1 Zug und Druck in Stäben

In der Elastostatik untersucht man die Beanspruchung und die Verformung von elastischen Tragwerken unter der Wirkung von Kräften. Wir wollen uns im ersten Kapitel nur mit dem einfachsten Bauteil – dem Stab – befassen. Er ist dadurch gekennzeichnet, daß seine Querschnittsabmessungen sehr viel kleiner sind als seine Länge und daß er nur *in* seiner Längsrichtung auf Zug oder Druck beansprucht wird (vgl. Band 1).

1.1 Spannung

Wir betrachten einen geraden Stab mit konstanter Querschnittsfläche A. Die Verbindungslinie der Schwerpunkte der Querschnittsflächen heißt *Stabachse*. Der Stab werde an seinen Enden durch die Kräfte F belastet, deren gemeinsame Wirkungslinie die Stabachse ist (Abb. 1.1a).

Die *äußere* Belastung verursacht *innere* Kräfte. Um sie bestimmen zu können, führen wir in Gedanken einen Schnitt durch den Stab. Die in der Schnittfläche verteilten inneren Kräfte sind Flächenkräfte und werden als *Spannungen* bezeichnet. Sie haben die Dimension Kraft pro Fläche und werden z.B. in der Einheit N/mm^2 oder in der nach dem Mathematiker und Physiker Blaise Pascal (1623–1662) benannten Einheit $1\ \text{Pa} = 1\ \text{N/m}^2$ $(1\ \text{MPa} = 1\ \text{N/mm}^2)$ angegeben. Der Begriff der

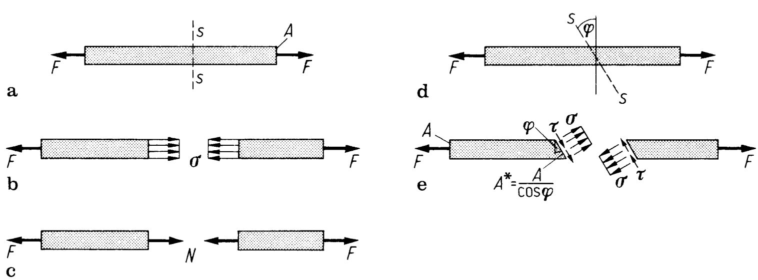


Abb. 1.1

Spannungen wurde von Cauchy (1789–1857) eingeführt. Während wir in der Statik starrer Körper nur die Resultierende der inneren Kräfte (= Stabkraft) verwendet haben, müssen wir uns in der Elastostatik nun mit den verteilten inneren Kräften (= Spannungen) selbst befassen.

Wir wählen zunächst einen zur Stabachse senkrechten Schnitt $s - s$. In der Schnittfläche wirken dann Spannungen σ (Abb. 1.1b). Wir nehmen an, daß sie senkrecht zur Schnittfläche stehen und gleichförmig verteilt sind. Weil sie normal zum Schnitt stehen, nennt man sie *Normalspannungen*. Nach Band 1, Abschnitt 7.1, lassen sie sich zur Normalkraft N zusammenfassen (Abb. 1.1c). Daher gilt $N = \sigma A$, und die Größe von σ kann aus der Normalkraft bestimmt werden:

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A}} \,. \tag{1.1}$$

Da die Normalkraft N im Stab gleich der äußeren Kraft F ist, wird aus (1.1)

$$\sigma = \frac{F}{A} \,. \tag{1.2}$$

Im Falle einer positiven Normalkraft N (Zugstab) ist auch die Spannung σ positiv (Zugspannung); bei einer negativen Normalkraft (Druckstab) ist sie negativ (Druckspannung).

Wir wollen nun den Schnitt durch einen Zugstab nicht senkrecht zur Stabachse führen, sondern in einer nach Abb. 1.1d um den Winkel φ gedrehten Richtung. Die inneren Kräfte (Spannungen) wirken dann auf die Schnittfläche $A^* = A/\cos\varphi$, wobei wir wieder annehmen, daß die Verteilung gleichförmig ist. Wir zerlegen die Spannungen in eine Komponente σ normal und eine Komponente τ tangential zur Schnittfläche (Abb. 1.1e). Die Normalkomponente σ ist die Normalspannung, die Tangentialkomponente τ heißt *Schubspannung*.

Kräftegleichgewicht am linken Balkenteil liefert

$$\rightarrow: \quad \sigma A^* \cos\varphi + \tau A^* \sin\varphi - F = 0 \,,$$

$$\uparrow: \quad \sigma A^* \sin\varphi - \tau A^* \cos\varphi = 0 \,.$$

Mit $A^* = A/\cos\varphi$ folgt daraus

$$\sigma + \tau \tan\varphi = \frac{F}{A} \,, \qquad \sigma \tan\varphi - \tau = 0 \,.$$

Wenn wir diese beiden Gleichungen nach σ und τ auflösen, so erhalten wir zunächst

$$\sigma = \frac{1}{1+\tan^2\varphi}\frac{F}{A}\,, \qquad \tau = \frac{\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi}\frac{F}{A}\,.$$

Mit den trigonometrischen Umformungen

$$\frac{1}{1+\tan^2\varphi} = \cos^2\varphi\,, \qquad \cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\,,$$
$$\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$$

und der Abkürzung $\sigma_0 = F/A$ (= Normalspannung in einem Schnitt senkrecht zur Stabachse) ergibt sich schließlich

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{2}(1+\cos 2\varphi)\,, \qquad \tau = \frac{\sigma_0}{2}\sin 2\varphi\,. \tag{1.3}$$

Die Spannungen hängen somit von der Schnittrichtung φ ab. Bei Kenntnis von σ_0 können σ und τ für beliebige Schnitte aus (1.3) berechnet werden. Der Größtwert der Normalspannung tritt bei $\varphi = 0$ auf: $\sigma_{\max} = \sigma_0$. Die Schubspannung erreicht für $\varphi = \pi/4$ ihr Maximum $\tau_{\max} = \sigma_0/2$.

