Peter Winkler

Mathematische Rätsel für Liebhaber

Aus dem Amerikanischen übersetzt von

Harald Höfner und Brigitte Post

Spektrum
AKADEMISCHER VERLAG

Titel der Originalausgabe: Mathematical Puzzles: A Connoisseur's Collection
Aus dem Amerikanischen übersetzt von Harald Höfner und Brigitte Post

Wichtiger Hinweis für den Benutzer
Der Verlag, der Autor und die Übersetzer haben alle Sorgfalt walten lassen, um vollständige und akkurate Informationen in diesem Buch zu publizieren. Der Verlag übernimmt weder Garantie noch die juristische Verantwortung oder irgendeine Haftung für die Nutzung dieser Informationen, für deren Wirtschaftlichkeit oder fehlerfreie Funktion für einen bestimmten Zweck. Der Verlag übernimmt keine Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren, Programme usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Buch berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Der Verlag hat sich bemüht, sämtliche Rechteinhaber von Abbildungen zu ermitteln. Sollte dem Verlag gegenüber dennoch der Nachweis der Rechtsinhaberschaft geführt werden, wird das branchenübliche Honorar gezahlt.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media
springer.de

Spektrum Akademischer Verlag ist ein Imprint von Springer

08 09 10 11 12 5 4 3 2 1

Planung und Lektorat: Dr. Andreas Rüdinger, Bianca Alton
Redaktion: Regine Zimmerschied
Herstellung: Andrea Brinkmann
Umschlaggestaltung: wsp design Werbeagentur GmbH, Heidelberg
Satz: le-tex publishing services oHG, Leipzig
Druck und Bindung: Krips b.v., Meppel

Printed in The Netherlands

ISBN 978-3-8274-2034-3

Inhaltsverzeichnis

1 Erkenntnis

Während [dieser] Zeiten der Entspannung nach Phasen konzentrierter geistiger Aktivität scheint die Intuition die Herrschaft zu übernehmen und diese plötzlichen klärenden Erkenntnisse auszulösen, die so viel Freude und Lust bereiten.

Fritjof Capra, Physiker

Dieses Kapitel zum Aufwärmen enthält eine Auswahl von Rätseln, die nicht an ein spezielles Thema oder an eine Technik gebunden sind. Jedoch wird Sie (wie dies oft der Fall ist) eine Schlüsselerkenntnis auf den richtigen Weg bringen. Legen wir also los:

Münzen in einer Reihe

Auf einem Tisch liegen 50 Münzen mit unterschiedlichen Werten in einer Reihe. Alice nimmt eine Münze von einem Ende weg und steckt sie ein; dann wählt Bob eine Münze von einem der beiden Enden, und so geht es abwechselnd weiter, bis Bob die letzte Münze einsteckt.

Beweisen Sie, dass Alice so spielen kann, dass sie garantiert mindestens genauso viel Geld bekommt wie Bob.

Probieren Sie dies selbst einmal mit einigen Münzen (oder Zufallszahlen) aus – vielleicht nur mit vier oder sechs Münzen statt mit 50. Es ist nicht offensichtlich, wie man am geschicktesten spielt, nicht wahr? Aber vielleicht benötigt Alice gar nicht die *beste* Strategie.

Jetzt haben Sie die Möglichkeit, einen Präzedenzfall zu schaffen und dieses Rätsel zu lösen, bevor Sie weiterlesen.

Lösung: Nummerieren Sie die Münzen von 1 bis 50. Sie werden feststellen, dass Alice (unabhängig von Bobs Spielweise) alle geradzahligen Münzen oder, wenn sie mag, alle ungeraden erringen kann. Eine dieser beiden Möglichkeiten muss der anderen mindestens gleichwertig sein. □

Dieses Rätsel, das ich vom Mathematiker Noga Alon erhalten habe, wurde angeblich von einer Hightech-Firma in Israel eingesetzt, um Bewerber zu testen. Alice stehen sogar noch bessere Strategien zur Verfügung, als nur alle geraden oder ungeraden Münzen auszuwählen. Wenn aber 51 statt 50 Münzen zur Auswahl stehen, dann hat gewöhnlich Bob (der als Zweiter spielt) einen Vorteil, obwohl er weniger Münzen einsammelt als Alice. Es erscheint paradox, dass die Geradzahligkeit der Münzen solch eine gewaltige Auswirkung auf das Ergebnis des Spiels hat, bei dem alle Spielzüge ausschließlich an den Enden stattfinden.

