# Kapitel 6

# Trigonometrische Funktionen und Exponentialfunktion

**6.1** Es seien $a > 0$, $b > 0$ und $c \in \mathbb{R}$. Man definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = a \cdot \sin(bx + c).$$

Zeigen Sie, daß $f$ die folgenden Eigenschaften hat.

(i) $|f(x)| \leq a$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $f\left(x + \frac{2\pi}{b}\right) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(iii) $f(x) = 0$ genau dann, wenn $x = \frac{k \cdot \pi - c}{b}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie die entsprechenden Eigenschaften der Sinus-Funktion.

**Lösung** Natürlich kennen Sie die Sinusfunktion und wissen auch über einige ihrer Eigenschaften Bescheid. Nun kann es aber vorkommen, daß man nicht nur den $\sin x$ in seiner reinen und unverfälschten Form braucht, sondern auch etwas unschönere Funktionen wie zum Beispiel $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$, die zwar eine Menge mit dem Sinus zu tun haben, ihn aber nicht einfach so lassen, wie Sie ihn gewöhnt sind. Um die Eigenschaften einer solchen Funktion zu untersuchen, muß man die entsprechenden Eigenschaften der Sinusfunktion selbst heranziehen.

(i) Es wird behauptet, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $|f(x)| \leq a$ gilt. Da $f$ sehr nah mit dem Sinus verwandt ist, liegt es nahe, nach einer entprechenden Ungleichung für die pure Sinusfunktion zu suchen, und die ist auch schnell gefunden: es gilt immer $|\sin x| \leq 1$, ganz gleich, welches

$x \in I\!R$ Sie auch einsetzen mögen. Bei $f(x)$ geht es aber gar nicht um eine simples $\sin x$, sondern um $\sin(bx + c)$, aber das schadet gar nichts. Der Betrag des Sinus ist für *jeden beliebigen Input* kleiner oder gleich 1, und wie ich den Input nenne, spielt dabei überhaupt keine Rolle. Schließlich ist für $x \in I\!R$ auch $bx + c \in I\!R$, und daraus folgt:

$$|\sin(bx + c)| \leq 1.$$

Damit ist auch schon fast alles erledigt, denn um an $f$ heranzukommen, muß ich nur $\sin(bx + c)$ mit der Konstanten $a$ multiplizieren. Das ergibt dann:

$$|f(x)| = |a \cdot \sin(bx + c)| = |a| \cdot |\sin(bx + c)| = a \cdot |\sin(bx + c)| \leq a \cdot 1 = a.$$

In der ersten Gleichung habe ich nur verwendet, daß $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$ gilt. In der zweiten Gleichung habe ich den Betrag auf die einzelnen Faktoren des Produkts $a \cdot \sin(bx + c)$ gezogen und dann in der dritten Gleichung benutzt, daß $a > 0$ gilt und deshalb $|a| = a$ ist. Anschließend konnte ich darauf zurückgreifen, daß $\sin(bx + c) \leq 1$ ist, und damit habe ich insgesamt die gesuchte Ungleichung $|f(x)| \leq a$ bewiesen.

(ii) Hier geht es darum festzustellen, in welchen Abständen sich die Funktionswerte von $f(x)$ wiederholen. Die Behauptung lautet, daß für alle $x \in I\!R$ die Gleichung $f\left(x + \frac{2\pi}{b}\right) = f(x)$ gilt, und wieder ist es am günstigsten, nach einer ähnlichen Behauptung für die pure Sinusfunktion zu suchen. Die ist aber schnell gefunden, denn bekanntlich gilt:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \text{ für alle } x \in I\!R.$$

Das ist schon ein guter Anfang, denn immerhin kommt die ominöse Zahl $2\pi$ auch in der behaupteten Gleichung über $f$ vor. Um nun diese praktische Eigenschaft des Sinus verwenden zu können, bleibt mir nichts anderes übrig, als die Definition von $f(x)$ heranzuziehen, denn in ihr kommt zum Glück die Sinusfunktion vor. Nun habe ich aber nicht mehr einfach nur $f(x)$, sondern den etwas komplizierteren Ausdruck $f\left(x + \frac{2\pi}{b}\right)$. Darin liegt allerdings kein Problem, da ich ja weiß, wie ich jeden beliebigen Input von $f$ zu behandeln habe: erst wird $b \cdot \text{Input} + c$ berechnet, darauf wird der Sinus geworfen, und zum Schluß wird noch mit $a$ multipliziert. Daß jetzt der Input nicht mehr schlicht $x$ heißt, sondern $x + \frac{2\pi}{b}$, spielt dabei keine Rolle. Deshalb ist:

$$f\left(x + \frac{2\pi}{b}\right) = a \cdot \sin\left(b \cdot \left(x + \frac{2\pi}{b}\right) + c\right).$$