Bei einem Schnitt $s-s$ in der Nähe eines Stabendes, an dem eine Einzelkraft F eingreift (Abb. 1.2a), ist die Normalspannung nicht gleichmäßig über die Schnittfläche verteilt: es kommt dort zu „Spannungsspitzen“ (Abb. 1.2b). Die Erfahrung zeigt jedoch, daß eine solche Spannungsüberhöhung auf die unmittelbare Umgebung des Angriffspunkts der Einzelkraft beschränkt ist und mit zunehmendem Abstand vom Stabende sehr schnell abklingt (Prinzip von de Saint-Venant).

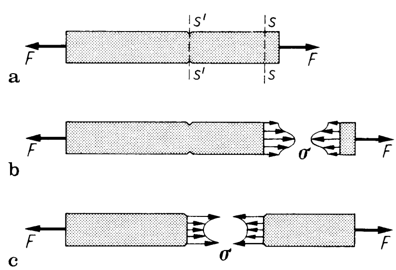


Abb. 1.2

Die gleichförmige Spannungsverteilung wird auch bei gelochten, gekerbten oder abgesetzten Querschnitten (allgemein: bei starker Querschnittsänderung) gestört. Weist der Stab z.B. Kerben auf, so tritt im Restquerschnitt (Schnitt $s' - s'$) ebenfalls eine Spannungsüberhöhung auf (Abb. 1.2c). Die Ermittlung solcher Spannungsverteilungen ist mit der elementaren Theorie für den Zugstab nicht möglich.

Wenn der Querschnitt des Stabes längs der Stabachse nur *schwach* veränderlich ist, kann die Normalspannung in guter Näherung weiterhin aus (1.1) berechnet werden. Dann sind allerdings die Querschnittsfläche A und somit auch die Spannung σ vom Ort abhängig. Wirken zusätzlich zu den Einzelkräften noch Volumenkräfte in Richtung der Stabachse, so hängt auch die Normalkraft N vom Ort ab. Mit einer in Richtung der Stabachse gezählten Koordinate x gilt dann bei veränderlichem Querschnitt:

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)} \,. \tag{1.4}$$

Dabei wird auch hier angenommen, daß die Spannungsverteilung in einem beliebigen Querschnitt (fester Wert x) gleichförmig ist.

Bei statisch bestimmten Systemen kann man allein aus Gleichgewichtsbedingungen die Normalkraft N ermitteln. Wenn die Querschnittsfläche A gegeben ist, dann läßt sich daraus nach (1.4) die Spannung σ bestimmen.

In der Praxis ist es erforderlich, die Abmessungen von Bauteilen so zu wählen, daß eine vorgegebene maximale Beanspruchung nicht überschritten wird. Bei einem Stab bedeutet dies, daß der Betrag der Spannung σ nicht größer als eine *zulässige Spannung* σ_{zul} werden darf: $|\sigma| \leq \sigma_{\text{zul}}$ (bei manchen Werkstoffen sind die zulässigen Spannungen für Zug und Druck verschieden). Mit $\sigma = N/A$ läßt sich daraus bei gegebener Belastung N die erforderliche Querschnittsfläche

$$A_{\text{erf}} = \frac{|N|}{\sigma_{\text{zul}}} \tag{1.5}$$

berechnen. Diese Aufgabe nennt man *Dimensionierung*. Wenn dagegen der Querschnitt A vorgegeben ist, so folgt aus $|N| \leq \sigma_{\text{zul}} A$ die zulässige Belastung des Stabes.

Es sei angemerkt, daß ein auf *Druck* beanspruchter, schlanker Stab durch Knicken versagen kann, bevor die Spannung einen unzulässig großen Wert annimmt. Mit der Untersuchung von Knickproblemen wollen wir uns erst im Kapitel 7 beschäftigen.

Beispiel 1.1: Ein konischer Stab (Länge l) mit kreisförmigem Querschnitt (Endradien r_0 bzw. $2\,r_0$) wird nach Abb. 1.3a durch eine Druckkraft F in der Stabachse belastet.

Wie groß ist die Normalspannung σ in einem beliebigen Querschnitt bei einem Schnitt senkrecht zur Stabachse?

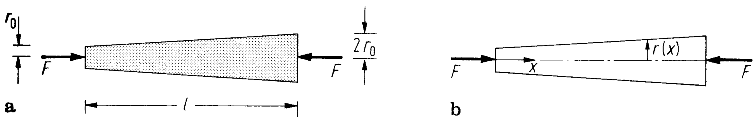


Abb. 1.3

Lösung: Wir führen eine Koordinate x längs der Stabachse ein (Abb. 1.3b). Dann wird

$$r(x) = r_0 + \frac{r_0}{l}\,x = r_0\left(1 + \frac{x}{l}\right) .$$

Mit der Querschnittsfläche $A(x) = \pi\,r^2(x)$ und der konstanten Normalkraft $N = -F$ erhalten wir nach (1.4) für die Normalspannung

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{N}{A(x)} = -\underline{\underline{\frac{F}{\pi r_0^2\left(1 + \frac{x}{l}\right)^2}}} .$$

Das Minuszeichen zeigt an, daß eine Druckspannung vorliegt. Ihr Betrag ist am linken Ende ($x = 0$) viermal so groß wie am rechten Ende ($x = l$).

Beispiel 1.2: Ein Wasserturm mit Kreisringquerschnitt (Höhe H, Dichte ϱ) trägt einen Behälter vom Gewicht G_0 (Abb. 1.4a). Der Innenraum des Turms hat den konstanten Radius r_i.

Wie groß muß der Außenradius r gewählt werden, damit bei Berücksichtigung des Eigengewichts überall die gleiche Druckspannung σ_0 herrscht?

