

DIE MACHT DER SYMMETRIE

Warum Schönheit Wahrheit ist

Aus dem Englischen übersetzt von Thomas Filk

IAN STEWART

Spektrum
AKADEMISCHER VERLAG

Originaltitel

Why Beauty Is Truth – A History of Symmetry
Aus dem Englischen übersetzt von Thomas Filk

Englische Originalausgabe erschienen bei Basic Books
Copyright © 2007 by Joat Enterprises

Wichtiger Hinweis für den Benutzer

Der Verlag und der Autor haben alle Sorgfalt walten lassen, um vollständige und akkurate Informationen in diesem Buch zu publizieren. Der Verlag übernimmt weder Garantie noch die juristische Verantwortung oder irgendeine Haftung für die Nutzung dieser Informationen, für deren Wirtschaftlichkeit oder fehlerfreie Funktion für einen bestimmten Zweck. Der Verlag übernimmt keine Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren, Programme usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Buch berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Der Verlag hat sich bemüht, sämtliche Rechteinhaber von Abbildungen zu ermitteln. Sollte dem Verlag gegenüber dennoch der Nachweis der Rechtsinhaberschaft geführt werden, wird das branchenübliche Honorar gezahlt.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media
springer.de

© Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg 2008
Spektrum Akademischer Verlag ist ein Imprint von Springer

08 09 10 11 12 5 4 3 2 1

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Planung und Lektorat: Frank Wigger, Dr. Meike Barth
Copy-Editing: Annette Heß
Herstellung: Katrin Froberg
Umschlaggestaltung: wsp design Werbeagentur GmbH, Heidelberg
Satz: Crest Premedia Solutions [P] Ltd., Pune, Maharashtra, India
Druck und Bindung: Krips b.v., Meppel

Printed in The Netherlands

ISBN 978-3-8274-2019-0

INHALT

Vorwort	ix
1 Der Schreiber von Babylon	1
2 Der Inbegriff der Mathematik	17
3 Der Persische Dichter	33
4 Der spielsüchtige Gelehrte	45
5 Der schlaue Fuchs	63
6 Der enttäuschte Arzt und das kränkelnde Genie	75
7 Der glücklose Revolutionär	97
8 Der mittelmäßige Ingenieur und der transzendente Professor	125
9 Der trunksüchtige Randalierer	139
10 Der Mächtegern-Soldat und der schwächelnde Bücherwurm	163
11 Der Angestellte im Patentamt	177
12 Ein Quantenquintett	205
13 Der fünfdimensionale Mann	229
14 Der Politjournalist	253
15 Ein wilder Haufen von Mathematikern	269
16 Die Suche nach Wahrheit und Schönheit	285
Literaturempfehlungen	291
Index	293

DER ENTTÄUSCHTE ARZT UND DAS KRÄNKELENDE GENIE

Der erste wesentliche Fortschritt nach Cardanos *Die Große Kunst* folgte um die Mitte des 18. Jahrhunderts. Obwohl die Mathematiker der Renaissance kubische und quartische Gleichungen lösen konnten, handelte es sich bei ihren Methoden überwiegend um eine Folge von Tricks. Jeder einzelne Trick funktionierte, doch anscheinend mehr als Folge von Zufällen als aus einem systematischen Grund. Der tiefere Grund wurde schließlich um 1770 von zwei Mathematikern aufgedeckt: Joseph-Louis Lagrange, der sich immer als Franzose fühlte, obwohl er in Italien geboren war, und Alexandre-Théophile Vandermonde, der wirklich ein Franzose war.

Vandermonde wurde 1735 in Paris geboren. Sein Vater wollte aus ihm einen Musiker machen, und so wurde Vandermonde ein Meister der Geige und schlug zunächst eine musikalische Laufbahn ein. Doch im Jahre 1770 begann ihn die Mathematik zu interessieren. In seiner ersten mathematischen Veröffentlichung betrachtete er die symmetrischen Funktionen der Wurzeln eines Polynoms; dabei handelt es sich um algebraische Ausdrücke in den Wurzeln, die sich nicht ändern, wenn man die Wurzeln vertauscht. Ein einfaches Beispiel ist die Summe aller Wurzeln. Sein originellster Beitrag war ein Beweis, dass die Gleichung $x^n - 1 = 0$, die mit dem regulären n -Eck zusammenhängt, durch Radikale gelöst werden kann, sofern n gleich oder kleiner als 10 ist. (Tatsächlich lässt sich diese Gleichung für alle n durch Radikale lösen.) Der große französische Mathematiker Augustin-Louis Cauchy bezeichnete Vandermonde später als den Ersten, der die Bedeutung von symmetrischen Funktionen für das Problem der Lösung von Gleichungen durch Radikale erkannt hatte.

