allgemeine Diskussion der eindimensionalen Schrödinger-Gleichung	77
3.7	Potentialtopf, Resonanzen	81
3.7.1	Analytische Eigenschaften des Transmissionskoeffizienten	83
3.7.2	Bewegung eines Wellenpaketes in der Nähe einer Resonanz	87
	Aufgaben	92
4.	Unschärferelation	97
4.1	Heisenbergsche Unschärferelation	97
4.1.1	Schwarzsche Ungleichung	97
4.1.2	Allgemeine Unschärferelationen	97

4.2	Energie-Zeit-Unschärfe	99
4.2.1	Durchgangsdauer und Energieunschärfe	99
4.2.2	Dauer einer Energiemessung und Energieunschärfe .	100
4.2.3	Lebensdauer und Energieunschärfe	101
4.3	Gemeinsame Eigenfunktionen von kommutierenden Operatoren	102
	Aufgaben	105
5.	Der Drehimpuls	107
5.1	Vertauschungsrelationen, Drehungen	107
5.2	Eigenwerte von Drehimpulsoperatoren	110
5.3	Bahndrehimpuls in Polarkoordinaten	112
	Aufgaben	118
6.	Zentralpotential I	119
6.1	Kugelkoordinaten	119
6.2	Bindungszustände in drei Dimensionen	122
6.3	Coulomb-Potential	124
6.4	Das Zweikörperproblem	138
	Aufgaben	140
7.	Bewegung im elektromagnetischen Feld	143
7.1	Der Hamilton-Operator	143
7.2	Konstantes Magnetfeld B	144
7.3	Normaler Zeeman-Effekt	145
7.4	Kanonischer und kinetischer Impuls, Eichtransformation ...	147
7.4.1	Kanonischer und kinetischer Impuls	147
7.4.2	Änderung der Wellenfunktion bei einer Eichtransformation	147
7.5	Aharonov-Bohm-Effekt	149
7.5.1	Wellenfunktion im magnetfeldfreien Gebiet	149
7.5.2	Aharonov-Bohm-Interferenzexperiment	150
7.6	Flußquantisierung in Supraleitern	153
7.7	Freie Elektronen im Magnetfeld	154
	Aufgaben	156
8.	Operatoren, Matrizen, Zustandsvektoren	159
8.1	Matrizen, Vektoren und unitäre Transformationen	159
8.2	Zustandsvektoren und Dirac-Notation	164
8.3	Axiome der Quantenmechanik	170
8.3.1	Ortsdarstellung	171
8.3.2	Impulsdarstellung	171
8.3.3	Darstellung bezüglich eines diskreten Basissystems .	172
8.4	Mehrdimensionale Systeme und Vielteilchensysteme	173

8.5	Schrödinger-, Heisenberg- und Wechselwirkungsdarstellung .	174
8.5.1	Schrödinger-Darstellung	174
8.5.2	Heisenberg-Darstellung	174
8.5.3	Wechselwirkungsdarstellung (Dirac-Darstellung) ...	177
8.6	Bewegung eines freien Elektrons im Magnetfeld	177
	Aufgaben	181
9.	Spin	183
9.1	Experimentelle Entdeckung des inneren Drehimpulses	183
9.1.1	„Normaler“ Zeeman-Effekt	183
9.1.2	Stern–Gerlach-Experiment	183
9.2	Mathematische Formulierung für Spin $1/2$	185
9.3	Eigenschaften der Pauli-Matrizen	186
9.4	Zustände, Spinoren	187
9.5	Magnetisches Moment	188
9.6	Räumliche Freiheitsgrade und Spin	189
	Aufgaben	191
10.	Addition von Drehimpulsen	193
10.1	Problemstellung	193
10.2	Addition von Spin $1/2$ -Operatoren	194
10.3	Bahndrehimpuls und Spin $1/2$	196
10.4	Allgemeiner Fall	198
	Aufgaben	201
11.	Näherungsmethoden für stationäre Zustände	203
11.1	Zeitunabhängige Störungstheorie (Rayleigh–Schrödinger) ..	203
11.1.1	Nicht entartete Störungstheorie	204
11.1.2	Störungstheorie für entartete Zustände	206
11.2	Variationsprinzip	207
11.3	WKB (Wentzel–Kramers–Brillouin)-Methode	208
11.4	Brillouin–Wigner-Störungstheorie	211
	Aufgaben	212
12.	Relativistische Korrekturen	215
12.1	Relativistische kinetische Energie	215
12.2	Spin-Bahn-Kopplung	217
12.3	Darwin-Term	219
12.4	Weitere Korrekturen	222
12.4.1	Lamb-Verschiebung	222
12.4.2	Hyperfineinstruktur	222
	Aufgaben	225

