Vorwort zur zweiten Auflage

Ich freue mich, dass die zweite Auflage schon ein Jahr nach dem Erscheinen der erste Auflage möglich wurde. Dies gab mir die Gelegenheit, einige Fehler zu korrigieren und den Text in Teilen umzuformulieren. Dabei habe ich Anregungen gerne aufgegriffen und hoffe, dass Studierende und mathematisch Interessierte nun noch besser endliche Körper verstehen und anwenden können.

Von Kollegen erfuhr ich, dass sie dieses Buch auch als Leitfaden für eine elementare Einführung in die Algebra verwenden. Die Grundbegriffe der Algebra dienen hier nämlich einem klaren und greifbaren Ziel: Die Bestimmung der endlichen Körper.

Ich würde mich sehr freuen, wenn Mathematiker wie „Anwender“ gleichermaßen mit dem vorliegenden Buch ihre Freude an diesem aktuellen mathematischen Thema entdecken würden.

Erlangen, *Hans Kurzweil*
Juli 2008

Einleitung

Ein endlicher Körper $\mathbb{F}$ ist ein Zahlbereich mit nur endlich vielen Zahlen, in dem die vier Grundrechnungsarten ausgeführt werden können, man kann addieren, substrahieren, multiplizieren und dividieren. Dabei ist die Anzahl $|\mathbb{F}|$ der Elemente immer eine Primzahlpotenz p^n. Man nennt $\mathbb{F}$ auch *Galoisfeld*, und schreibt

$$\mathbb{F} = \mathrm{GF}\,(p^n)$$

nach Evariste Galois (1811–1832), der zum ersten Mal solche Zahlbereiche angegeben hat.[1]

Bekanntlich hat eine komplexe Zahl ($\in \mathbb{C}$) die Form

$$a_0 + a_1\,\mathfrak{i} \quad \text{mit} \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}\,,\ 1 + \mathfrak{i}^2 = 0\,;$$

hier ist $\mathfrak{i}$ die imaginäre Enheit, $\mathfrak{i}^2 = -1$. Ausgehend von dieser Darstellung definiert Galois $\mathrm{GF}\,(p^n)$ als die Menge aller Ausdrücke der Form

$$a_0 + a_1\,\mathfrak{i} + a_2\,\mathfrak{i}^2 + \cdots + a_{n-1}\,\mathfrak{i}^{n-1}\,.$$

Hier sind die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ ganze Zahlen, die modulo einer Primzahl p gerechnet werden, und die „imaginäre“ Zahl $\mathfrak{i} \in \mathbb{F}$ genügt einer Gleichung

$$b_0 + b_1\,\mathfrak{i} + \cdots + b_{n-1}\,\mathfrak{i}^{n-1} + \mathfrak{i}^n = 0\,.$$

Dabei ist diese Relation *minimal*, d. h. sie gilt für keine kleinere natürliche Zahl m anstelle von n; Galois spricht von einer *irreduziblen Kongruenz*.

Diese exotischen Zahlen waren lange Zeit nur aus innermathematischen Gründen von Interesse, ganz im Gegensatz zu den komplexen Zahlen, die von Anfang an via Differential- und Integralrechnung in Anwendungen der Mathematik unentbehrlich waren. Die innermathematische Sicht bettet die Theorie der endlichen Körper als Spezialfall in die sogenannte *Erweiterungstheorie* von Körpern ein, so dass in Lehrbüchern der Algebra endliche Körper nur auf ganz wenigen Seiten abgehandelt werden, und zwar mit einer dem allgemeinen Fall angemessenen „Maschinerie“, welche aber den direkten Zugang für den Nicht-Fachmann erschwert.

Mit dem Aufkommen der digitalen Datenverarbeitung hat sich die Situation geändert. Der Computer ist ein *diskretes* Werkzeug, d. h. er kann endlich viele Zeichen in einer endlichen Zeit bearbeiten; er kann mit diesen Zeichen exakt

[1] E. Galois: Sur la théorie des nombres, Bulletin des sciences mathématiques de Férussac XIII, 1830, § 218

rechnen, wenn sie mit den Elementen eines Galoisfelds $\mathrm{GF}(p^n)$ identifiziert werden können. Zum Beispiel besteht $\mathrm{GF}(2)$ aus den bits $0, 1$ und $\mathrm{GF}(2^8)$ aus *Bytes* – acht bits definieren ein Byte.