In den Händen von Lagrange wurde diese Idee zum Ausgangspunkt für einen Angriff auf alle algebraischen Gleichungen.

Lagrange war in Turin im Nordwesten Italiens geboren und auf den Namen Giuseppe Lodovico Lagrangia getauft worden. Seine Familie hatte enge Bindungen nach Frankreich – sein Urgroßvater war Kommandant in der französischen Kavallerie gewesen, bevor er nach Italien ausgewandert und in die Dienste des Fürsten von Savoyen getreten war. Schon in seiner frühen Jugend verwendete Giuseppe den Nachnamen Lagrange, allerdings immer noch in Verbindung mit Lodovico oder Luigi als Vornamen. Sein Vater war Schatzmeister im Büro für Öffentliche Arbeiten und Befestigungen in Turin, und seine Mutter Teresa Grosso war die Tochter eines Arztes. Lagrange war ihr erstes Kind. Es folgten zwar noch zehn weitere, allerdings überlebten nur zwei die Kindheit.

Obwohl die Familie zur gesellschaftlichen Oberschicht zählte, hatte sie nicht viel Geld, da der Vater in einige fehlgeschlagene Spekulationsgeschäfte investiert hatte. Nach dem Willen der Eltern sollte Lagrange Rechtswissenschaften studieren, und so besuchte er das Kolleg von Turin. Rechtskunde und klassische Sprachen machten ihm viel Spaß, dagegen empfand er die hauptsächlich der euklidischen Geometrie gewidmeten Mathematikstunden als langweilig. Dann stieß er auf ein Buch des englischen Astronomen Edmond Halley über algebraische Methoden in der Optik, und seine Meinung über die Mathematik änderte sich schlagartig. Lagrange schlug die Laufbahn ein, die seine frühen Forschungen bestimmen sollten: die Anwendungen der Mathematik auf die Mechanik, insbesondere die Himmelsmechanik.

Er heiratete seine Cousine Vittoria Conti. »Meine Frau, die eine meiner Cousinen ist und sogar für lange Zeit mit meiner Familie zusammen lebte, ist eine sehr gute Hausfrau und hat keinerlei Ansprüche«, schrieb er an seinen Freund Jean le Rond D'Alembert, ebenfalls Mathematiker. Ihm vertraute er auch an, dass er kinderlos bleiben wollte, was ihm auch gelang.

Lagrange nahm eine Stellung in Berlin an, er schrieb unzählige Forschungsartikel und gewann mehrfach den Jahrespreis der französischen Akademie. Im Jahre 1772 teilte er sich den Preis mit Euler, im Jahre 1774 gewann er den Preis für seine Arbeit über die Dynamik des Mondes, und im Jahre 1780 erhielt er den Preis für seine Arbeit über den Einfluss der Planeten auf die Bahnkurven der Kometen. Eine weitere Leidenschaft von ihm war die Zahlentheorie, und im Jahre 1770 bewies er einen Klassiker in diesem Feld: den Vier-Quadrate-Satz. Er besagt, dass sich jede positive ganze Zahl als Summe von vier Quadratzahlen schreiben lässt. Beispielsweise ist $7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$, $8 = 2^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2$ usw.

Er wurde Mitglied der französischen Akademie der Wissenschaften und zog nach Paris, wo er bis zu seinem Lebensende blieb. Er war der Meinung, man sollte die Gesetze des Gastlandes achten, auch wenn man sie nicht für richtig hält. Dieser Einstellung verdankte er vermutlich, dass ihm das Schicksal vieler anderer Intellektueller während der Französischen Revolution erspart blieb. Im

Jahre 1788 veröffentlichte Lagrange sein Meisterwerk, die *Analytische Mechanik*, wodurch die Mechanik zu einem Zweig der Analysis wurde. Er war stolz, dass sein umfangreiches Buch keine Zeichnungen enthielt. Seiner Überzeugung nach wurde die Logik dadurch strenger.