13. Atome mit mehreren Elektronen	227
13.1 Identische Teilchen	227
13.1.1 Bosonen und Fermionen	227
13.1.2 Nicht wechselwirkende Teilchen	230
13.2 Helium	233
13.2.1 Vernachlässigung der Elektron-Elektron-Wechselwirkung	234
13.2.2 Energieverschiebung durch die abstoßende Elektron-Elektron-Wechselwirkung	236
13.2.3 Variationsmethode	240
13.3 Hartree- und Hartree-Fock-Näherung (Selbstkonsistente Felder)	242
13.3.1 Hartree-Näherung	242
13.3.2 Hartree-Fock-Näherung	245
13.4 Thomas-Fermi-Methode	247
13.5 Atomaufbau und Hundsche Regeln	252
Aufgaben	258
14. Zeeman-Effekt und Stark-Effekt	259
14.1 Wasserstoffatom im Magnetfeld	259
14.1.1 Schwaches Feld	260
14.1.2 Starkes Feld, Paschen-Back-Effekt	260
14.1.3 Zeeman-Effekt für beliebiges Magnetfeld	261
14.2 Mehrelektronenatome	264
14.2.1 Schwaches Magnetfeld	264
14.2.2 Starkes Magnetfeld, Paschen-Back-Effekt	266
14.3 Stark-Effekt	266
14.3.1 Energieverschiebung des Grundzustandes	267
14.3.2 Angeregte Zustände	267
Aufgaben	270
15. Moleküle	271
15.1 Qualitative Überlegungen	271
15.2 Born-Oppenheimer-Näherung	273
15.3 Das H_2^+ -Molekül	276
15.4 Das Wasserstoffmolekül H_2	278
15.5 Energieniveaus eines zweiatomigen Moleküls: Schwingungs- und Rotationsniveaus	282
15.6 Van-der-Waals-Kraft	284
Aufgaben	287

16. Zeitabhängige Phänomene	289
16.1 Heisenberg-Darstellung für einen zeitabhängigen Hamilton-Operator	289
16.2 Sudden Approximation (Plötzliche Parameteränderung) ...	291
16.3 Zeitabhängige Störungstheorie	292
16.3.1 Störungsentwicklung	292
16.3.2 Übergänge 1. Ordnung	394
16.3.3 Übergänge in ein kontinuierliches Spektrum, Goldene Regel	295
16.3.4 Periodische Störung	297
16.4 Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld	298
16.4.1 Hamilton-Operator	298
16.4.2 Quantisierung des Strahlungsfeldes	299
16.4.3 Spontane Emission	302
16.4.4 Elektrische Dipolübergänge (E1)	303
16.4.5 Auswahlregeln für Elektrische Dipol-(E1)- Übergänge	304
16.4.6 Die Lebensdauer für Elektrische Dipolübergänge ...	307
16.4.7 Elektrische Quadrupol- und Magnetische Dipolübergänge	308
16.4.8 Absorption und stimulierte Emission	310
Aufgaben	311
 17. Zentralpotential II	315
17.1 Schrödinger-Gleichung für sphärisch symmetrisches Kastenpotential	315
17.2 Sphärische Bessel-Funktionen	316
17.3 Bindungszustände des sphärischen Potentialtopfes	318
17.4 Grenzfall eines tiefen Potentialtopfes	320
17.5 Kontinuumslösungen für den Potentialtopf	322
17.6 Entwicklung von ebenen Wellen nach Kugelfunktionen ...	323
Aufgaben	326
 18. Streutheorie	327
18.1 Streuung eines Wellenpaketes und stationäre Zustände ...	327
18.1.1 Wellenpaket	327
18.1.2 Formale Lösung der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung	328
18.1.3 Asymptotisches Verhalten des Wellenpakets	330
18.2 Streuquerschnitt (Wirkungsquerschnitt)	331
18.3 Partialwellen	333
18.4 Optisches Theorem	336
18.5 Bornsche Näherung	338
18.6 Inelastische Streuung	340

18.7	Streuphasen	342
18.8	Resonanz-Streuung am Potentialtopf	343
18.9	Niederenergie- s -Wellen-Streuung, Streulänge	347
18.10	Streuung für hohe Energien	350
18.11	Ergänzende Bemerkungen	352
18.11.1	Transformation in das Laborsystem	352
18.11.2	Coulomb-Potential	353
	Aufgaben	353
19.	Supersymmetrische Quantentheorie	355
19.1	Verallgemeinerte Leiteroperatoren	355
19.2	Beispiele	358
19.2.1	Reflexionsfreie Potentiale	358
19.2.2	δ -Funktion	360
19.2.3	Harmonischer Oszillator	361
19.2.4	Coulomb-Potential	361
19.3	Ergänzungen	364
	Aufgaben	366
20.	Zustand und Meßprozeß in der Quantenmechanik	367
20.1	Der quantenmechanische Zustand, Kausalität und Determinismus	367
20.2	Die Dichtematrix	369
20.2.1	Dichtematrix für reine und gemischte Gesamtheiten	369
20.2.2	Von-Neumann-Gleichung	374
20.2.3	Spin $1/2$ -Systeme	375
20.3	Der Meßvorgang	378
20.3.1	Der Stern–Gerlach-Versuch	378
20.3.2	Quasiklassische Lösung	379
20.3.3	Stern–Gerlach-Versuch als idealisierter Meßvorgang	380
20.3.4	Allgemeines Experiment und Kopplung an die Umgebung	382
20.3.5	Der Einfluß einer Beobachtung auf die Zeitentwicklung	384
20.3.6	Phasenrelationen beim Stern–Gerlach-Experiment	386
20.4	EPR-Argument, Versteckte Parameter, Bellsche Ungleichung	388
20.4.1	EPR-(Einstein, Podolsky, Rosen)-Argument	388
20.4.2	Bellsche Ungleichung	390
	Aufgaben	393

Anhang 395

 A. Mathematische Hilfsmittel zur Lösung linearer
 Differentialgleichungen 395

 A.1 Fourier-Transformation 395

 A.2 Delta-Funktion und Distributionen 395

 A.3 Greensche Funktionen 400

 B. Kanonischer und kinetischer Impuls 402

 C. Algebraische Bestimmung
 der Bahndrehimpulseigenfunktionen 403

 D. Tabellen und Periodensystem 408

Sachverzeichnis 413