Lösung: Wir fassen den Wasserturm als Stab auf. Durch (1.4) ist ein Zusammenhang zwischen Spannung, Normalkraft und Querschnittsfläche gegeben. Dabei ist hier die konstante Druckspannung $\sigma = \sigma_0$ bekannt; die Normalkraft N (hier als Druckkraft positiv gezählt) und die Querschnittsfläche A sind unbekannt.

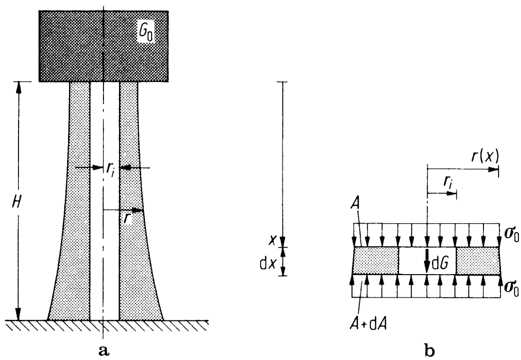


Abb. 1.4

Eine zweite Gleichung erhalten wir aus dem Gleichgewicht. Wir zählen die Koordinate x vom oberen Ende des Turms und betrachten ein Stabelement der Länge $\mathrm{d}x$ (Abb. 1.4b). Für den Kreisringquerschnitt an der Stelle x gilt

$$A = \pi(r^2 - r_i^2)\,, \tag{a}$$

wobei $r = r(x)$ der gesuchte Außenradius ist. Die Normalkraft ist dort nach (1.4) durch $N = \sigma_0 A$ gegeben. An der Stelle $x + \mathrm{d}x$ haben die Querschnittsfläche bzw. die Normalkraft die Größen $A + \mathrm{d}A$ bzw. $N + \mathrm{d}N = \sigma_0(A + \mathrm{d}A)$.

Das Gewicht des Elements beträgt $\mathrm{d}G = \varrho\, g\, \mathrm{d}V$, wobei das Volumen des Elements durch $\mathrm{d}V = A\,\mathrm{d}x$ (bei Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung) gegeben ist. Damit liefert das Kräftegleichgewicht in vertikaler Richtung

$$\uparrow: \quad \sigma_0(A + \mathrm{d}A) - \varrho\, g\, \mathrm{d}V - \sigma_0 A = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_0\, \mathrm{d}A - \varrho\, g\, A\, \mathrm{d}x = 0\,.$$

Durch Trennen der Variablen und Integration ergibt sich daraus

$$\int \frac{\mathrm{d}A}{A} = \int \frac{\varrho\, g}{\sigma_0}\,\mathrm{d}x \quad \rightarrow \quad \ln\frac{A}{A_0} = \frac{\varrho\, g\, x}{\sigma_0} \quad \rightarrow \quad A = A_0\, \mathrm{e}^{\frac{\varrho\, g\, x}{\sigma_0}}\,. \tag{b}$$

Die Integrationskonstante A_0 folgt aus der Bedingung, daß auch am oberen Ende des Turms (für $x = 0$ ist $N = G_0$) die Normalspannung gleich σ_0 sein soll:

$$\frac{G_0}{A_0} = \sigma_0 \qquad \rightarrow \qquad A_0 = \frac{G_0}{\sigma_0}\,. \tag{c}$$

Aus (a) bis (c) erhält man dann für den Außenradius

$$\underline{\underline{r^2(x) = r_i^2 + \frac{G_0}{\pi\,\sigma_0} \mathrm{e}^{\frac{\varrho\, g\, x}{\sigma_0}}}}\,.$$

1.2 Dehnung

Nach den Spannungen wollen wir nun die Verformungen eines elastischen Stabes untersuchen. Hierzu betrachten wir zunächst einen Stab mit konstanter Querschnittsfläche, der im unbelasteten Zustand die Länge l hat. Wenn an seinen Enden eine Zugkraft angreift, dann verlängert er sich um Δl (Abb. 1.5). Neben der Verlängerung Δl als Maß für die Größe

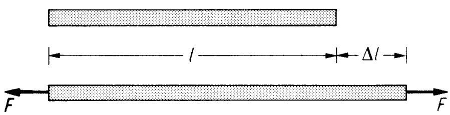


Abb. 1.5

der Verformung führt man in der Technik außerdem das Verhältnis von Längenänderung zu Ausgangslänge ein:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}\,. \tag{1.6}$$

Die Größe ε heißt *Dehnung*; sie ist dimensionslos. Wenn sich zum Beispiel ein Stab der Länge $l = 1$ m um $\Delta l = 0,5$ mm verlängert, dann ist $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-3}$; dies ist eine Dehnung von 0,05%. Bei einer Verlängerung ($\Delta l > 0$) ist die Dehnung positiv, bei einer Verkürzung ($\Delta l < 0$) negativ. Wir werden im folgenden nur kleine Deformationen, d.h. $|\Delta l| \ll l$ bzw. $|\varepsilon| \ll 1$ betrachten.