1792 heiratete er seine zweite Frau, Renée-Francoise-Adélaïde Le Monnier, die Tochter eines Astronomen. Während der Terrorherrschaft im August 1793 wurde die Akademie geschlossen, nur die Abteilung für Maße und Gewichte blieb weiterhin aktiv. Viele führende Wissenschaftler verloren ihre Stellungen – der Chemiker Antoine Lavoisier, der Physiker Charles Augustin Coulomb und Pierre Simon Laplace. Doch Lagrange wurde der neue Vorsitzende der Abteilung für Maße und Gewichte.

Nun wurde seine italienische Abstammung zu einem Problem. Die Revolutionsregierung verabschiedete ein Gesetz, wonach jeder aus Feindesland stammende Ausländer verhaftet werden musste. Lavoisier hatte zu diesem Zeitpunkt einen gewissen Einfluss und erreichte, dass Lagrange von diesem neuen Gesetz ausgenommen wurde. Kurz danach verurteilte ein Revolutionsgericht Lavoisier zu Tode, und am nächsten Tag musste er auf die Guillotine. Lagrange bemerkte dazu: »Es dauerte nur einen Augenblick, bis dieser Kopf fiel, doch 100 Jahre werden nicht ausreichen, um einen ähnlichen hervorzubringen.«

Unter Napoleon wurde Lagrange mehrfach ausgezeichnet: 1808 wurde er Mitglied der Ehrenlegion und zum Grafen des Kaiserreichs ernannt, und im Jahre 1813, eine Woche vor seinem Tod, erhielt er das Große Kreuz des Kaiserlichen Ordens der Réunion.



Im Jahre 1770, als er auch seinen Vier-Quadrate-Satz entdeckte, begann Lagrange mit einer umfangreichen Abhandlung über die Theorie der Gleichungen. »In dieser Arbeit mache ich darauf aufmerksam, wie dringlich es ist, die verschiedenen bisher gefundenen Methoden zur algebraischen Lösung von Gleichungen zu untersuchen und zu erklären, weshalb diese Methoden bei den Gleichungen vom dritten und vierten Grad funktionieren, und weshalb sie für die Gleichungen höherer Grade fehlschlagen.« In seinem Buch *Galois' Theory of Algebraic Equations* schreibt Jean-Pierre Tignol: »Lagranges ausdrückliches Ziel ist es, nicht nur herauszufinden, wie diese Methoden funktionieren, sondern insbesondere auch weshalb.«

Lagrange beschäftigte sich eingehend mit den Verfahren der Renaissance und gelangte zu einem weitaus tieferen Verständnis als die damaligen Erfinder selbst. Er bewies sogar, dass das allgemeine Schema, mit dem er den Erfolg dieser Verfahren erklären konnte, sich nicht auf Gleichungen fünften Grades oder höher anwenden lässt. Und dennoch gelang es ihm nicht herauszufin-

den, ob eine Lösung in diesen Fällen *möglich* war oder nicht. Stattdessen meint er, dass sich seine Ergebnisse »als nützlich erweisen werden für diejenigen, die sich mit den Lösungen der Gleichungen höheren Grades beschäftigen möchten, indem sie ihnen verschiedene Sichtweisen auf dieses Problem geben und insbesondere, indem sie ihnen eine Fülle nutzloser Schritte und Versuche ersparen helfen«.

Lagrange hatte erkannt, dass sich sämtliche Tricks von Cardano, Tartaglia und den anderen auf eine einzige Technik zurückführen lassen. Statt die Wurzeln der gegebenen Gleichungen direkt zu finden, bestand die Idee darin, das Problem auf die Lösung bestimmter Hilfsgleichungen zurückzuführen, deren Lösungen zwar mit den ursprünglichen Lösungen zusammenhängen, aber dennoch anders sind.