Innerhalb der Sinusfunktion kann ich ausmultiplizieren und erhalte:

$$a \cdot \sin\left(b \cdot \left(x + \frac{2\pi}{b}\right) + c\right) = a \cdot \sin(bx + 2\pi + c).$$

Das ist praktisch, da ich oben aufgeschrieben hatte, daß sich die Sinusfunktion jeweils nach $2\pi$ wiederholt: für jeden beliebigen Input $x \in I\!R$ gilt $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, und das stimmt natürlich auch, wenn der Input auf einmal $bx + c$ heißt. Damit folgt:

$$a \cdot \sin(bx + 2\pi + c) = a \cdot \sin(bx + c + 2\pi) = a \cdot \sin(bx + c) = f(x),$$

denn genauso war $f(x)$ definiert. Faßt man alles zusammen, dann habe ich insgesamt herausgefunden:

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{2\pi}{b}\right) &= a \cdot \sin\left(b \cdot \left(x + \frac{2\pi}{b}\right) + c\right) \\ &= a \cdot \sin(bx + 2\pi + c) \\ &= a \cdot \sin(bx + c + 2\pi) \\ &= a \cdot \sin(bx + c) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Damit ist die gewünschte Gleichung bewiesen.

(iii) Nun muß ich die Nullstellen von $f(x)$ herausfinden. Die Behauptung lautet, daß genau dann $f(x) = 0$ gilt, wenn $x = \frac{k \cdot \pi - c}{b}$ mit $k \in Z\!\!\!Z$ ist. Auch diese Behauptung führe ich natürlich zurück auf die entsprechende Behauptung für die Sinusfunktion. Sie wissen, daß

$$\cdots = \sin(-2\pi) = \sin(-\pi) = \sin 0 = \sin \pi = \sin 2\pi = \sin 3\pi = \cdots = 0$$

gilt, oder etwas knapper formuliert:

$$\sin k\pi = 0 \text{ für alle } k \in Z\!\!\!Z.$$

Damit ist schon einmal die ganze Zahl $k$ im Spiel, und jetzt ist der Rest nicht mehr schwer. Zunächst einmal gilt:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow a \cdot \sin(bx + c) = 0 \Leftrightarrow \sin(bx + c) = 0,$$

denn ich hatte vorausgesetzt, daß $a > 0$ ist, und somit kann das Produkt von $a$ mit $\sin(bx + c)$ nur dann Null werden, wenn $\sin(bx + c)$ selbst Null ist. Oben habe ich aber aufgeschrieben, für welche Input-Werte der Sinus das Ergebnis Null liefert: der Input muß die Form $k\pi$ mit einer ganzen Zahl $k$ haben. Da jetzt mein Input nicht mehr einfach nur $x$ ist, sondern $bx + c$, bedeutet das:

$$bx + c = k\pi \text{ mit } k \in Z\!\!\!Z.$$

Das heißt:

$$bx = k\pi - c, \text{ also } x = \frac{k \cdot \pi - c}{b}.$$

Schreibt man die gesamte Schlußkette noch einmal am Stück auf, ohne daß ich dazwischenrede, so lautet sie:

$$\begin{aligned} f(x)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad a\cdot\sin(bx+c)=0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sin(bx+c)=0 \\ &\Leftrightarrow \quad bx+c=k\pi \text{ mit } k\in\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad x=\frac{k\cdot\pi-c}{b} \text{ mit } k\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

**6.2** Zeigen Sie, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Beziehungen gelten.

(i) $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$;

(ii) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$;

(iii) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$.

Hinweis zu (i) und (ii): Verwenden Sie das Additionstheorem für den Cosinus mit $y = x$ und beachten Sie dann die trigonometrische Form des Pythagoras-Satzes.
Hinweis zu (iii): Hier brauchen Sie zusätzlich zu den Hilfsmitteln für (i) und (ii) noch die dritte binomische Formel.