Die Definition (1.6) für die Dehnung gilt nur dann, wenn ε über die gesamte Stablänge konstant ist. Hat ein Stab eine veränderliche Querschnittsfläche oder wirken Volumenkräfte längs der Stabachse, so kann die Dehnung vom Ort abhängen. Man gelangt dann zu einer Definition der örtlichen Dehnung, indem man statt des gesamten Stabes ein Stabelement betrachtet (Abb. 1.6). Das Element hat im unbelasteten Stab die Länge $\mathrm{d}x$. Seine linke Querschnittsfläche befindet sich an der Stelle x, seine rechte an der Stelle $x + \mathrm{d}x$. Wenn wir den Stab deformieren,

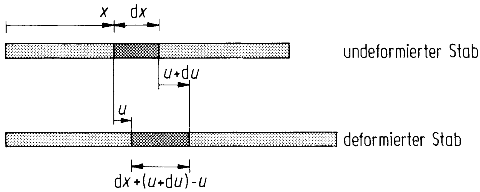


Abb. 1.6

erfahren die Querschnitte Verschiebungen, die wir mit u bezeichnen. Sie hängen vom Ort x des Querschnitts ab: $u = u(x)$. Verschiebt sich der linke Querschnitt des Stabelementes um u, dann verschiebt sich der rechte Querschnitt um $u + \mathrm{d}u$. Die Länge des Elements beträgt im belasteten Stab $\mathrm{d}x + (u + \mathrm{d}u) - u = \mathrm{d}x + \mathrm{d}u$. Seine Längenänderung ist somit durch $\mathrm{d}u$ gegeben. Das Verhältnis der Längenänderung zur ursprünglichen Länge $\mathrm{d}x$ ist die örtliche Dehnung:

$$\boxed{\varepsilon(x) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}\,. \qquad (1.7)$$

Wenn die Verschiebung $u(x)$ bekannt ist, dann kann die Dehnung $\varepsilon(x)$ durch Differenzieren ermittelt werden. Ist dagegen $\varepsilon(x)$ bekannt, so läßt sich $u(x)$ durch Integrieren bestimmen.

Die Verschiebung u und die Dehnung ε beschreiben die Geometrie der Verformung. Man bezeichnet sie daher als *kinematische Größen*; Gleichung (1.7) nennt man eine kinematische Beziehung.

1.3 Stoffgesetz

Spannungen sind Kraftgrößen und ein Maß für die Beanspruchung eines Körpers. Dehnungen sind kinematische Größen und ein Maß für die Verformung. Diese hängt allerdings von der auf den Körper wirkenden Belastung ab. Demnach sind die Kraftgrößen und die kinematischen Größen miteinander verknüpft. Die physikalische Beziehung zwischen ihnen heißt *Stoffgesetz*. Das Stoffgesetz ist abhängig vom Werkstoff, aus dem der Körper besteht. Es kann nur mit Hilfe von Experimenten gewonnen werden.

Ein wichtiges Experiment zur Ermittlung des Zusammenhangs zwischen Spannung und Dehnung ist der Zug- bzw. der Druckversuch. Dabei wird ein Probestab in einer Prüfmaschine gedehnt bzw. gestaucht. Die von der Maschine auf den Stab ausgeübte Kraft F ruft im Stab die Normalspannung $\sigma = F/A$ hervor. Gleichzeitig ändert sich die Meßlänge l

des Stabes. Aus der gemessenen Längenänderung Δl kann die Dehnung $\varepsilon = \Delta l/l$ berechnet werden.

Der Zusammenhang zwischen σ und ε wird in einem *Spannungs-Dehnungs-Diagramm* dargestellt. Abbildung 1.7 zeigt schematisch (nicht maßstäblich) die in einem Zugversuch gewonnene Kurve für einen Probestab aus Stahl. Man erkennt, daß zunächst Spannung und Dehnung proportional anwachsen. Dieser lineare Zusammenhang gilt bis zur *Proportionalitätsgrenze* σ_P. Wenn man die Spannung weiter erhöht, dann wächst die Dehnung überproportional. Bei Erreichen der *Fließspannung (Streckgrenze)* σ_F nimmt die Dehnung bei praktisch gleichbleibender Spannung zu: der Werkstoff beginnt zu *fließen* (es sei angemerkt, daß viele Werkstoffe keine ausgeprägte Streckgrenze besitzen). Anschließend steigt die Kurve wieder an, d.h. der Werkstoff kann eine weitere Belastung aufnehmen. Diesen Bereich bezeichnet man als *Verfestigungsbereich*.

Man kann experimentell feststellen, daß bei der Verlängerung eines Stabes die Querschnittsfläche A abnimmt. Diesen Vorgang nennt man *Querkontraktion*. Bei hohen Spannungen verringert sich der Querschnitt des Probestabes nicht mehr gleichmäßig über die gesamte Länge, sondern er beginnt sich einzuschnüren. Dann beschreibt die auf den Ausgangsquerschnitt A bezogene Spannung $\sigma = F/A$ die wirkliche Beanspruchung nicht mehr richtig. Man führt daher zweckmäßig die auf die wirkliche Querschnittsfläche A_w bezogene Spannung $\sigma_w = F/A_w$ ein. Sie ist die wirkliche Spannung im eingeschnürten Bereich. Man nennt σ_w auch die physikalische Spannung, während σ die nominelle (konventionelle) Spannung heißt. Abbildung 1.7 zeigt beide Spannungen bis zum Bruch des Stabes.

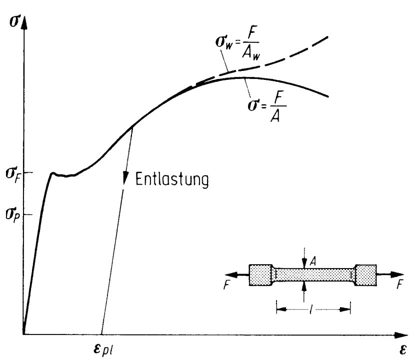


Abb. 1.7

Wenn man einen Probestab bis zu einer Spannung $\sigma < \sigma_F$ *belastet* und anschließend vollständig *entlastet*, so nimmt er seine ursprüngliche Länge wieder an: die Dehnung geht auf den Wert Null zurück. Dabei fallen die Belastungs- und die Entlastungskurve zusammen. Dieses Materialverhalten nennt man *elastisch*. Entsprechend heißt der Bereich $\sigma \leq \sigma_P$ *linear-elastisch*. Wird der Stab dagegen vor der Entlastung über σ_F hinaus belastet, so verläuft die Entlastungslinie parallel zur Geraden im linear-elastischen Bereich, vgl. Abb. 1.7. Bei völliger Entlastung geht die Dehnung dann nicht auf Null zurück, sondern es bleibt eine *plastische* Dehnung ε_{pl} erhalten. Dieses Stoffverhalten heißt *plastisch*.

