

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
0. Strukturen	9
0.1 Skalarprodukt — 0.3 Orthogonalität — 0.4 Norm — 0.6 Metrik — 0.8 Abstand zweier Mengen und Kugeln — 0.9 Offene und abgeschlossene Mengen — 0.10 Topologie — 0.11 Vergleich von Topologien — 0.14 Konvergenz und Stetigkeit — 0.15 Konvergenz in metrischen Räumen — 0.16 Vollständigkeit — 0.17 Banachräume und Hilberträume — 0.18 Folgenräume — 0.19 Vervollständigung	
Übungen 0	28
Ü 0.9 Hausdorff-Abstand	
1. Funktionenräume	35
1.1 Beschränkte Funktionen — 1.2 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen — 1.3 Stetige Funktionen — 1.4 Träger einer Funktion — 1.5 Differenzierbare Funktionen — 1.6 Hölderstetige Funktionen — 1.7 Maße — 1.9 Meßbare Funk- tionen — 1.11 Raum meßbarer Funktionen — 1.12 Lebesgue- Räume — 1.14 Hölder-Ungleichung — 1.16 Minkowski-Un- gleichung — 1.17 Satz von Fischer-Riesz — 1.19 Vitali- Konvergenzsatz — 1.21 Allgemeiner Lebesgue-Konvergenzsatz — 1.23 Sobolev-Räume — 1.25 $\dot{H}^{m,p}(\Omega)$ -Räume	
Übungen 1	58
A 1. Lebesgue-Integral	63
A 1.2 Elementares Lebesgue-Maß — A 1.3 Äußeres Maß — A 1.8 Lebesgue-Integral — A 1.14 Maßerweiterung — A 1.17 Satz von Egorov — A 1.19 Lemma von Fatou — A 1.20 Konvergenzsatz von Lebesgue	

2. Teilmengen von Funktionenräumen 83

2.1 Konvexe Mengen — 2.2 Projektionssatz — 2.4 Fast orthogonales Element — 2.5 Kompaktheit — 2.9 Satz von Heine-Borel — 2.11 Satz von Arzela-Ascoli — 2.12 Faltung — 2.13 Dirac-Folge — 2.15 Satz von Riesz — 2.19 Partition der Eins — 2.22 Lokale Approximation von $H^{m,p}$ -Funktionen — 2.24 Produktregel für Sobolev-Funktionen — 2.25 Kettenregel für Sobolev-Funktionen

Übungen 2 111

Ü 2.4 Strikt konvexe Räume — Ü 2.5 Trennungssatz im \mathbb{R}^n — Ü 2.6 Konvexe Funktionen — Ü 2.7 Charakterisierung konvexer Funktionen — 2.8 Stützebenen — Ü 2.9 Jensen'sche Ungleichung — 2.11 L^p mit $p < 1$ — Ü 2.12 Kreuzprodukt normierter Vektorräume — Ü 2.13 Kompakte Mengen in ℓ^2 — Ü 2.14 Beschränkte und kompakte Mengen in $L^1(]0, 1[)$ — Ü 2.15 Vergleich der Hölderräume — Ü 2.16 Kompaktheit bzgl. Hausdorff-Metrik — Ü 2.17 Gleichmäßige Stetigkeit — Ü 2.18 Stetige Fortsetzung — Ü 2.19 Satz von Dini — Ü 2.20 Nichtapproximierbarkeit in $C^{0,\infty}$

3. Lineare Operatoren 125

3.2 Lineare Operatoren — 3.7 Neumann-Reihe — 3.9 Analytische Funktionen von Operatoren — 3.12 Lineare Differentialoperatoren — 3.13 Hilbert-Schmidt-Integraloperatoren — 3.14 Distributionen — 3.16 Topologie auf $C_0^\infty(\Omega)$ — 3.17 Der Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ — 3.19 Der Raum $\mathcal{D}'(\Omega)$

Übungen 3 141

Ü 3.3 Eindeutige Fortsetzung linearer Abbildungen — Ü 3.4 Limes linearer Abbildungen

4. Lineare Funktionale 145

4.1 Riesz'scher Darstellungssatz — 4.2 Satz von Lax-Milgram — 4.4 Elliptische Randwertprobleme — 4.5 Schwache Randwertprobleme — 4.6 Existenzsatz — 4.7 Poincaré-Ungleichung — 4.8 Existenzsatz — 4.11 Satz von Radon-Nikodym — 4.12 Dualraum von L^p für $p < \infty$ — 4.14 Satz von Hahn-Banach — Lemma von Zorn — 4.15 Satz von Hahn-Banach — 4.19 Räume additiver Maße — 4.20 Räume regulärer Maße — 4.21 Riemann-Integral — 4.22 Satz von Riesz-Radon — 4.24 Funktionen beschränkter Variation

Übungen 4.....175

 Ü 4.1 Duale Norm auf \mathbb{R}^n — Ü 4.2 Dualraum des Kreuzprodukts — Ü 4.3 Positiver Integraloperator — Ü 4.4 Beispiele für Elemente aus $C^0([0, 1])'$ — Ü 4.5 Dualraum von $C^m(I)$ — Ü 4.6 Dualraum von c_0 und c — Ü 4.8 Positive Funktionale auf C_0^0 — Ü 4.9 Funktionen mit beschränkter Variation — Ü 4.10 Darstellung von $C^0([a, b])'$