Ich skizziere ein typisches Beispiel aus der Nachrichtenübertragung. Es liegt ein „Alphabet“ mit $2^8 = 256$ Zeichen (Buchstaben) vor, welche als Bytes interpretiert werden, die Zeichen sind also die Elemente von $\mathrm{GF}(2^8)$. Eine Information a sei ein Wort mit 231 Zeichen und diese Information wird durch Hinzufügen von 24 Zeichen (*Redundanz*) in ein Codewort x der Länge $255\ (= 2^8-1)$ *codiert*. In einem fehlerbehafteten Übertragungskanal verändere sich x infolge von technischen Störungen, der Empfänger erhält statt x ein gestörtes Wort $\tilde{x}$ mit ebenfalls 255 Buchstaben; dabei ist vorausgesetzt, dass sich $\tilde{x}$ in höchstens $12 = \frac{255-231}{2}$ Stellen von x unterscheidet. Der Empfänger *decodiert* nun $\tilde{x}$, berechnet also aus $\tilde{x}$ das Codewort x und dann die Information a. Dazu muss blitzschnell ein lineares Gleichungssystem über dem Körper $\mathrm{GF}(2^8)$ gelöst werden, bestehend aus 13 Gleichungen in 12 Unbekannten. Dies leistet ein Chip, welcher in jedem Handy, Computer oder CD-Player installiert ist. Im letzten Kapitel rechne ich dazu zwei Beispiele. Anstatt den großen Körper $\mathrm{GF}(2^8)$ nehme ich zunächst den Körper $\mathrm{GF}(7)$ und dann den Körper $\mathrm{GF}(2^3)$, denn in ihnen kann noch per Hand gerechnet werden. Eigentlich können diese Beispiele schon ab Kap. 1 bzw. Kap. 2 gelesen werden, wenn man den *erweiterten Euklidische Algorithmus* (Kap. 4) sowie die *diskrete Fouriertransformation* (Kap. 7) übernimmt.

Natürlich gibt es nun Monographien speziell über endliche Körper, z. B. [3], [4]. Diese gehen weit über den vorliegenden Text hinaus, und sind in ihrem mathematischen Niveau einem mathematisch nicht sehr geschulten Leser nicht ohne weiteres zugänglich.

Dieses Buch entstand aus einer einsemestrigen Vorlesung für den neu eingerichteten Studiengang *Informations- und Kommunikationstechnologie* in Erlangen. Es setzt eine gewisse Vertrautheit mit den Grundbegriffen der linearen Algebra voraus, wie sie z. B. in jeder Vorlesung *Ingenieurmathematik* erklärt werden. Natürlich sind endliche Körper abstrakte Gebilde, die exakte Definitionen und den Einsatz der mathematischen Sprache (Mengen, Abbildungen, ...) erfordern. Ich habe mich bemüht, den formalen Apparat nur als Mittel zum Zweck erscheinen zu lassen. Zum Beispiel habe ich den für den Ungeübten schwierigen Begriff der *Faktorbildung* vermieden, weil in dem hier betrachteten Kontext immer natürliche *Repräsentantensysteme* existieren.

In Kap. 1 erkläre ich den Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen, sowie den Ring $\mathbb{Z}$ *modulo* $n,\ n \in \mathbb{N}$, welchen ich mit $\mathbb{Z}_n$ bezeichne. Ist hier $n = p$ Primzahl, so ist $\mathbb{Z}_p$ ein Körper mit p Elementen, $\mathbb{Z}_p = \mathrm{GF}(p)$. In Kap. 2 definiere ich sorgfältig

den Polynomring $\mathbb{F}[X]$ über einem Körper $\mathbb{F}$, sowie den Ring $\mathbb{F}[X]$ *modulo* einem Polynom $N \in \mathbb{F}[X]$, den ich mit $\mathbb{F}_N$ bezeichne. Ist hier N Primelement, also irreduzibles Polynom in $\mathbb{F}[X]$, so ist $\mathbb{F}_N$ Körper. Im Fall $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_p$ erhält man so den endlichen Körper $\mathrm{GF}\,(p^n)$, $n = \operatorname{grad} N$. Damit sind in Kap. 2 bis auf Isomorphie schon alle endlichen Körper definiert, ihre Existenz, also die Existenz von N, und die Eindeutigkeit klären wir allerdings erst in Kap. 10. Am Ende von Kap. 2 diskutiere ich die Beispiele $\mathrm{GF}\,(2^2)$, $\mathrm{GF}\,(2^3)$, $\mathrm{GF}\,(2^4)$ und $GF(3^2)$, auf die ich immer wieder zurückkomme. Das den Körpern $\mathrm{GF}\,(p^n)$ zugrundliegende Rechenkalkül entwickle ich in Kap. 8. Dieses kann gleich nach Kap. 2 gelesen werden, wenn man mehr theoretische Sachverhalte aus den Kapiteln 3–6 übernimmt.

Die Teilbarkeitslehre im Polynomring $\mathbb{F}[X]$ ist völlig analog zu der im Ring $\mathbb{Z}$. Sie bedarf allerdings in dem abstrakten Gebilde $\mathbb{F}[X]$ einer genauen Begründung; diese wird in den Kapiteln 3–5 gegeben. In den Kapiteln 6, 7 klären wir die Struktur einer zyklischen Gruppe und beweisen den fundamentalen Satz, dass die multiplikative Gruppe eines endlichen Körpers eine zyklische Gruppe ist. Dieser Satz und die Rechnungen im letzten Kapitel sind der Anlass, am Schluss von Kap. 7 auch die *diskrete Fouriertransformation* vorzustellen. In Kap. 9 führe ich den Begriff des *Minimalpolynoms* ein und betrachte endliche Körper als *Erweiterungskörper* von $\mathbb{Z}_p$, bereite somit die theoretischen Sätze in Kap. 10 vor, also den Existenz- und Eindeutigkeitssatz. Mit den Ergebnissen aus Kap. 10 erhalten wir in Kap. 11 einen Überblick über sämtliche irreduziblen Polynome in $\mathbb{Z}_p[X]$, welche ja letztendlich die endlichen Körper definieren. So haben wir in Kap. 2 angefangen und so steht es auch bei Galois.