Wir wollen uns im folgenden immer auf linear-elastisches Materialverhalten beschränken und dies kurz elastisch nennen (d.h. „elastisch" bedeutet im weiteren immer „linear-elastisch"). Dann gilt zwischen Spannung und Dehnung der lineare Zusammenhang

$$\boxed{\sigma = E\,\varepsilon} \,. \tag{1.8}$$

Der Proportionalitätsfaktor E heißt *Elastizitätsmodul*. Das Elastizitätsgesetz (1.8) wird nach Hooke (1635–1703) das *Hookesche Gesetz* genannt. Es sei angemerkt, daß Hooke das Gesetz noch nicht in der Form (1.8) angeben konnte, da der Spannungsbegriff erst 1822 von Cauchy (1789–1857) eingeführt wurde.

Die Beziehung (1.8) gilt für Zug und für Druck (der Elastizitätsmodul ist für Zug und für Druck gleich). Damit (1.8) gültig ist, muß die Spannung unterhalb der Proportionalitätsgrenze σ_P bleiben, die für Zug bzw. für Druck verschieden sein kann.

Der Elastizitätsmodul E ist eine Materialkonstante, die mit Hilfe des Zugversuchs bestimmt werden kann. Seine Dimension ist (wie die einer Spannung) Kraft/Fläche; er wird z.B. in der Einheit $\mathrm{N/mm^2}$ angegeben. In der Tabelle 1.1 sind Werte von E für einige Werkstoffe bei Raumtemperatur zusammengestellt (diese Zahlenwerte sind nur Richtwerte, da der Elastizitätsmodul von der Zusammensetzung des Werkstoffs und der Temperatur abhängt).

Eine Zug- bzw. eine Druckkraft erzeugt in einem Stab nach (1.8) eine Dehnung

$$\varepsilon = \sigma / E \,. \tag{1.9}$$

Längenänderungen und damit Dehnungen werden allerdings nicht nur durch Kräfte, sondern auch durch Temperaturänderungen hervorgerufen. Experimente zeigen, daß bei gleichförmiger Erwärmung eines Stabes die

Tabelle 1.1. Werkstoffkennwerte

Material	E in N/mm^2	α_T in $1/^\circ$ C
Stahl	2,1·10^5	1,2·10^{-5}
Aluminium	0,7·10^5	2,3·10^{-5}
Beton	0,3·10^5	1,0·10^{-5}
Holz (in Faserrichtung)	0,7... 1,6·10^5	2,2 ... 3,1·10^{-5}
Gußeisen	1,0·10^5	0,9·10^{-5}
Kupfer	1,2·10^5	1,6·10^{-5}
Messing	1,0·10^5	1,8·10^{-5}

Wärmedehnung ε_T proportional zur Temperatur ΔT ist:

$$\varepsilon_T = \alpha_T \Delta T\,. \tag{1.10}$$

Der Proportionalitätsfaktor α_T heißt *thermischer Ausdehnungskoeffizient (Wärmeausdehnungskoeffizient*). Er ist eine weitere Werkstoffkonstante und wird in der Einheit $1/^\circ$ C angegeben. Einige Zahlenwerte sind in Tabelle 1.1. zusammengestellt.

Falls die Temperaturänderung nicht über die gesamte Stablänge gleich ist, sondern vom Ort abhängt, dann ergibt (1.10) die örtliche Dehnung $\varepsilon_T(x) = \alpha_T \Delta T(x)$.

Wirkt sowohl eine Spannung σ als auch eine Temperaturänderung ΔT, so folgt die Gesamtdehnung ε durch Überlagerung (Superposition) von (1.9) und (1.10) zu

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T}\,. \tag{1.11}$$

Diese Beziehung kann auch in der Form

$$\sigma = E(\varepsilon - \alpha_T \Delta T) \tag{1.12}$$

geschrieben werden.

1.4 Einzelstab

Zur Ermittlung der Spannungen und der Verformungen eines Stabes stehen drei verschiedene Arten von Gleichungen zur Verfügung: die Gleichgewichtsbedingung, die kinematische Beziehung und das Elastizitätsgesetz. Die Gleichgewichtsbedingung wird je nach Problemstellung am ganzen Stab, an einem Teilstab oder an einem Stabelement formuliert. Wir wollen sie hier für ein Element angeben. Dazu betrachten wir einen Stab, der durch Einzelkräfte an den Stabenden und durch Linienkräfte $n = n(x)$ in Richtung der Stabachse belastet ist (Abb. 1.8a). Aus dem

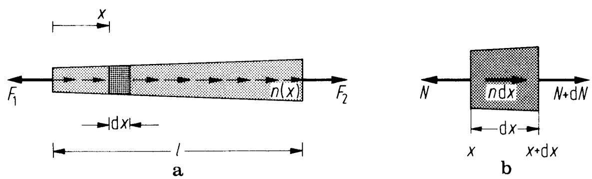


Abb. 1.8

Stab, der sich im Gleichgewicht befinden soll, denken wir uns ein Element nach Abb. 1.8b herausgeschnitten. An der Schnittstelle x wirkt die Normalkraft N, an der Stelle $x + \mathrm{d}x$ die Normalkraft $N + \mathrm{d}N$. Aus dem Kräftegleichgewicht in Richtung der Stabachse

$$\rightarrow: \qquad N + \mathrm{d}N + n\,\mathrm{d}x - N = 0$$

folgt die *Gleichgewichtsbedingung*

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} + n = 0}\,. \tag{1.13}$$

Verschwindet die Linienkraft ($n = 0$), so ist demnach die Normalkraft konstant.