Die Hilfsgleichung für die kubische Gleichung ist einfacher, denn es handelt sich um eine quadratische Gleichung. Diese „quadratische Resolvente“ lässt sich mit dem babylonischen Verfahren lösen. Die Lösung der kubischen Gleichung setzt sich nun aus der dritten Wurzel dieser Lösungen zusammen. Das entspricht genau der Struktur von Cardanos Formel. Für eine Gleichung vierten Grades ist die Hilfsgleichung ebenfalls einfacher – es ist eine kubische Gleichung. Diese „kubische Resolvente“ wiederum lässt sich nach dem Verfahren von Cardano lösen. Anschließend erhält man die Lösung der quartischen Gleichung, indem man eine vierte Wurzel – eine wiederholte Quadratwurzel – aus dem Ergebnis aus der Hilfsgleichung nimmt. Das ist genau die Struktur der Formel von Ferrari.

Wir können uns die wachsende Aufregung von Lagrange vorstellen. Sollte diese Regel weiterhin gelten, dann hätte die Gleichung fünften Grades eine „quartische Resolvente“. Diese ließe sich mit Ferraris Methode lösen, und dann nehme man die fünfte Wurzel. Der Prozess würde sich fortsetzen, wobei die sextische Gleichung eine „quintische Resolvente“ besaß, die dann mit der möglicherweise nach ihm benannten „Lagrange’schen Methode“ gelöst werden konnte. Er wäre in der Lage, Gleichungen beliebigen Grades zu lösen.

Doch die Wirklichkeit brachte ihn unsanft auf den Boden der Tatsachen zurück. Die Resolvente für die quintische Gleichung war keine quartische Gleichung, sondern eine Gleichung *höheren* Grades, eine sextische. Dasselbe Verfahren, das die kubischen und quartischen Gleichungen vereinfacht, macht die quintische Gleichung *komplizierter*.

Der Fortschritt der Mathematik besteht nicht darin, schwierige Probleme durch noch schwierigere zu ersetzen. Das einheitliche Verfahren von Lagrange versagte bei der quintischen Gleichung. Trotzdem war damit noch

nicht bewiesen, dass die quintische Gleichung unlösbar ist. Vielleicht gab es ja andere Verfahren.

Weshalb nicht?

Für Lagrange war dies eine rein rhetorische Frage. Doch einer seiner Nachfolger nahm die Frage ernst und beantwortete sie.

✱

Sein Name war Paolo Ruffini, und wenn ich sagte, dass er die rhetorische Frage von Lagrange „beantwortete“, so ist das nicht ganz richtig. Er *dachte*, er hätte sie beantwortet, und seine Zeitgenossen fanden in seiner Antwort auch nie einen Fehler. Vermutlich haben sie seine Arbeit nicht ernst genug genommen, um nach einem Fehler zu suchen. Ruffini war zeitlebens überzeugt, er hätte bewiesen, dass die quintische Gleichung nicht durch Radikale lösbar sei. Erst nach seinem Tod fand man in seinem Beweis eine wesentliche Lücke. Zwischen den unzähligen Seiten, voll gepackt mit komplizierten Berechnungen, konnte diese Lücke leicht übersehen werden. Es handelte sich um eine „offensichtliche“ Annahme – eine implizite Annahme, von der er noch nicht einmal bemerkt hatte, dass sie in seinen Beweis einging.

Wie jeder professionelle Mathematiker aus eigener bitterer Erfahrung bestätigen kann, sind implizite Annahmen nur sehr schwer zu bemerken, eben weil sie nicht explizit ausgesprochen werden.

Ruffini wurde im Jahre 1765 als Sohn eines Arztes geboren. 1783 schrieb er sich an der Universität von Modena ein und studierte Medizin, Philosophie, Literatur und Mathematik. Die Geometrie lernte er bei Luigi Fantini und die Analysis bei Paolo Cassiani. Als Cassiani eine Stellung bei der Familie der Este zur Verwaltung ihrer riesigen Besitztümer annahm, setzte Ruffini, obwohl er noch ein Student war, den Analysiskurs von Cassiani fort. Im Jahre 1788 machte er seinen Abschluss in Philosophie, Medizin und Chirurgie, und im folgenden Jahr auch den in Mathematik. Kurz danach übernahm er die Professur von Fantini, dessen Augen erblindeten.