Im gesamten Text finden sich viele konkrete Beispiele und nach jedem Kapitel stelle ich ein paar Übungsaufgaben, die in der Regel das Vorhergehende anhand konkreter Rechnungen üben.

Ich betone, dass der Text auch eine elementare Einführung in die Algebra bietet. Anders als in manchen „College-Einführungen“ dienen hier die Grundbegriffe der Algebra – *Gruppen, Vektorräume, Ringe, Körper, Polynome* – einem klaren Ziel, nämlich endliche Körper zu erklären.

Für die Fertigstellung des Manuskripts bedanke ich mich bei Frau Irmgard Moch und Herrn dott. Raffaello Caserta.

Die Zahl der Ungenauigkeiten und Fehler, die mein Freund und Kollege Hans Günter Weidner durch geduldiges und genaues Lesen aufspürte, war eindrucksvoll!

1 Der Ring der ganzen Zahlen

Letztendlich wird die Addition und Multiplikation in endlichen Körpern auf die Addition und Multiplikation von ganzen Zahlen zurückgeführt. Deswegen müssen wir die an sich selbstverständlichen Rechenoperationen in $\mathbb{Z}$ genauer analysieren.

In der Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ der natürlichen Zahlen ist eine Gleichung

$$a + x = b$$

nur dann lösbar, wenn $a < b$. In der Menge

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$$

der ganzen Zahlen ist sie jedoch immer lösbar, $x = b - a$. Dies ist eine der grundlegenden Eigenschaften der Addition in $\mathbb{Z}$; ingesamt wird die Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}$ durch fünf Gesetze geregelt:

R1 Addition und Multiplikation sind *assoziativ:*

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{und} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

R2 Addition und Multiplikation sind *kommutativ:*

$$a + b = b + a \quad \text{und} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

R3 Es existiert ein neutrales *Element* bez. der Addition ($= 0$, *Nullelement*) und ein neutrales Element bez. der Multiplikation ($= 1$, *Einselement*):

$$0 + a = a \quad \text{und} \quad 1 \cdot a = a$$

Es ist $0 \neq 1$.

R4 Die Gleichung $a + x = b$ besitzt eine eindeutige Lösung x in $\mathbb{Z}$.

R5 Es gilt das *Distributivgesetz*:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Wir definieren: Eine Menge $R = \{a, b, c, \ldots\}$ heißt **Ring**, wenn je zwei Elementen $a, b \in R$ eine *Summe* $a + b \in R$ und ein *Produkt* $a \cdot b \in R$ zugeordnet ist, so dass die Gesetze R1 bis R5 gelten; in R4 ist $\mathbb{Z}$ durch R zu ersetzen. Eigentlich spricht man von einem *kommutativen Ring*, denn in R2 fordern wir, dass die Multiplikation kommutativ ist, wir betrachten hier nur solche Ringe.

Aus R1 bis R5 ergeben sich weitere Regeln, die im Ring $\mathbb{Z}$ an sich selbstverständlich sind. Da wir gleich noch andere Ringe betrachten, formulieren wir allgemein.

Sei R Ring. Bezüglich der Addition ist R eine *abelsche Gruppe*, man nennt sie die *additive Gruppe* $= R(+)$ von R. Dies bedeutet, dass die Addition assoziativ und kommutativ ist (R1 und R2), ein neutrales Element $0 \in R$ existiert (R3) und die Gleichung $a + x = b$ in R eindeutig lösbar ist (R4). In Kapitel 6 behandeln wir Gruppen in einem allgemeineren Rahmen.

Insbesondere besitzt die Gleichung $a + x = 0$ genau eine Lösung, sie wird mit $-a$ bezeichnet. Also ist

$$a + (-a) = 0 \quad \text{und} \quad -(-a) = a \ .$$

Zur Abkürzung setzt man

$$a - b := a + (-b) \ .$$

Es ist

$$a + (b - a) = (a - a) + b = 0 + b = b \ ,$$

also ist $x = b - a$ die Lösung von $a + x = b$.

Anders verhält sich die Multiplikation. Eine Gleichung $a \cdot x = b$ muss in R nicht lösbar sein, auch wenn $a \neq 0$.

Existiert zu $a \neq 0$ ein $b \neq 0$ mit $a \cdot b = 0$, so heißt a *Nullteiler* von R.

Mit R^* bezeichnen wir die Menge aller von 0 verschiedenen Elemente von R. Besitzt R keinen Nullteiler, gilt also

$$a, b \in R^* \ \Rightarrow \ a \cdot b \in R^* \ ,$$

so heißt R *nullteilerfrei*; offensichtlich ist der Ring $\mathbb{Z}$ nullteilerfrei.