Die *kinematische Beziehung* für den Stab lautet nach (1.7)

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,,$$

während das *Elastizitätsgesetz* durch (1.11)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T$$

gegeben ist.

Wenn man in das Elastizitätsgesetz die kinematische Beziehung und $\sigma = N/A$ einsetzt, so erhält man

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{N}{EA} + \alpha_T \Delta T} \,. \tag{1.14}$$

Da diese Gleichung die Stabverschiebung u mit der Schnittkraft N verbindet, nennt man sie das *Elastizitätsgesetz für den Stab*. Das Produkt EA aus Elastizitätsmodul und Querschnittsfläche wird als *Dehnsteifigkeit* bezeichnet. Die Gleichungen (1.13) und (1.14) sind die Grundgleichungen für den elastisch deformierbaren Stab.

Die Verschiebung u eines Stabquerschnitts erhält man durch Integration der Dehnung:

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \quad \rightarrow \quad \int \mathrm{d}u = \int \varepsilon \, \mathrm{d}\bar{x} \quad \rightarrow \quad u(x) - u(0) = \int_0^x \varepsilon \, \mathrm{d}\bar{x} \,.$$

Die Stabverlängerung Δl folgt aus der Differenz der Verschiebungen an den Stabenden $x = l$ und $x = 0$ zu

$$\Delta l = u(l) - u(0) = \int_0^l \varepsilon \, \mathrm{d}x \,. \tag{1.15}$$

Für einen Stab, der keine Temperaturänderung erfährt ($\Delta T = 0$), erhält man daraus mit $\varepsilon = \mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ und (1.14)

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{EA} \mathrm{d}x \,. \tag{1.16}$$

Im Sonderfall eines Stabes mit konstanter Dehnsteifigkeit, der nur durch eine Einzelkraft F belastet wird ($n = 0$), ergibt sich hieraus

$$\boxed{\Delta l = \frac{F\,l}{EA}} \,. \tag{1.17}$$

Bei der Behandlung von konkreten Aufgaben muß man zwischen statisch bestimmten und statisch unbestimmten Problemen unterscheiden. Bei *statisch bestimmten* Problemen kann man immer mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung aus der äußeren Belastung die Normalkraft $N(x)$ bestimmen. Mit $\sigma = N/A$ und dem Elastizitätsgesetz $\varepsilon = \sigma/E$ folgt daraus die Dehnung $\varepsilon(x)$. Integration liefert dann die Verschiebung

$u(x)$ und die Stabverlängerung Δl. Eine Temperaturänderung verursacht bei statisch bestimmten Problemen nur *Wärmedehnungen* (keine zusätzlichen Spannungen).

Bei *statisch unbestimmten* Problemen kann die Normalkraft dagegen nicht mehr allein aus der Gleichgewichtsbedingung bestimmt werden. Daher müssen zur Lösung der Aufgabe alle Gleichungen (Gleichgewicht, Kinematik, Elastizitätsgesetz) gleichzeitig betrachtet werden. Eine Temperaturänderung kann hier zusätzliche Spannungen verursachen; diese werden *Wärmespannungen* genannt.

Wir wollen abschließend die Grundgleichungen für den elastischen Stab zu einer einzigen Gleichung für die Verschiebung u zusammenfassen. Dazu lösen wir (1.14) nach N auf und setzen in (1.13) ein:

$$(EA\,u')' = -n + (EA\,\alpha_T \Delta T)' \,. \tag{1.18a}$$

Dabei sind Ableitungen nach x durch Striche gekennzeichnet. Die Differentialgleichung (1.18a) vereinfacht sich für $EA = \text{const}$ und $\Delta T = \text{const}$ zu

$$EA\,u'' = -n \,. \tag{1.18b}$$

Wenn die Verläufe von EA, n und ΔT gegeben sind, kann die Verschiebung eines beliebigen Stabquerschnitts durch Integration von (1.18) ermittelt werden. Die dabei auftretenden Integrationskonstanten werden aus den Randbedingungen bestimmt. Ist zum Beispiel das eine Ende eines Stabes unverschieblich gelagert, so gilt dort $u = 0$. Wenn dagegen ein Ende des Stabes verschieblich ist und dort eine Kraft F_0 angreift, dann lautet nach (1.14) mit $N = F_0$ die Randbedingung $u' = F_0/EA + \alpha_T \Delta T$. Am unbelasteten Ende ($F_0 = 0$) eines Stabes, der nicht erwärmt wird ($\Delta T = 0$), folgt daraus $u' = 0$.

Wenn eine der in (1.18) auftretenden Größen über die Stablänge nicht stetig ist (z.B. Sprung im Querschnitt A), so muß man den Stab in Bereiche einteilen. Die Differentialgleichung (1.18) ist dann für jeden Teilbereich zu lösen; die Integrationskonstanten können in diesem Fall aus Rand- und aus Übergangsbedingungen bestimmt werden.

Als Anwendungsbeispiel für ein statisch bestimmtes System betrachten wir einen hängenden Stab konstanter Querschnittsfläche A unter der Wirkung seines Eigengewichts (Abb. 1.9a). Wir bestimmen zunächst die Normalkraft im Stab. Dazu denken wir uns an der Stelle x einen Schnitt gelegt (Abb. 1.9b). Die Normalkraft N ist gleich dem Gewicht G^* des

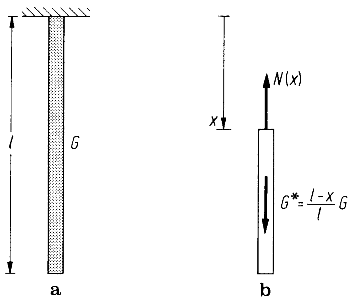


Abb. 1.9

Stabteils unterhalb der Schnittstelle. Dieses läßt sich durch das Gesamtgewicht G ausdrücken: $G^*(x) = G(l-x)/l$. Aus (1.4) folgt damit

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A} = \frac{G}{A}\left(1 - \frac{x}{l}\right) .$$

Die Spannung ist demnach linear über die Länge des Stabes verteilt und nimmt vom Wert $\sigma(0) = G/A$ am oberen Ende auf den Wert $\sigma(l) = 0$ am unteren Ende ab.