Seine akademische Arbeit wurde von den politischen Ereignissen überschattet. Im Jahre 1796 schlug Napoleon Bonaparte die Armeen von Österreich und Sardinien, wandte sich gegen Turin und eroberte Mailand. Kurz danach erfolgte die Einnahme von Modena, und Ruffini fand sich mitten im politischen Geschehen. Ursprünglich wollte er 1798 zur Universität zurückkehren, doch aus religiösen Gründen lehnte er den Treueschwur gegenüber der Republik ab. Daher wurde ihm eine Anstellung verweigert, und er hatte mehr Zeit für seine Forschungen. So konzentrierte er sich auf die lästige quintische Gleichung.

Ruffini war überzeugt, dass es einen guten Grund gab, weshalb noch niemand eine Lösung gefunden hatte: Seiner Meinung nach gab es keine Lösung. Insbesondere gab es keine Formel für die Lösung der allgemeinen quintischen Gleichung, die nur Radikale enthielt. In seinem zweibändigen Mammutwerk *Allgemeine Theorie der Gleichungen*, das im Jahre 1799 veröffentlicht wurde, behauptet er einen Beweis dafür gefunden zu haben. Er schreibt: »Die algebraische Lösung allgemeiner Gleichungen vom Grade fünf oder höher ist immer unmöglich. Dies gilt aufgrund eines sehr bedeutsamen Satzes, den ich glaube behaupten zu können (sofern ich nicht irre). Der Beweis dieses Satzes ist der Hauptgrund für die Veröffentlichung dieses Buches. Durch seine erhabenen Einsichten hat der unsterbliche Lagrange die Grundlage für diesen Beweis gelegt.«

Der Beweis umfasst mehr als 500 Seiten, gefüllt mit größtenteils fremdartiger Mathematik. Auf andere Mathematiker wirkte er eher abschreckend. Niemand arbeitet sich gerne durch einen sehr langen und technischen Beweis, wenn es nicht einen guten Grund dafür gibt. Hätte Ruffini eine *Lösung* der quintischen Gleichung angekündigt, wäre seinen Kollegen die Arbeit sicherlich wert gewesen. Doch die Aussicht, Hunderte von Stunden mit der Überprüfung eines negativen Ergebnisses beschäftigt zu sein, erklärt die große Zurückhaltung.

Das gilt besonders dann, wenn der Beweis falsch sein könnte. Es gibt kaum etwas Ärgerlicheres, als in einem 500-seitigen Mathematiktext auf Seite 499 einen Fehler zu finden.

Im Jahre 1801 sandte Ruffini eine Kopie des Buches an Lagrange, und nachdem er mehrere Monate lang nichts gehört hatte, schickte er eine zweite Kopie mit der Anmerkung: »Sollte ich mich bei irgendeinem Beweis geirrt haben, oder sollte ich etwas als neu bezeichnet haben, das in Wirklichkeit nicht neu ist, oder sollte ich ein nutzloses Buch geschrieben haben, so bitte ich Sie inständigst, mir dies ohne Umschweife mitzuteilen.« Immer noch keine Antwort. Er versuchte es im darauffolgenden Jahr nochmals, ebenfalls ohne Erfolg.

Es vergingen mehrere Jahre, ohne dass Ruffini die ihm seiner Meinung nach zustehende wissenschaftliche Anerkennung erhielt. Stattdessen kursierten vage Gerüchte über mögliche Fehler in seinem „Beweis“, doch da ihm niemand direkt sagte, worin diese Fehler lagen, konnte er sich auch nicht verteidigen. Schließlich erkannte er, dass sein Beweis zu kompliziert war, und er suchte nach einem einfacheren Weg. Im Jahre 1803 glaubte er einen gefunden zu haben und schrieb: »In der vorliegenden Arbeit versuche ich dieselbe Behauptung zu beweisen, allerdings, wie ich hoffe, mit leichter verständlichen Argumenten und in vollkommener Strenge.« Doch der neue Beweis war auch nicht besser. Die Welt war für seine Einsichten noch nicht bereit, ebenso wenig wie für die weiteren Beweise, die er in den Jahren 1808 und 1813 veröffentlichte. Unermüdlich kämpfte er für die Anerkennung seiner Arbeit in den mathematischen Kreisen. Als Jean Delam-

bre, der die Position des Planeten Uranus vorhergesagt hatte, einen Bericht über den Stand der Mathematik seit 1789 verfasste, fügte er einen Satz ein: »Ruffini behauptet beweisen zu können, dass eine Lösung der quintischen Gleichung unmöglich sei.« Ruffini antwortete prompt: »Ich behaupte das nicht nur, sondern ich habe es tatsächlich bewiesen.«