**Lösung** Für die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus gibt es einige Formeln, die sogenannten Additionstheoreme, die es ermöglichen, den Sinus oder Cosinus der Differenz oder der Summe zweier Inputs zu berechnen, wenn man die entsprechenden Funktionswerte für die einzelnen Inputs kennt. Man findet sie eigentlich in jeder Formelsammlung und auch in jedem Lehrbuch, in dem in irgendeiner Form Sinus und Cosinus vorkommen. Die Formeln für die Summe zweier Inputs lauten:

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

und

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y.$$

Und auch der sogenannte trigonometrische Pythagoras ist nicht schwer einzusehen.

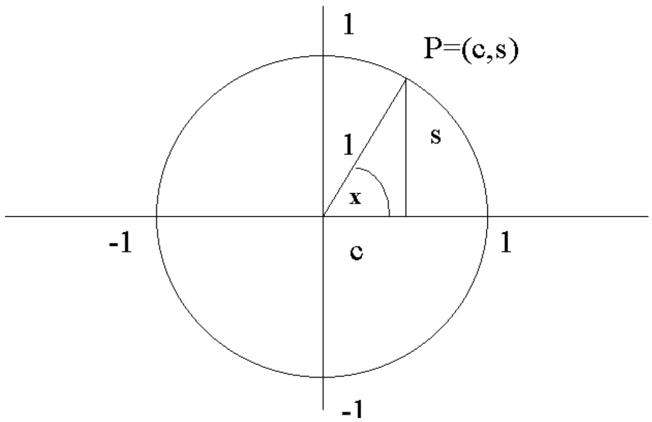


Abbildung 6.1: Trigonometrischer Pythagoras

In Abbildung 6.1 ist ein Winkel $x$ im Einheitskreis eingetragen, und deshalb gilt $c = \cos x$ und $s = \sin x$. Nach dem bekannten Satz des Pythagoras folgt dann:

$$1^2 = c^2 + s^2, \text{ und deshalb } 1 = \sin^2 x + \cos^2 x,$$

und diese Formel bezeichnet man oft als den trigonometrischen Pythagoras.

Jetzt habe ich das nötige Rüstzeug zusammen, um die Aufgabe angehen zu können.

(i) Zum Beweis der Formel $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$ sollen Sie nach dem gegebenen Hinweis das Additionstheorem für den Cosinus mit $y = x$ anwenden. Wenn man schon einen Hinweis erhält, dann kann es nicht schaden, ihn zu befolgen und zu sehen, wohin er führt. Ich setze also im Additionstheorem $y = x$ und erhalte:

$$\cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x,$$

also

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Das ist noch nicht so ganz das, was ich herausfinden soll, denn in der gesuchten Formel kommen nur noch $\sin^2 x$ und $\cos(2x)$ vor, während hier noch zusätzlich der quadrierte Cosinus gebraucht wird. Sie haben aber noch nicht den gesamten Hinweis verwertet, denn schließlich wird uns dort auch geraten, den trigonometrischen Pythagoras anzuwenden. Aus $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ folgt natürlich $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, und das kann ich in die oben erreichte Formel einsetzen. Dann erhalte ich:

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x.$$

Damit ist $2\sin^2 x = 1 - \cos(2x)$, und daraus folgt die gewünschte Formel:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)).$$

(ii) Die Gleichung $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$ kann man ganz genauso beweisen wie die Gleichung aus (i), und ich werde Ihnen zunächst diesen Weg zeigen. Anschließend führe ich Ihnen dann noch vor, wie es auch etwas kürzer gegangen wäre. Ich verwende also wieder das Additionstheorem für den Cosinus mit $y = x$. In der Zwischenzeit hat es sich nicht geändert, und deshalb gilt nach wie vor:

$$\cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x,$$

also

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Wenn Sie sich ansehen, was ich hier beweisen soll, dann geht es diesmal um $\cos^2 x$, und ich muß zusehen, wie ich den störenden Term $\sin^2 x$ aus meinem Zwischenergebnis entferne. Das geht natürlich wieder mit dem trigonometrischen Pythagoras, denn aus $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ folgt $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, und das setze ich in mein Zwischenergebnis ein. Dann erhalte ich:

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1.$$

Damit ist $2\cos^2 x = 1 + \cos(2x)$, und daraus folgt die gewünschte Formel:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)).$$

Dieser Beweis ist völlig in Ordnung, aber wir hätten uns das Leben auch etwas leichter machen können. Man muß das Rad nicht bei jeder Aufgabe neu erfinden, und da ich eine ähnliche Formel bereits in (i) bewiesen hatte, macht es vielleicht Sinn, darauf zurückzugreifen. In (i) hatte ich bewiesen, daß immer

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

gilt. Nun ist aber $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, und wenn ich das hier einsetze, dann finde ich:

$$1 - \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x).$$

Auflösen nach $\cos^2 x$ ergibt dann:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)).$$

Es kann also durchaus Sinn machen, nicht immer wieder von vorn anzufangen, sondern die Ergebnisse, die man unterwegs erzielt hat, auf neue Probleme anzuwenden.

(iii) Die Gleichung $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$ sieht schlimm aus, ist aber eigentlich ganz leicht einzusehen, vor allem dann, wenn man den Hinweis auf die dritte binomische Formel beachtet. Bereits in (i) und (ii) hatte ich die Formel

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$$

aus dem Additionstheorem für den Cosinus hergeleitet, und diese Formel hat ja immerhin eine gewisse Ähnlichkeit mit der behaupteten Gleichung. Schade ist nur, daß die Exponenten verschieden sind: wo hier eine 2 steht, habe ich dort eine 4. Dieses Problem verschwindet aber ganz schnell. Die dritte binomische Formel, die hier zum Einsatz kommen soll, lautet bekanntlich $a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$, und so, wie meine Gleichung aussieht, könnte ich es mit $a^2 = \cos^4 x$ und $b^2 = \sin^4 x$ versuchen. Ich setze also

$$a = \cos^2 x \text{ und } b = \sin^2 x.$$

Dann ist natürlich

$$a^2 = \cos^4 x \text{ und } b^2 = \sin^4 x,$$

und mit der dritten binomischen Formel folgt:

$$\cos^4 x - \sin^4 x = a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b) = (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x).$$

Was ist damit gewonnen? Vergessen Sie nicht den trigonometrischen Pythagoras, der mir nach wie vor zur Verfügung steht und aussagt, daß $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ gilt. Die zweite Klammer meines letzten Produkts ist also nur eine besonderes komplizierte Schreibweise für die 1, und das bedeutet:

$$(\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x).$$

Damit Sie den gesamten Weg ohne Unterbrechung vor sich sehen, schreibe ich noch einmal alles vom Anfang bis zum Ende auf. Es gilt:

$$\begin{aligned} \cos^4 x - \sin^4 x &= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= \cos(2x). \end{aligned}$$

**6.3** Zeigen Sie:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus.

**Lösung** In Aufgabe 6.2 haben Sie schon gesehen, daß es Additionstheoreme für die Sinus- und die Cosinusfunktion gibt, und was man damit anfangen kann. Bei dieser Aufgabe handelt es sich um ein Additionstheorem für den Tangens, denn es sagt aus, wie man aus den Tangenswerten für $x$ und $y$ den Tangenswert für $x+y$ berechnen kann. Zum Beweis werde ich einfach auf die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus zurückgreifen: der Tangens ist definiert als Quotient aus Sinus und Cosinus, und man sollte erwarten, daß dann ein Additionstheorem für den Tangens irgendwie mit Hilfe der Additionsformeln für Sinus und Cosinus nachgewiesen werden kann. Zunächst einmal ist

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)},$$

und das gibt Anlaß zur Hoffnung, weil ich im Zähler das Additionstheorem für den Sinus und im Nenner das Additionstheorem für den Cosinus verwenden kann. Mit den Formeln aus Aufgabe 6.2 folgt dann:

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}.$$

Ich gebe sofort zu, daß dieser Bruch keinen sehr einladenden Eindruck macht. Dennoch ist er nicht annähernd so schlimm, wie er aussieht, und vor allem liefert er ein schönes Beispiel dafür, wie man von einem Term, den man zur Verfügung hat, auf einen Term kommt, den man gerne hätte. Bisher habe ich den Zähler $\sin x \cos y + \cos x \sin y$ erreicht, aber wie Sie der Behauptung entnehmen können hätte ich gern den Zähler $\tan x + \tan y$. Wegen $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ kann ich aus dem zweiten Summanden meines gegenwärtigen Zählers kaum einen Tangens von $x$ erzeugen, aber der erste Summand enthält immerhin den Faktor $\sin x$. Wenn ich also den Bruch durch $\cos x$ kürze, dann steht da immerhin schon einmal $\frac{\sin x \cos y}{\cos x} = \tan x \cos y$. Nun bin ich aber schon beim Kürzen, und dann kann ich es auch gleich richtig gründlich machen und den störenden $\cos y$ mit herauskürzen. Ich werde jetzt also den bisher erreichten Bruch durch $\cos x \cos y$ kürzen und nachsehen, was dabei herauskommt. Da Kürzen bedeutet, daß ich Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl teilen muß, erhalte ich:

$$\frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\tan x + \frac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}}.$$

Damit habe ich den $\tan x$ am Anfang meines Zählers erhalten. Der zweite Summand im Zähler lautet jetzt aber

$$\frac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin y}{\cos y} = \tan y,$$

womit ich also im Zähler genau das bekommen habe, was ich wollte. Der erste Summand des Nenners ist offenbar genau 1, und der zweite Summand des

Nenners läßt sich vereinfachen durch:

$$\frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y} = \tan x \cdot \tan y.$$

Insgesamt erhalte ich daher:

$$\frac{\tan x + \frac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y},$$

und genau das sollte auch herauskommen.

Wie schon häufiger schreibe ich auch jetzt noch einmal die gesamte Gleichungskette am Stück auf. Es gilt:

$$\begin{aligned} \tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} \\ &= \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} \\ &= \frac{\tan x + \frac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} \\ &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}. \end{aligned}$$

**6.4** Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden trigonometrischen Gleichungen.

(i) $\sin(2x) = \cos x$;

(ii) $\sin(2x) = \tan x$;

(iii) $2\cos^2 x - 5\cos x = -2$.

(iv) $2\sin^2 x = \sin x + 1$.

Hinweis: Verwenden Sie in (i) und (ii) das Sinus-Additionstheorem mit $y = x$ und vereinfachen Sie anschließend die Gleichung so weit wie möglich. In (iii) und (iv) setzen Sie $z = \cos x$ bzw. $z = \sin x$ und lösen die entstehende quadratische Gleichung.

**Lösung** Im Gegensatz zu algebraischen Gleichungen wie beispielsweise quadratischen Gleichungen oder Gleichungen dritten Grades kommen bei trigonometrischen Gleichungen nicht nur Potenzen von $x$ vor, sondern vor allem die auf die Unbekannte $x$ angewandten trigonometrischen Funktionen. Das schafft natürlich Probleme, denn während es zum Beispiel für quadratische Gleichungen eine einfache Lösungsformel gibt, die auf der bekannten binomischen Formel beruht, ist so etwas für trigonometrische Gleichungen nicht möglich: die trigonometrischen Funktionen sind zu kompliziert, um einfache Lösungsformeln zu gestatten. Dazu kommt noch, daß man mit einer Unmenge an Lösungen rechnen muß. Schon die ausgesprochen einfache Gleichung $\sin x = 0$ hat als Lösungen alle Nullstellen der Sinusfunktion, das heißt die Lösungsmenge dieser simplen Gleichung lautet $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Man muß also bei solchen Gleichungen mit Schwierigkeiten rechnen, und Sie werden diese Schwierigkeiten auch gleich kennenlernen.

(i) Zur Lösung der Gleichung $\sin(2x) = \cos x$ ist immerhin ein Hinweis vorhanden: ich soll das Additionstheorem der SInusfunktion mit $y = x$ verwenden und anschließend die Gleichung so weit wie möglich vereinfachen. Mit $y = x$ folgt aus dem Additionstheorem:

$$\sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x, \text{ also } \sin(2x) = 2\sin x \cos x.$$

Die Gleichung kann ich also auch schreiben als

$$2\sin x \cos x = \cos x.$$

An dieser Stelle wird oft und gern ein bestimmter Fehler gemacht: da auf beiden Seiten der umformulierten Gleichung der Term $\cos x$ auftritt, könnte man ja einfach durch diesen $\cos x$ dividieren und wäre ihn dann ein für allemal los. Könnte man, kann man aber nicht. Bedenken Sie, daß der Cosinus durchaus auch zu Null werden kann, und daß Sie durch Null nicht teilen dürfen. Noch schlimmer: Für irgendein $x$ mit $\cos x = 0$ haben Sie offenbar auf beiden Seiten der Gleichung eine Null stehen, so daß dieses $x$ tatsächlich schon eine Lösung der Gleichung ist, die Sie durch das Abdividieren des Cosinus verlieren würden.