Aus (1.16) erhalten wir die Verlängerung des Stabes:

$$\Delta l = \int\limits_0^l \frac{N}{EA}\,\mathrm{d}x = \frac{G}{EA}\int\limits_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{G\,l}{EA} .$$

Sie ist halb so groß wie die Verlängerung eines gewichtslosen Stabes, der an seinem Ende durch eine Kraft G belastet wird.

Wir können die Aufgabe auch durch Integration der Differentialgleichung (1.18b) für die Stabverschiebung lösen. Mit der konstanten Streckenlast $n = G/l$ folgt

$$\begin{aligned} EA\,u'' &= -\frac{G}{l} , \\ EA\,u' &= -\frac{G}{l}\,x + C_1 , \\ EA\,u &= -\frac{G}{2\,l}\,x^2 + C_1\,x + C_2 . \end{aligned}$$

Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 werden aus den Randbedingungen bestimmt. Am oberen Ende des Stabes verschwindet die Verschiebung: $u(0) = 0$. Für den spannungsfreien Querschnitt am unteren Ende gilt $u'(l) = 0$. Daraus folgen $C_2 = 0$ und $C_1 = G$. Die Verschiebung und die Normalkraft sind damit bekannt:

$$u(x) = \frac{1}{2}\frac{G\,l}{EA}\left(2\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right), \qquad N(x) = EA\,u'(x) = G\left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Die Verlängerung des Stabes ist wegen $u(0) = 0$ gleich der Verschiebung des unteren Stabendes:

$$\Delta l = u(l) = \frac{1}{2}\frac{G\,l}{EA}.$$

Die Spannung erhält man zu

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A} = \frac{G}{A}\left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Als Anwendungsbeispiel für ein statisch unbestimmtes System betrachten wir einen abgesetzten Stab (Querschnittsflächen A_1 bzw. A_2), der ohne Vorspannung zwischen zwei starren Wänden gelagert ist (Abb. 1.10a). Gesucht sind die Lagerreaktionen, wenn der Stab im Bereich ① gleichförmig um ΔT erwärmt wird.

Es treten *zwei* Lagerkräfte auf (Abb. 1.10b). Zu ihrer Ermittlung steht nur *eine* Gleichgewichtsbedingung zur Verfügung:

$$\rightarrow: \quad B - C = 0\,.$$

Daher müssen wir die Verformungen in die Rechnung einbeziehen. Für die Verlängerungen in den beiden Teilbereichen ① und ② gilt nach (1.15)

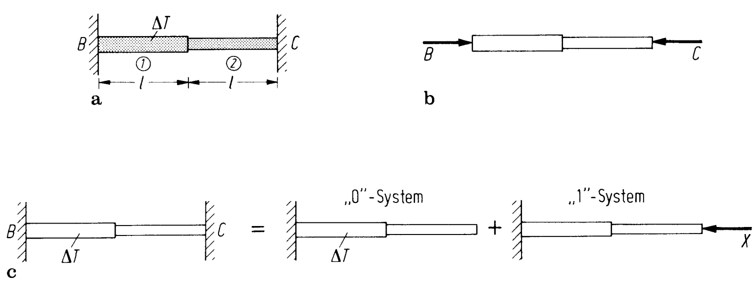


Abb. 1.10

mit (1.14) und der konstanten Normalkraft $N = -B = -C$:

$$\Delta\, l_1 = \frac{N\, l}{EA_1} + \alpha_T \Delta T\, l\,, \qquad \Delta\, l_2 = \frac{N\, l}{EA_2}$$

(der Stab wird im Bereich ② nicht erwärmt).

Der Stab ist zwischen *starren* Wänden eingespannt. Daher muß seine Gesamtverlängerung $\Delta\, l$ Null sein. Dies liefert die *geometrische Bedingung*

$$\Delta\, l = \Delta\, l_1 + \Delta\, l_2 = 0\,.$$

Eine solche Bedingung wird auch *Verträglichkeitsbedingung (Kompatibilitätsbedingung)* genannt. Einsetzen ergibt

$$\frac{N\, l}{EA_1} + \alpha_T \Delta T\, l + \frac{N\, l}{EA_2} = 0 \to B = C = -N = \frac{EA_1\, A_2\, \alpha_T \Delta T}{A_1 + A_2}\,.$$

Wir können die Aufgabe auch auf folgende Weise lösen. In einem ersten Schritt erzeugen wir aus dem gegebenen, statisch unbestimmten System ein statisch bestimmtes System. Dies geschieht dadurch, daß wir eines der Lager, z.B. das Lager C, entfernen. Die Wirkung des Lagers auf den Stab ersetzen wir durch die noch unbekannte Lagerkraft $C = X$. Die Größe X wird *statisch Unbestimmte* genannt.

Nun werden zwei verschiedene Belastungsfälle betrachtet. Der Stab unter der gegebenen Belastung (Temperaturerhöhung im Bereich ①) heißt „0"-System (Abb. 1.10c). Durch die Temperaturänderung verlängert sich im „0"-System der Stab im Bereich ① um $\Delta l_1^{(0)}$ (reine Wärmedehnung, Normalkraft $N = 0$), während er im Bereich ② seine Länge beibehält. Die Verschiebung $u_C^{(0)}$ des rechten Endpunktes des Stabes ist daher durch

$$u_C^{(0)} = \Delta l_1^{(0)} = \alpha_T \Delta T\, l$$

gegeben.