A 4. Aussagen aus der Maßtheorie.....187

 A 4.1 Jordan-Zerlegung — A 4.2 Hahn-Zerlegung — A 4.5 Lemma von Alexandrov — A 4.7 Satz von Lusin — A 4.8 Produktmaß — A 4.10 Satz von Fubini

5. Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.....201

 5.1 Baire'scher Kategoriensatz — 5.2 Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit — 5.3 Satz von Banach-Steinhaus — 5.7 Satz von der offenen Abbildung — 5.8 Satz von der inversen Abbildung — 5.9 Satz vom abgeschlossenen Graphen

Übungen 5.....206

 Ü 5.1 Zur adjungierten Abbildung — Ü 5.2 Punktweise Konvergenz in $L(X; Y)$ — Ü 5.4 Sesquilinearformen

6. Schwache Konvergenz 209

 6.1 Definition (Schwache Konvergenz). — 6.2 Einbettung in den Bidualraum. — 6.7 Schwache Topologie. — 6.8 Reflexivität — 6.11 Trennungssatz — 6.13 Lemma von Mazur — 6.15 Allgemeine Poincaré-Ungleichung — 6.16 Elliptisches Minimumproblem

Übungen 6.....231

 Ü 6.4 Schwache Konvergenz in C^0 — Ü 6.7 Schwache Konvergenz oszillierender Funktionen — Ü 6.8 Variationsungleichung

A 6. Eigenschaften von Sobolev-Funktionen 240

 A 6.1 Rellich-Einbettungssatz — A 6.2 Lipschitz-Rand — A 6.3 Lokalisierung — A 6.4 Rellich-Einbettungssatz — A 6.5 Randintegral — A 6.6 Schwache Randwerte — A 6.8 Schwacher Gauß'scher Satz — A 6.12 Fortsetzungssatz — A 6.13 Einbettungssatz auf den Rand — A 6.14 Schwache Folgenkompaktheit in $L^1(\mu)$ — A 6.15 Satz von Vitali-Hahn-Saks

7. Endlich-dimensionale Approximation 267

7.6 Bessel'sche Ungleichung — 7.7 Orthonormalbasis —
 7.10 Weierstraß'scher Approximationssatz — 7.13 Lineare
 Projektionen — 7.14 Stetige Projektionen — 7.15 Satz vom
 abgeschlossenen Komplement — 7.21 Stückweise konstante
 Approximation — 7.22 Stückweise lineare Approximation —
 7.23 Ritz-Galerkin-Approximation — 7.25 Céa-Lemma

Übungen 7 295

Ü 7.1 Hamelbasis — Ü 7.2 Unstetige lineare Abbildungen —
 Ü 7.4 Orthogonalsystem — Ü 7.8 Projektoren in $L^2(\cdot - \pi, \pi)$

8. Kompakte Operatoren 301

8.1 Kompakte Operatoren — 8.6 Einbettungssatz in Hölder-
 Räumen — 8.7 Sobolev-Zahl — 8.8 Satz von Sobolev — 8.9
 Einbettungssatz in Sobolev-Räumen — 8.11 Satz von Morrey
 — 8.13 Einbettungssatz von Sobolev-Räumen in Hölder-Räume
 — 8.14 Inverser Laplace-Operator — 8.15 Hilbert-Schmidt-
 Integraloperator — 8.16 Schur-Integraloperatoren — 8.17
 Fundamentallösung des Laplace-Operators — 8.18 Singuläre
 Integraloperatoren — 8.19 Hölder-Korn-Lichtenstein-Unglei-
 chung — 8.20 Calderon-Zygmund-Ungleichung

Übungen 8 334

Ü 8.1 Gegenbeispiel zum Einbettungssatz 8.6 — Ü 8.2 Ehrling-
 Lemma — Ü 8.7 Gegenbeispiel zum Sobolev-Satz — Ü 8.8
 Sobolev-Räume auf \mathbb{R}^n — Ü 8.9 Einbettungssatz — Ü 8.10
 Poincaré-Ungleichungen — Ü 8.12 Kompakter Operator in
 c_0 — Ü 8.13 Nukleare Operatoren — Ü 8.14 Kompakter
 Operator ohne Eigenwerte — Ü 8.15 Dimensionsabschätzung
 für Eigenräume — Ü 8.16 Norm von Hilbert-Schmidt-Opera-
 toren

A 8. Calderon-Zygmund-Ungleichung 343

9. Spektrum kompakter Operatoren 355

9.6 Fredholm-Operatoren — 9.8 Spektralsatz für kompakte
 Operatoren — 9.10 Fredholm-Alternative — 9.11 Endlich-
 dimensionaler Fall — 9.12 Jordan-Normalform — 9.13 Reeller
 Fall

10. Selbstadjungierte Operatoren	371
10.1 Adjungierter Operator — 10.2 Hilbertraum-Adjungierte — 10.4 Annihilator — 10.6 Satz von Schauder — 10.8 Satz von Fredholm — 10.9 Normale Operatoren — 10.12 Spektralsatz für kompakte normale Operatoren — 10.14 Eigenwertproblem als Variationsproblem — 10.15. Selbstadjungierter Integralope- rator — 10.16 Eigenwertproblem für den Laplace-Operator	
Übungen 10	390
Ü 10.1 Adjungierte Abbildung auf C^0	
A 10. L^2 Regularitätstheorie	395
A 10.2 Satz von Friedrichs	
Literaturverzeichnis	401
Symbolverzeichnis	403
Sachverzeichnis	407