Multipliziert man $a \in R$ mit sich selber, so erhält man die *Potenzen* a^i, $i \in \mathbb{N}_0$. Man setzt $a^0 := 1$, $a^1 := a$, $a^2 := a \cdot a$ und

$$a^3 := a \cdot a^2 = a \cdot (a \cdot a) \stackrel{!}{=} (a \cdot a) \cdot a = a^2 \cdot a \ ,$$

man beachte das Assoziativgesetz! Deshalb lässt man die Klammern weg und schreibt $a^3 = a \cdot a \cdot a$. Genauso behandelt man die höheren Potenzen:

$$a^i := a \cdot a^{i-1} = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{i} \ .$$

Daraus ergeben sich die *Potenzgesetze* :

$$a^{i+j} = a^i \cdot a^j \quad \text{und} \quad (a^i)^j = a^{i \cdot j} \ , \quad i, j \geq 0 \ .$$

Eine Diskussion der Potenzgesetze, insbesondere deren additive Variante findet sich in Kap. 6.

Das Distributivgesetz R5 verklammert die Addition und Multiplikation. Aus ihm folgen die zwei Regeln

$$0 \cdot a = 0 \quad \text{und} \quad (-a) \cdot b = -(a \cdot b) \ .$$

Zum Beweis von $0 \cdot a = 0$ lösen wir die Geichung $0 \cdot a + x = 0 \cdot a$. Nach R3 hat sie die Lösung $x = 0$; andererseits ist auch $0 \cdot a$ Lösung, denn

$$0 \cdot a + 0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a \ ,$$

mit R4 folgt $0 = 0 \cdot a$. Zum Beweis der zweiten Regel schreiben wir

$$0 = 0 \cdot b = (a + (-a)) \cdot b = a \cdot b + (-a) \cdot b \ ,$$

wegen $0 = a \cdot b - (a \cdot b)$ folgt die Behauptung wieder mit R4.

Zum Beispiel ergibt sich nun

$$(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-ab) = ab \ .$$

Aus dem Distributivgesetz folgt die *Kürzregel* , die wir gesondert formulieren:

In einem nullteilerfreien Ring kann gekürzt werden, d. h. es gilt: **1.1**

$$a \cdot b = a \cdot c \ , \quad a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad b = c \ .$$

Beweis $a \cdot b = a \cdot c$ impliziert

$$0 = a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c) \ .$$

Wegen $a \neq 0$ folgt $b - c = 0$, d. h. $b = c$. □

Wir fassen zusammen:

Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen bildet bezüglich der Addition und Multiplikation einen nullteilerfreien Ring. □ **1.2**

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Menge aller Vielfachen von n in $\mathbb{Z}$ bezeichnen wir mit $n\mathbb{Z}$, also ist

$$n\,\mathbb{Z} = \{n \cdot i \mid i \in \mathbb{Z}\}\ .$$

Es ist $n\mathbb{Z} = \{0\}$, wenn $n = 0$, und $n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, wenn $n = 1$. Zum Beispiel ist $2\mathbb{Z}$ die Menge aller geraden Zahlen.

Die Teilmenge

$$\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

von $\mathbb{Z}$ spielt im Folgenden eine wichtige Rolle; es ist $|\mathbb{Z}_n| = n$.

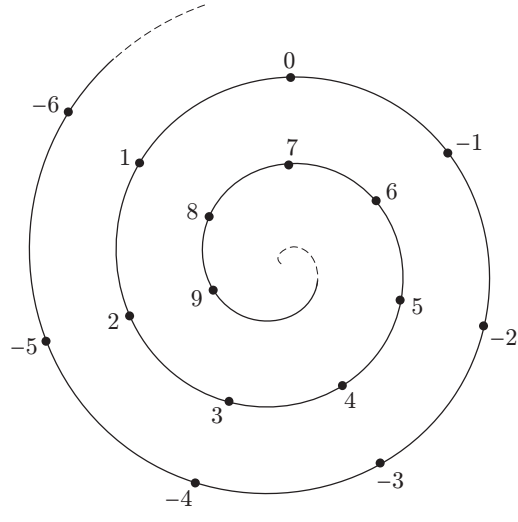
Eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$ der Form

$$r + n\mathbb{Z} := \{r + n \cdot f \mid f \in \mathbb{Z}\}\ , \quad r \in \mathbb{Z}_n\ ,$$

heißt *Restklasse modulo n*, sie besteht aus den Zahlen in $\mathbb{Z}$, die geteilt durch n den Rest r haben. Ein fundamentales Gesetz in $\mathbb{Z}$ besagt, dass jede Zahl $a \in \mathbb{Z}$ in genau einer dieser n Restklasse modulo n liegt.[1] Dies bedeutet:

1.3 **Division mit Rest:** Zu $a \in \mathbb{Z}$ existieren eindeutig bestimmte Zahlen $f \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{Z}_n$, so dass $a = n \cdot f + r$. □

Wir „malen“ die Restklassen modulo 7:



[1] Dies problematisieren wir hier nicht.

Seien a, n, r wie in 1.3. Wir nennen r den *Rest modulo* n und schreiben

$$r = \varrho_n(a) \ .$$

Zum Beispiel ist $\varrho_5(12) = 2$ und $\varrho_5(-12) = 3$, denn $12 = 2 \cdot 5 + 2$ und $-12 = (-3) \cdot 5 + 3$. Es ist $\varrho_5(4) = 4$, denn $4 = 0 \cdot 5 + 4$.