Der Ehrlichkeit halber sollte man erwähnen, dass einige Mathematiker den Beweis von Ruffini tatsächlich akzeptierten. Zu ihnen gehörte auch Cauchy, der ansonsten sehr zurückhaltend war, wenn es um die Anerkennung der Leistungen anderer ging. Im Jahre 1821 schrieb er an Ruffini: »Ich war immer der Meinung, dass Ihre Arbeit über das allgemeine Problem der Lösung von Gleichungen die Anerkennung der Mathematiker verdient hat, und sie beweist nach meiner Einschätzung die Unmöglichkeit der Lösung von algebraischen Gleichungen mit einem Grad größer als vier.« Doch das Lob kam viel zu spät.

Um 1800 begann Ruffini, an der städtischen Militärschule angewandte Mathematik zu unterrichten. Außerdem übte er seinen Beruf als Arzt aus und kümmerte sich um Patienten aus allen Gesellschaftsschichten. Nach dem Fall Napoleons im Jahre 1814 wurde er zum Rektor der Universität von Modena ernannt. Die politische Lage war immer noch sehr verworren, und trotz seiner außerordentlichen Fähigkeiten, dem großen Respekt, den man ihm entgegenbrachte, und seiner weithin bekannten Ehrlichkeit muss diese Zeit als Rektor sehr schwierig gewesen sein.

Neben seiner Eigenschaft als Rektor hatte Ruffini an der Universität von Modena noch Professuren in angewandter Mathematik, praktischer Medizin und klinischer Medizin. 1817 brach eine Typhusepidemie aus, und Ruffini behandelte seine Patienten weiterhin, bis er selbst von der Krankheit befallen wurde. Er überlebte, aber er wurde nie wieder richtig gesund, und im Jahre 1819 gab er seine Professur in klinischer Medizin auf. Doch seine Forschungstätigkeit führte er fort; im Jahre 1820 veröffentlichte er einen wissenschaftlichen Artikel über Typhus, der auf seinen Erfahrungen sowohl als Arzt als auch als Patient beruhte. Er starb 1822, kaum ein Jahr nachdem Cauchy ihn wegen seiner Arbeit über die quintische Gleichung gelobt hatte.

*

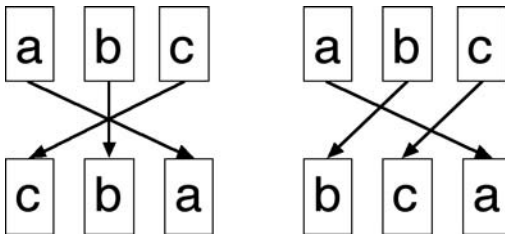
Ein Grund für die schlechte Akzeptanz von Ruffinis Arbeit dürfte in ihrer Neuartigkeit gelegen haben. Ebenso wie Lagrange begründete er seine Untersuchungen auf dem Konzept der „Permutationen“. Unter einer Permutation versteht man die Umordnung einer geordneten Reihe oder Liste von Objekten. Ein bekanntes Beispiel ist das Mischen eines Kartendecks. Üblicherweise möchte man in diesem Fall eine zufällige, d. h. unvorhersehbare Reihenfolge der Kar-

ten erreichen. Die Anzahl unterschiedlicher Permutationen eines Kartendecks ist sehr groß, daher ist die Wahrscheinlichkeit, das Ergebnis nach einem guten Mischen richtig vorherzusagen, vernachlässigbar klein.

In der Theorie von Gleichungen sind Permutationen von besonderer Bedeutung, weil die Wurzeln eines gegebenen Polynoms eine Liste bilden. Einige grundlegende Eigenschaften der Gleichungen hängen unmittelbar mit einer Durchmischung dieser Wurzeln zusammen. Intuitiv würde man vermuten, dass die Gleichung „nicht weiß“, in welcher Reihenfolge die Wurzeln angeordnet werden, eine Permutation dieser Wurzeln sollte daher keine wesentlichen Auswirkungen haben. Insbesondere sollten die Koeffizienten der Gleichung vollkommen symmetrische Ausdrücke in den Wurzeln sein, d. h. sie ändern sich nicht unter einer Permutation der Wurzeln.