Man kann aber etwas anderes machen, das nicht viel anders aussieht und doch wesentlich besser ist. Zuerst bringe ich den $\cos x$ auf die linke Seite und dann klammere ich ihn aus. Das ergibt:

$$2\sin x \cos x - \cos x = 0, \text{ also } \cos x \cdot (2\sin x - 1) = 0.$$

Noch einmal: ich darf auch jetzt unter keinen Umständen einfach so durch $\cos x$ teilen. Ich kann mir aber zu Nutze machen, daß ich weiß, wann ein Produkt Null wird: genau dann, wenn einer der beiden Faktoren Null wird. Es gilt also:

$$\begin{aligned} \cos x \cdot (2\sin x - 1) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos x = 0 \text{ oder } 2\sin x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \cos x = 0 \text{ oder } \sin x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Jetzt ist die Gleichung schon wesentlich übersichtlicher geworden, denn ich muß nur noch herausfinden, wann $\cos x = 0$ oder $\sin x = \frac{1}{2}$ ist. Die erste Frage ist leicht zu beantworten, denn es gilt:

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3}{2}\pi = \cos\frac{5}{2}\pi = \cdots = 0,$$

das heißt, der Cosinus ist genau dann Null, wenn sein Input von der Form $\frac{\pi}{2} + k\pi$ mit einer ganzen Zahl $k$ ist. Es gilt also:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

. Zur Frage, wann $\sin x = \frac{1}{2}$ gilt, finden Sie vielleicht mit Hilfe eines Taschenrechners heraus, daß $\sin 30° = \frac{1}{2}$, also im Bogenmaß $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ist. Das ist aber noch nicht alles, denn es gilt immer $\sin(\pi - x) = \sin x$, und daraus folgt $\sin \frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2}$. Da sich der Sinus natürlich bei jedem vollen Durchgang um $2\pi$ wiederholt, folgt daraus:

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \text{ oder } x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Da die Lösungsmenge der Gleichung aus allen $x$-Werten besteht, für die $\cos x = 0$ oder $\sin x = \frac{1}{2}$ gilt, folgt:

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(ii) Nun löse ich die Gleichung $\sin(2x) = \tan x$, und es ist nicht sehr überraschend, daß auch hier wieder die Formel für $\sin(2x)$ zum Einsatz kommt, die ich schon in Teil (i) gebraucht habe. Wegen $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ ist diese Gleichung also äquivalent zu der Gleichung

$$2\sin x \cos x = \tan x.$$

Auf der rechten Seite steht noch $\tan x$, aber das kann man leicht in Sinus und Cosinus umformen. Damit ergibt sich die Gleichung:

$$2\sin x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Auch hier kann sich die Versuchung ergeben, unzulässig durch $\sin x$ zu dividieren, da der Sinus von $x$ auf beiden Seiten der Gleichung in der passenden Position steht. Das wäre aber genauso verboten wie das Teilen durch $\cos x$ in Teil (i), denn natürlich kann auch $\sin x$ zu Null werden, und wir würden durch voreiliges Dividieren Lösungen verlieren. Ich kann aber alles auf eine Seite bringen und danach vorklammern. Das führt zu:

$$2\sin x \cos x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0, \text{ also } \sin x \cdot \left(2\cos x - \frac{1}{\cos x}\right) = 0.$$

Nach dem alten Prinzip, daß ein Produkt genau dann Null ist, wenn wenigstens einer seiner beiden Faktoren Null ist, bedeutet das:

$$\sin x \cdot \left(2\cos x - \frac{1}{\cos x}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ oder } 2\cos x - \frac{1}{\cos x} = 0.$$