Wir fassen ϱ_n als (Rest-)Abbildung auf, ordnen also jedem $a \in \mathbb{Z}$ den Rest $r = \varrho_n(a) \in \mathbb{Z}_n$ zu. Man schreibt

$$\varrho_n : \mathbb{Z} \ \to \mathbb{Z}_n \quad \text{mit} \quad a \ \mapsto \ \varrho_n(a) \ .$$

1.4

a) $\varrho_n(a) = a \ \Leftrightarrow \ a \in \mathbb{Z}_n$

b) $\varrho_n(a) = 0 \ \Leftrightarrow \ a \in n\mathbb{Z}$

c) $\varrho_n(a) = \varrho_n(b) \ \Leftrightarrow \ a - b \in n\mathbb{Z}$

d) $\varrho_n(a + b) = \varrho_n\left(\varrho_n(a) + \varrho_n(b)\right)$

e) $\varrho_n(a \cdot b) = \varrho_n\left(\varrho_n(a) \cdot \varrho_n(b)\right)$

Beweis Die ersten drei Aussagen ergeben sich unmittelbar aus der Definition von ϱ_n. Für den Beweis von d), e) sei

$$\begin{aligned} a &= f \cdot n + r \ , \quad r = \varrho_n(a) \ , \\ b &= g \cdot n + s \ , \quad s = \varrho_n(b) \, . \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} a + b &= (f + g) \cdot n + (r + s) \ , \\ a \cdot b &= (f \cdot g \cdot n + f \cdot s + g \cdot r) \cdot n + r \cdot s \ , \end{aligned}$$

also $(a + b) - (r + s) \in n\mathbb{Z}$ und $a \cdot b - r \cdot s \in n\mathbb{Z}$. Mit c) folgt die Behauptung. □

Wir machen ein Beispiel zu d) und e), sei $n = 7$. Es ist

$$\begin{aligned} \varrho_7(11 + 13) &= \varrho_7(24) = 3 \\ \varrho_7(11 \cdot 13) &= \varrho_7(143) = 3 \end{aligned}$$

und nach d), e)

$$\begin{aligned} \varrho_7(11 + 13) &= \varrho_7(\varrho_7(11) + \varrho_7(13)) = \varrho_7(4 + 6) = \varrho_7(10) = 3 \\ \varrho_7(11 \cdot 13) &= \varrho_7(\varrho_7(11) \cdot \varrho_7(13)) = \varrho_7(4 \cdot 6) = \varrho_7(24) = 3 \ . \end{aligned}$$

Gilt $\varrho_n(a) = \varrho_n(b)$ für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$, so heißt a *kongruent* b *modulo* n, man schreibt gerne $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, n)$.

Sei $n \geq 2$. Die Menge $\mathbb{Z}_n$ machen wir zu einem Ring, indem wir auf ihr eine Addition $+_n$ und Multiplikation $\cdot_n$ *modulo* n erklären. Für $a, b \in \mathbb{Z}_n$ sei

$$\begin{aligned} a +_n b &:= \varrho_n(a + b) \\ a \cdot_n b &:= \varrho_n(a \cdot b)\ . \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass die Abbildung $\varrho_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ die Ringstruktur von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Z}_n$ überträgt, so dass $\mathbb{Z}_n$ bezüglich der Addition $+_n$ und der Multiplikation $\cdot_n$ ein Ring wird.

Dazu schreiben wir kürzer ϱ anstatt ϱ_n. Für $a, b \in \mathbb{Z}_n$ ist

$$\begin{aligned} a +_n b &= \varrho(a + b) = \varrho(b + a) = b +_n a \\ a +_n 0 &= \varrho(a + 0) = \varrho(a) = a \\ a \cdot_n b &= \varrho(a \cdot b) = \varrho(b \cdot a) = b \cdot_n a \\ a \cdot_n 1 &= \varrho(a \cdot 1) = \varrho(a) = a\ . \end{aligned}$$

Also gelten R2 und R3. Um R4 nachzuweisen, lösen wir die Gleichung $a +_n x = b$ in $\mathbb{Z}_n$. Im Fall $a \leq b$ ist $x = b - a \in \mathbb{Z}_n$ Lösung, denn

$$a +_n (b - a) = \varrho(a + b - a) = \varrho(b) = b\ ,$$

und im Fall $a > b$ ist $x = n + b - a \in \mathbb{Z}_n$ eine Lösung, denn

$$a +_n (n + b - a) = \varrho(a + n + b - a) = \varrho(b + n) = \varrho(b) = b\ .$$

Man überzeuge sich, dass in beiden Fällen x die einzige Lösung ist.