Doch schon Lagrange hatte erkannt, dass manche Ausdrücke nur symmetrisch bezüglich einiger der Wurzelpermutationen sind, nicht aber bezüglich anderer. Solche „teilweise symmetrischen“ Ausdrücke hängen eng mit den Formeln zur Lösung einer Gleichung zusammen. Diese Eigenschaft der Permutationen war auch Ruffinis Kollegen bekannt. Weniger bekannt war jedoch eine andere Einsicht von Lagrange, die Ruffini systematisch ausnutzte: Zwei Permutationen lassen sich „multiplizieren“, indem man sie hintereinander ausführt, und man erhält dabei eine neue Permutation.

Ausgedrückt in moderner Sprechweise erscheint diese Einsicht weniger seltsam. Betrachten wir die drei Symbole a , b , c . Es gibt insgesamt sechs Permutationen: abc , acb , bac , bca , cab und cba . Betrachten wir eine beliebige Permutation, beispielsweise cba . Zunächst scheint es sich lediglich um eine geordnete Liste aus den drei Symbolen zu handeln. Doch wir können sie auch als eine *Vorschrift* ansehen, nach der die ursprüngliche Liste abc umgeordnet werden kann. Im vorliegenden Fall lautet die Vorschrift „drehe die Reihenfolge um“. Wir können diese Vorschrift nicht nur auf diese spezielle Liste anwenden, sondern auf jede beliebige Liste. Wenden wir sie auf bca an, so erhalten wir acb . In diesem Sinne können wir sagen: $cba \times bca = acb$.



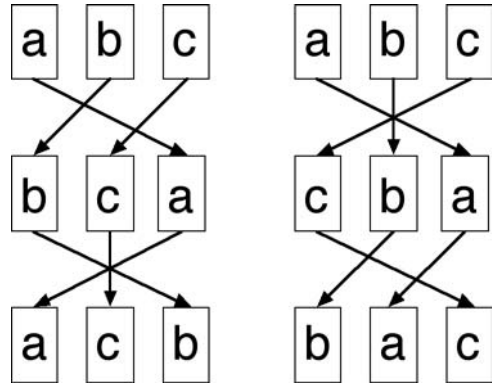
Zwei Permutationen der Symbole a , b , c .

Die Hintereinanderausführung von Vorschriften ist eines der Kernthemen unserer Geschichte. Zur Verdeutlichung zeichnen wir einige Diagramme. Die folgenden zwei Diagramme stellen die Permutationen dar, die aus der Folge abc die Folge cba bzw. bca machen:

Wir können diese beiden Umordnungen auch zu einer

zusammenfassen, indem wir die beiden Bilder übereinander legen. Es gibt zwei Möglichkeiten:

Nun können wir das Ergebnis der „Multiplikation“ zweier Permutationen ablesen, indem wir die unterste Reihe hinschreiben, die in diesem Fall (Bild auf der linken Seite) gleich acb ist. Mit dieser Definition von „Multiplikation“ (die nicht dasselbe ist, wie die bekannte Multiplikation von Zahlen) können wir der Behauptung $cba \times bca = acb$ einen Sinn geben. Allgemein zeichnet man die erste der beiden Permutationen in dem Diagramm nach unten. Das ist wichtig, denn man erhält eine andere Antwort, wenn wir die beiden Schichten in der Zeichnung vertauschen. Das Bild auf der rechten Seite zeigt das Ergebnis, wenn wir die beiden Permutationen in umgekehrter Reihenfolge multiplizieren. Es lautet: $bca \times cba = bac$.



Multiplikation von Permutationen. Das Ergebnis hängt von der Reihenfolge ab.

✱

Der Kern von Ruffinis Unmöglichkeitbeweis bestand in der Herleitung von Bedingungen an eine quintische Gleichung, damit sich ihre Wurzeln durch Radikale ausdrücken lassen. Wenn die allgemeine quintische Gleichung diese Bedingungen *nicht* erfüllt, dann hat sie keine solchen Wurzeln und kann demnach auch nicht durch irgendeine Verallgemeinerung der Verfahren, die bei der kubischen und quartischen Gleichung zum Erfolg geführt hatten, gelöst werden.