Im zweiten Lastfall wirkt auf den Stab nur die statisch Unbestimmte X. Dieses System nennt man „1"-System. Für die Verschiebung des rechten Endpunktes im „1"-System gilt

$$u_C^{(1)} = \Delta l_1^{(1)} + \Delta l_2^{(1)} = -\frac{X\, l}{EA_1} - \frac{X\, l}{EA_2}\,.$$

Im ursprünglichen System wirken sowohl die gegebene Belastung als auch die Kraft X. Wir müssen daher die beiden Lastfälle überlagern (Superposition). Die gesamte Verschiebung an der Stelle C folgt damit zu

$$u_C = u_C^{(0)} + u_C^{(1)} \,.$$

Da aber die starre Wand im wirklichen System bei C keine Verschiebung erlaubt, muß die geometrische Bedingung

$$u_C = 0$$

erfüllt sein. Aus ihr folgt durch Einsetzen die statisch Unbestimmte:

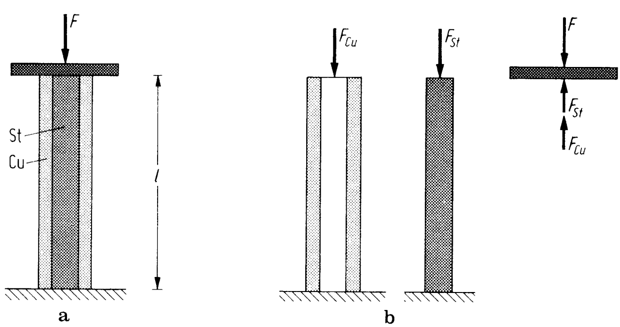
$$\alpha_T \Delta T \, l - \frac{X\,l}{EA_1} - \frac{X\,l}{EA_2} = 0 \quad \to \quad X = C = \frac{EA_1\,A_2\,\alpha_T \Delta T}{A_1 + A_2} \,.$$

Gleichgewicht (vgl. Abb. 1.10b) liefert schließlich die zweite Lagerreaktion $B = C$.

Beispiel 1.3: In einem Hohlzylinder aus Kupfer (Querschnittsfläche A_{Cu}, Elastizitätsmodul E_{Cu}) befindet sich ein Vollzylinder gleicher Länge aus Stahl (Querschnittsfläche A_{St}, Elastizitätsmodul E_{St}). Beide Zylinder werden durch die Kraft F über eine starre Platte gestaucht (Abb. 1.11a).

Wie groß sind die Spannungen in den Zylindern? Wie groß ist die Zusammendrückung?

Abb. 1.11



Lösung: Wir bezeichnen die Druckkräfte auf den Kupfer- bzw. auf den Stahlzylinder mit F_{Cu} bzw. F_{St} (Abb. 1.11b). Dann liefert das Kräftegleichgewicht an der Platte

$$F_{\mathrm{Cu}} + F_{\mathrm{St}} = F\,. \tag{a}$$

Hieraus können die beiden unbekannten Kräfte nicht ermittelt werden: das System ist statisch unbestimmt. Eine zweite Gleichung erhalten wir, wenn wir die Verformung des Systems berücksichtigen. Die Verkürzungen der Zylinder sind nach (1.17) durch

$$\Delta l_{\mathrm{Cu}} = \frac{F_{\mathrm{Cu}}\, l}{EA_{\mathrm{Cu}}}\,, \qquad \Delta l_{\mathrm{St}} = \frac{F_{\mathrm{St}}\, l}{EA_{\mathrm{St}}} \tag{b}$$

gegeben. Dabei ist für $E_{\mathrm{Cu}}A_{\mathrm{Cu}}$ kurz EA_{Cu} (= Dehnsteifigkeit des Kupferzylinders) gesetzt worden. Analog ist EA_{St} die Dehnsteifigkeit des Stahlzylinders. Da die Platte starr ist, lautet die geometrische Bedingung

$$\Delta l_{\mathrm{Cu}} = \Delta l_{\mathrm{St}}\,. \tag{c}$$

Auflösen von (a) bis (c) ergibt

$$F_{\mathrm{Cu}} = \frac{EA_{\mathrm{Cu}}}{EA_{\mathrm{Cu}} + EA_{\mathrm{St}}}\, F\,, \qquad F_{\mathrm{St}} = \frac{EA_{\mathrm{St}}}{EA_{\mathrm{Cu}} + EA_{\mathrm{St}}}\, F\,. \tag{d}$$

Daraus folgen nach (1.2) die Druckspannungen in den Zylindern:

$$\underline{\underline{\sigma_{\mathrm{Cu}} = \frac{E_{\mathrm{Cu}}}{EA_{\mathrm{Cu}} + EA_{\mathrm{St}}}\, F}}\,, \qquad \underline{\underline{\sigma_{\mathrm{St}} = \frac{E_{\mathrm{St}}}{EA_{\mathrm{Cu}} + EA_{\mathrm{St}}}\, F}}\,.$$

Durch Einsetzen von (d) in (b) erhalten wir schließlich die Zusammendrückung

$$\underline{\underline{\Delta l_{\mathrm{Cu}} = \Delta l_{St} = \frac{F\, l}{EA_{\mathrm{Cu}} + EA_{\mathrm{St}}}}}\,.$$

Beispiel 1.4: Über einen Stahlbolzen ①, der ein Gewinde mit der Ganghöhe h trägt, wird eine Kupferhülse ② der Länge l geschoben und durch eine Schraubenmutter ohne Vorspannung fixiert (Abb. 1.12a). Anschließend wird die Mutter um n Umdrehungen angezogen, und das System wird um ΔT erwärmt. Gegeben sind die Dehnsteifigkeiten und die Wärmeausdehnungskoeffizienten für den Bolzen und für die Hülse.

Wie groß ist die Kraft im Bolzen?