Es bleibt noch das Assoziativ- und Distributivgesetz nachzuweisen. Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}_n$, nach 1.4.a ist

$$a = \varrho(a)\ , \quad b = \varrho(b)\ , \quad c = \varrho(c)\ .$$

Mit 1.4.d folgt

$$a +_n (b +_n c) = \varrho(a) +_n \varrho(b + c) = \varrho(\varrho(a) + \varrho(b + c)) = \varrho(a + (b + c))$$

und genauso $(a +_n b) +_n c = \varrho((a + b) + c)$. Die Addition in $\mathbb{Z}_n$ ist also assoziativ, weil sie in $\mathbb{Z}$ assoziativ ist. Analog ergibt sich mit 1.4.e

$$a \cdot_n (b \cdot_n c) = \varrho(a) \cdot_n \varrho(b \cdot c) = \varrho(\varrho(a) \cdot \varrho(b \cdot c)) = \varrho(a \cdot (b \cdot c))$$

und genauso $(a \cdot_n b) \cdot_n c = \varrho((a \cdot b) \cdot c)$. Also ist auch die Multiplikation assoziativ, denn sie ist es in $\mathbb{Z}$. Ähnlich folgt das Distributivgesetz:

$$\begin{aligned} a \cdot_n (b +_n c) &= \varrho(a) \cdot_n \varrho(b + c) = \varrho(\varrho(a) \cdot \varrho(b + c)) = \varrho(a \cdot (b + c)) \\ &= \varrho(a \cdot b + a \cdot c) = \varrho(\varrho(a \cdot b) + \varrho(a \cdot c)) = \varrho(a \cdot_n b + a \cdot_n c) \\ &= (a \cdot_n b) +_n (a \cdot_n c) \,. \end{aligned}$$

Wir fassen zusammen:

Satz Sei $n > 1$. Bezüglich der Addition und Multiplikation modulo n ist $\mathbb{Z}_n$ ein Ring mit Nullelement $0 \in \mathbb{Z}_n$ und Einselement $1 \in \mathbb{Z}_n$. □ **1.5**

Nachdem $\mathbb{Z}_n$ Ring ist, können wir formulieren:

Die Restabbildung ϱ_n ist verträglich mit der Addition und Multiplikation in den Ringen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}_n$, d. h. es gilt[2] **1.6**

$$\begin{aligned} \varrho_n(a + b) &= \varrho_n(a) +_n \varrho_n(b) \\ \varrho_n(a \cdot b) &= \varrho_n(a) \cdot_n \varrho_n(b) \,. \end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$\varrho_n(-a) = -\varrho_n(a) \quad \text{und} \quad \varrho_n(a - b) = \varrho_n(a) -_n \varrho_n(b) \,.$$

Beweis Infolge der Definition der Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}_n$ sind die ersten Behauptungen klar. Wir begründen nur die zwei letzten. Es ist

$$0 = \varrho_n(0) = \varrho_n(a - a) = \varrho_n(a + (-a)) = \varrho_n(a) +_n \varrho_n(-a) \,,$$

d. h. im Ring $\mathbb{Z}_n$ gilt $\varrho_n(-a) = -\varrho_n(a)$. Es folgt

$$\begin{aligned} \varrho_n(a - b) &= \varrho_n(a + (-b)) = \varrho_n(a) +_n (-\varrho_n(b)) \\ &= \varrho_n(a) -_n \varrho_n(b) \,. \end{aligned}$$

□

[2] Man spricht von einem *Ring-Homomorphismus.*

Als Beispiele notieren wir die Additions- und Multiplikationstafeln der Ringe $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$ und $\mathbb{Z}_5$

$+_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot_2$	0	1
0	0	0
1	0	1

$+_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot_3$	1	2
1	1	2
2	2	1

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\cdot_4$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	0	2
3	3	2	1

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot_5$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Wir definieren: Sei $\mathbb{F}$ ein Ring. Dann heißt $\mathbb{F}$ **Körper**, wenn im Ring $\mathbb{F}$ neben R1 bis R5 noch folgende zwei Gesetze gelten:

K1 $a, b \in \mathbb{F}^* \;\Rightarrow\; a \cdot b \in \mathbb{F}^*$ (d. h. $\mathbb{F}$ ist nullteilerfrei)
K2 Die Gleichung $a \cdot x = b$ $(a, b \in \mathbb{F}^*)$ besitzt genau eine Lösung x in $\mathbb{F}^*$.

Insbesondere ist dann die Gleichung $a \cdot x = 1$ eindeutig lösbar, man schreibt

$$x = a^{-1} = \frac{1}{a} \,.$$

Daraus ergibt sich auch die Lösung von $a \cdot x = b$ zu $x = a^{-1} \cdot b$, denn

$$a \cdot (a^{-1} \cdot b) = (a \cdot a^{-1}) \cdot b = 1 \cdot b = b \,.$$

Man schreibt

$$a \cdot b^{-1} = \frac{a}{b} \, .$$

Da die Multiplikation im Ring $\mathbb{F}$ assoziativ ist und $\mathbb{F}$ ein Einselement besitzt, besagen die zwei Gesetze K1, K2, dass $\mathbb{F}^*$ bezüglich der Multiplikation eine abelsche Gruppe ist (siehe Kap. 6, Seite 79). Diese Gruppe heißt die **multiplikative Gruppe des Körpers** $\mathbb{F}$, sie wird mit $\mathbb{F}^*$ notiert.