Ruffini hatte sich auf eine Seite aus dem Buch von Lagrange konzentriert und sich speziell mit den symmetrischen Funktionen der Wurzeln und ihren Beziehungen zu Permutationen beschäftigt. Die quintische Gleichung besitzt fünf Wurzeln, und es gibt insgesamt 120 Permutationen für fünf Symbole. Ruffini hatte erkannt, dass dieses System aus Permutationen bestimmte strukturelle Eigenschaften haben muss, um mit einer wie auch immer gearteten, hypothetischen Formel für die Lösungen der quintischen Gleichung verträglich zu sein. Wenn diese Eigenschaften nicht vorlagen, dann konnte es keine solche Formel geben. Man könnte das mit der Jagd nach einem Tiger in einem schlammigen Dschungel vergleichen. Wenn es wirklich einen Tiger gibt, dann muss er im schlammigen Boden auch klare Fußabdrücke hinterlassen. Ohne Fußabdrücke gibt es auch keinen Tiger.

Mithilfe der mathematischen Regeln zu dieser neuen Art der Multiplikation glaubte Ruffini beweisen zu können, dass die Struktur der 120 Permutationen nicht verträglich ist mit den symmetrischen Funktionen, die es geben müsste, wenn die Gleichung durch Radikale lösbar wäre. Schon der Ansatz war ungewöhnlich. Vor Ruffini waren nahezu alle Mathematiker der Welt davon überzeugt, dass auch die quintische Gleichung gelöst werden kann. Lediglich das „wie“ galt als unbekannt. Eine Ausnahme war Gauß, der andeutungsweise erwähnte, dass es möglicherweise keine Lösung gibt. Doch für ihn handelte es sich nicht um ein wirklich interessantes Problem – einer der wenigen Fälle, wo sein Instinkt sich geirrt hatte.

Nach Ruffini scheint sich allgemein der Eindruck breit gemacht zu haben, dass die quintische Gleichung nicht durch Radikale lösbar ist. Nur wenige waren überzeugt, dass Ruffini dies bewiesen hatte – doch durch seine Arbeit begannen viele Mathematiker daran zu zweifeln, dass Radikale wirklich die Lösung seien. Dieser Meinungsumschwung hatte eine unglückliche Nebenwirkung: Die meisten Mathematiker waren an der ganzen Sache nicht mehr wirklich interessiert.

Erst sehr viel später wurde deutlich, dass Ruffinis Beweis eine wichtige Lücke enthielt, die zu seiner Zeit niemand bemerkt hatte. Die Skepsis seiner Zeitgenossen war also in gewisser Hinsicht berechtigt. Der eigentliche Fortschritt bestand in dem Verfahren: Ruffini hatte die richtige Strategie gefunden; lediglich die Umsetzung seiner Idee war unvollkommen. Für diese Sache bedurfte es eines Strategen, der sich ganz und gar auf die Einzelheiten konzentrieren konnte. Und dieser Strategie sollte kommen.



Nachdem er viele Jahre lang in einem der ärmsten und entlegendsten Gebiete der Norwegischen Berge ohne Murren die Arbeit des Herrn als Pfarrer getan hatte, empfing Hans Mathias Abel im Jahre 1784 seinen gerechten Lohn. Er wurde in die Gemeinde von Gjerstad versetzt, nahe der Südküste von Norwegen, nicht weit vom Oslofjord. Gjerstad war nicht gerade reich, aber es war wesentlich reicher als die Orte, an denen er vorher gewesen war. Sein Einkommen würde sich deutlich verbessern.

In geistiger Hinsicht waren die Aufgaben von Pfarrer Abel dieselben wie bisher: Er musste sich um seine Herde kümmern und alles tun, damit sie glücklich war und tugendhaft blieb. Er selbst kam aus wohlhabender Familie. Sein dänischer Urgroßvater hatte mit der norwegischen Armee einen lukrativen Handel getrieben, und sein Vater war immerhin im Stadtrat der Stadt Bergen gewesen. Hans Abel war stolz, aber bescheiden, nicht besonders intelligent, aber auch nicht dumm, und er sagte, was er dachte, egal um welchen Preis.