Der erste Teil ist wieder einfach. Sie wissen, daß

$$\sin 0 = \sin \pi = \sin 2\pi = \cdots = 0$$

gilt, und das heißt:

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Nun muß ich noch herausfinden, wann $2\cos x - \frac{1}{\cos x} = 0$ gilt. Dazu bleibt mir nicht viel anderes übrig, als mit $\cos x$ durchzumultiplizieren. Das ergibt dann:

$$2\cos^2 x - 1 = 0, \text{ und damit } \cos^2 x = \frac{1}{2}, \text{ also } \cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Der Einsatz Ihres Taschenrechners liefert

$$\cos 45^\circ = \cos 315^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

also im Bogenmaß:

$$\cos\frac{\pi}{4} = \cos\frac{7}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Weiterhin ist

$$\cos 135^\circ = \cos 225^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2},$$

also im Bogenmaß:

$$\cos\frac{3}{4}\pi = \cos\frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Mit anderen Worten: multipliziert man $\frac{\pi}{4}$ mit einer ungeraden ganzen Zahl, dann ergibt sich für diesen Input der Cosinuswert $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ oder $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Da die Lösungsmenge der Gleichung aus allen $x$-Werten besteht, für die $\sin x = 0$ oder $2\cos x - \frac{1}{\cos x} = 0$ gilt, folgt:

$$\mathbb{L} = \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{\pi}{4}(2k+1) \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(iii) Die Gleichung $2\cos^2 x - 5\cos x = -2$ legt ein anderes Verfahren nahe, das auch schon der zugehörige Hinweis beschreibt. Setzt man hier $z = \cos x$, so ergibt sich für die Unbekannte $z$ die Gleichung:

$$2z^2 - 5z = -2, \text{ also } 2z^2 - 5z + 2 = 0 \text{ und damit } z^2 - \frac{5}{2}z + 1 = 0.$$

Das ist nun eine ganz normale quadratische Gleichung mit der Unkannten $z$, die ich wie üblich mit Hilfe der $p, q$-Formel lösen kann. Es gilt:

$$z_{1,2} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}.$$

Also ist $z_1 = \frac{1}{2}$ und $z_2 = 2$. Nun darf man aber nicht vergessen, daß die Sache noch keineswegs zu Ende ist, denn $z$ war nur eine Hilfsvariable, die für den Cosinus von $x$ steht. Ich muß also noch die Gleichungen $\cos x = \frac{1}{2}$ und $\cos x = 2$ nach $x$ auflösen und damit die $x$-Werte für jeden der beiden $z$-Werte bestimmen. Für $z_1 = \frac{1}{2}$ kann man wieder mit dem Taschenrechner feststellen, daß

$$\cos 60^\circ = \cos 300^\circ = \frac{1}{2},$$

also im Bogenmaß

$$\cos \frac{\pi}{3} = \cos \frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2}$$

gilt. Da sich auch der Cosinus in Zyklen von $2\pi$ wiederholt, heißt das:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \text{ oder } x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Für $z_2 = 2$ ist alles etwas einfacher, denn die Gleichung $\cos x = 2$ kann keine Lösung haben, da stets $|\cos x| \leq 1$ gilt. Ich habe also nur $z_1$ als brauchbaren $z$-Wert, und damit ergibt sich die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(iv) Die Gleichung $2\sin^2 x = \sin x + 1$ läßt sich nach dem gleichen Prinzip angehen wie die Gleichung in Teil (iii), nur daß ich hier $z = \sin x$ setzen muß. Dann erhalte ich die neue Gleichung:

$$2z^2 = z + 1 \Leftrightarrow 2z^2 - z - 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0.$$

Die $p, q$-Formel liefert:

$$z_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}.$$

Also ist $z_1 = -\frac{1}{2}$ und $z_2 = 1$. Für $z_1 = -\frac{1}{2}$ muß ich nun feststellen, wann $\sin x = -\frac{1}{2}$ wird. Laut Taschenrechner ist aber

$$\sin 210^\circ = \sin 330^\circ = -\frac{1}{2},$$

also im Bogenmaß

$$\sin \frac{7}{6}\pi = \sin \frac{11}{6}\pi = -\frac{1}{2}.$$

Da sich der Sinus in Zyklen von $2\pi$ wiederholt, heißt das:

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \text{ oder } x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}.$$