Wir zeigen nun, dass der Ring $\mathbb{Z}_n$ genau dann ein Körper ist, wenn n eine Primzahl ist. Dabei nennt man eine Zahl $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, **Primzahl**, wenn sie *unzerlegbar* ist, also 1 und p die einzigen Teiler von p in $\mathbb{N}$ sind (in $\mathbb{Z}$ kommen die Teiler -1 und $-p$ hinzu).

Für $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, sei $\mathcal{P}(a)$ die Menge der Primzahlen, die a teilen; z. B. ist $\mathcal{P}(12) = \mathcal{P}(-12) = \{2, 3\}$. Die für uns wichtigste Eigenschaft von Primzahlen ist:

PRIM $\qquad \mathcal{P}(a \cdot b) = \mathcal{P}(a) \cup \mathcal{P}(b) \qquad$ (Vereinigungsmenge)

Diese an sich selbstverständliche Beziehung bedeutet, dass eine Primzahl, die $a \cdot b$ teilt, schon a oder b teilt. Dies ergibt sich aus der eindeutigen Primfaktorzerlegung der Zahlen a, b und $a \cdot b$. Wir erklären dies genauer in Kap. 3.

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Ist n keine Primzahl, so existieren a, b in $\mathbb{Z}_n$, $a \neq 0 \neq b$, mit $n = a \cdot b$, d. h.

$$a \cdot_n b = \varrho_n(n) = 0 \, ,$$

der Ring $\mathbb{Z}_n$ ist also nicht nullteilerfrei. Genauer gilt:

Der Ring $\mathbb{Z}_n$ ist genau dann nullteilerfrei, wenn n eine Primzahl ist. **1.7**

Beweis Sei n Primzahl. Wir nehmen an, dass $\mathbb{Z}_n$ nicht nullteilerfrei ist, dann existieren $a, b \neq 0$ in $\mathbb{Z}_n$ mit

$$a \cdot_n b = 0 \, , \quad \text{d. h.} \quad \varrho_n(a \cdot b) = 0 \, .$$

Also ist n Teiler von $a \cdot b$ und wegen PRIM auch Teiler von a oder b im Widerspruch zu $a, b < n$. Dies beweist 1.7. □

1.8 Satz Genau dann ist der Ring $\mathbb{Z}_n$ ein Körper, wenn n eine Primzahl ist.

Beweis Ist $\mathbb{F} := \mathbb{Z}_n$ Körper, gilt also K1, so ist n nach 1.7 eine Primzahl. Sei p Primzahl und

$$\mathbb{F} := \mathbb{Z}_p \ .$$

Wir behaupten, dass K1 und K2 in

$$\mathbb{F}^* = \{1, 2, \ldots, p-1\}$$

gelten. K1 ist 1.7. Für K2 ist zu zeigen, dass die Gleichung $a \cdot_p x = b$ für $a, b \in \mathbb{F}^*$ genau eine Lösung besitzt. Dazu bilden wir die Menge

$$M = \{a \cdot_p x \mid x \in \mathbb{F}^*\} \ .$$

Es ist $M \subseteq \mathbb{F}^*$. Seien $x, y \in \mathbb{F}^*$ mit $a \cdot_p x = a \cdot_p y$. Da $\mathbb{F}$ nullteilerfrei ist (1.7), können wir die Kürzregel 1.1 anwenden und erhalten $x = y$. Die Teilmenge M der endlichen Menge $\mathbb{F}^*$ enthält daher genau so viel Elemente wie $\mathbb{F}^*$; es folgt $M = \mathbb{F}^*$. Also existiert genau ein $x \in \mathbb{F}^*$ mit $a \cdot_p x = b$. □

Im Anschluss an diesen Beweis machen wir eine kleine Rechnung im Körper

$$\mathbb{F} := \mathbb{Z}_p \ .$$

Sei $a \in \mathbb{F}^*$. Dann ist (s. o)

$$\mathbb{F}^* = \{a \cdot_n x \mid x \in \mathbb{F}^*\} \ .$$

Das Produkt aller $(p-1)$ Elemente $1, 2, \ldots, p-1$ von $\mathbb{F}^*$, welches wir mit b bezeichnen, ist also bis auf Reihenfolge gleich dem Produkt der $(p-1)$ Elemente $a \cdot_p x$, $x \in \mathbb{F}^*$, das wir mit c bezeichnen. Stellt man im Produkt c die Faktoren a an den Anfang, so folgt $c = a^{p-1} \cdot_p b$, und damit

$$a^{p-1} \cdot_p b = b \ .$$

Kürzt man durch b, so erhält man im Körper $\mathbb{F}$ die Relation

$$a^{p-1} = 1 \ .$$

Wir schreiben diese etwas anders und erhalten den

Satz von Fermat Sei $a \neq 0$ eine Zahl in $\mathbb{Z}$, welche nicht durch die Primzahl p teilbar ist. Dann ist $\varrho_p\,(a^{p-1}) = 1$.[3] □ **1.9**

Ein Beispiel findet sich in einer Übungsaufgaben am Schluss des Kapitels.

Es sei bemerkt, dass dieser Satz die mathematische Grundlage für das RSA–Kryptographiesystem ist.

Ein endlicher Körper $\mathbb{F}$ heißt **Galoisfeld**, man schreibt $\mathbb{F} = \mathrm{GF}\,(q)$, wenn er q Elemente besitzt. Also ist $\mathbb{Z}_p = \mathrm{GF}\,(p)$. Wir werden in Kap. 10 sehen, dass q immer eine Primzahlpotenz p^n ist; bei fest gewähltem p ist also $\mathbb{Z}_p$ das kleinste Galoisfeld.

Ausblick 1 Das abstrakte Argument im Beweis von 1.8 erklärt nicht, wie das inverse Element a^{-1} aus a konkret berechnet werden kann. Folgendes Beispiel zeigt, dass dies für kleines n nicht allzu schwierig ist; wir nehmen $\mathbb{Z}_{13}$ und setzen $\varrho = \varrho_{13}$.
$a = 2$, $2 \cdot 7 = 14$, $\varrho(14) = 1 \Rightarrow a^{-1} = 7$
$a = 3$, $3 \cdot 5 = 15$, $\varrho(15) = 2$, $3 \cdot_{13} 5 \cdot_{13} 7 = 2 \cdot_{13} 7 = 1 \Rightarrow a^{-1} = 5 \cdot_{13} 7 = 9$
$a = 4$, $4 \cdot 4 = 16$, $\varrho(16) = 3$, $4 \cdot_{13} 4 \cdot_{13} 9 = 3 \cdot_{13} 9 = 1 \Rightarrow a^{-1} = 4 \cdot_{13} 9 = 10$
u. s. w.

Natürlich wird eine solche „Rekursion“ für größeres p immer länger. Schneller kommt der *erweiterte Euklidische Algorithmus* ans Ziel; diesen stellen wir in Kap. 4 vor.

Ausblick 2 In Kapitel 3 behandeln wir die Teilbarkeit im Ring $\mathbb{Z}$ genauer. Dies ermöglicht einen konstruktiven Beweis von 1.8, siehe Seite 50.

Ausblick 3 Sei p Primzahl. Durch Ausprobieren findet man im Körper $\mathbb{Z}_p$ ein Element z, so dass jedes $a \in \mathbb{Z}_p$, $a \neq 0$, eine Potenz von z ist. Ein solches Element z heißt *primitives Element* des Körpers $\mathbb{Z}_p$. In $\mathbb{Z}_5$ ist z. B. $z = 2$ primitiv, denn

$$z^1 = 2\,, \quad z^2 = 4\,, \quad z^3 = 3\,, \quad z^4 = 1\,,$$

aber 4 kein primitives Element, denn $4 \cdot_5 4 = 1$. In Kap. 6 werden wir zeigen, dass mit z auch jede Potenz z^i primitiv ist, sofern die Zahl i teilerfremd zu $p - 1$ ist (6.11 auf Seite 88).

[3] Üblicherweise schreibt man $a^{p-1} \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, p)$.

Mit Hilfe eines primitiven Elements z kann die Multiplikation in einem endlichen Körper sehr übersichtlich organisiert werden, siehe Kap. 8.

Ein relativ tiefliegender Satz besagt, dass in jedem endlichen Körper ein primitives Element existiert. Diesen Satz beweisen wir in Kap. 7, siehe 7.2 auf Seite 95.

Vorschlag Wir rechnen im letzten Kapitel 12 zwei Beispiele in einem Reed–Solomon Code, das erste im Körper $\mathrm{GF}(7) = \mathbb{Z}_7$ und das zweite im Körper $\mathrm{GF}(2^3)$. Wir empfehlen dem Leser, schon jetzt die ersten Seiten dieses Kapitels zu lesen, um sich von der Relevanz endlicher Körper in der Praxis der Nachrichtenübertragung zu überzeugen.

Übungen

1. Wieviele Nullteiler besitzt der Ring $\mathbb{Z}_8$ und wieviele der Ring $\mathbb{Z}_{13}$?
2. Berechne die Additions- und die Multiplikationstafel des Rings $\mathbb{Z}_7$.
3. Für welche Elemente a des Rings $\mathbb{Z}_6$ existiert ein $b \in \mathbb{Z}_6$ mit $a \cdot_6 b = 1$?
4. Gibt es einen Körper mit 31 Elementen?
5. Bestimme alle inversen Elemente $a^{-1}, a \neq 0$, im Körper $\mathbb{Z}_{13}$.
6. Bestimme ein primitives Element im Körper $\mathbb{Z}_7$ und im Körper $\mathbb{Z}_{11}$.
7. Löse über dem Körper $\mathbb{Z}_p$ folgende lineare Gleichungssysteme:
   $p = 2$ und

$$\begin{aligned} x_1 +_2 x_2 +_2 x_3 &= 1 \\ x_1 +_2 x_2 &= 0 \\ x_2 +_2 x_3 &= 1\,, \end{aligned}$$

   $p = 3$ und

$$\begin{aligned} 2 \cdot_3 x_1 +_3 x_2 +_3 2 \cdot_3 x_3 &= 2 \\ x_1 +_3 x_2 +_3 2 \cdot_3 x_3 &= 0 \\ x_1 +_3 2 \cdot_3 x_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

8. Bestimme die Zahl $\varrho_{43}(20576^{42})$.