(Der große Martin Gardner hat jüngst einen Kartentrick erfunden, der auf diesem Rätsel basiert. Wenn Sie sich für diesen und andere Kartentricks interessieren, dann empfehle ich Ihnen Colm Mulcahys hervorragende „Card Colm“ auf http://www.maa.org/columns/colm/cardcolm.html.)

Jetzt sind Sie auf sich allein gestellt. Wir beginnen mit zwei Rätseln, die nicht ganz so mathematisch sind; dann kommen wir zum ernsthafteren Material. Lassen Sie sich von Ihrer Vorstellungskraft leiten!

Die Bixby-Jungs

Es war der erste Schultag, und in Mrs. Feldmans Klasse saßen in der ersten Reihe zwei identisch aussehende Schüler, Donald and Ronald Bixby, nebeneinander in der vordersten Bank.

„Ich nehme an, ihr seid Zwillinge?“ fragte sie.

„Nein“, antworteten die Jungs unisono.

Ihre Unterlagen zeigten jedoch, dass sie die gleichen Eltern hatten und am selben Tag geboren wurden. Wie war das möglich?

Der Dachbodenlichtschalter

Eine Schalttafel im Keller enthält drei An-und-aus-Schalter. Einer davon ist der Schalter für die Lampe auf dem Dachboden – aber welcher? Ihre Aufgabe besteht darin, etwas mit den Schaltern zu tun und dann nach einem *einmaligen* Gang zum Dachboden zu entscheiden, welcher der Schalter das Licht auf dem Dachboden ein- und ausschaltet.

Benzinmangel

Es herrscht Benzinmangel. Mehrere Tankstellen, die auf einer langen Wegstrecke kreisförmig angeordnet sind, haben zusammen gerade so viel Benzin, dass es für eine Rundreise reicht.

Beweisen Sie, dass Sie die Rundreise schaffen, wenn Sie mit einem leeren Tank an der richtigen Tankstelle starten.

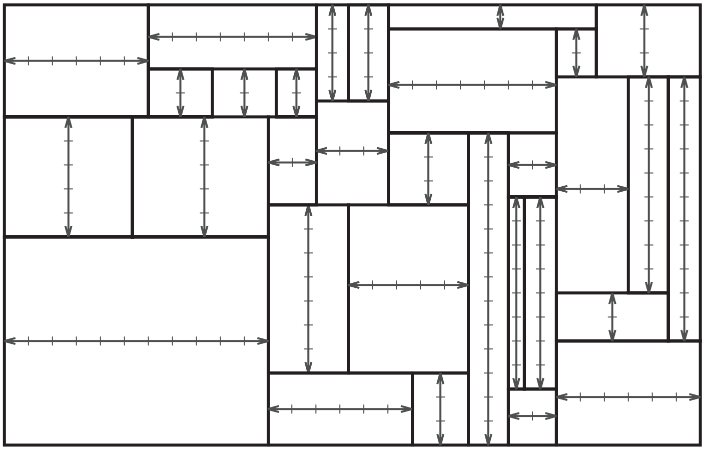
Der Gebrauch von Zündschnüren

Sie haben zwei Zündschnüre von unterschiedlicher Länge, die beide in exakt einer Minute abbrennen. Können Sie mithilfe der Zündschnüre eine Zeitspanne von 45 Sekunden bestimmen?

Ganze Zahlen und Rechtecke

Ein großes Rechteck in der Ebene wird in kleinere Rechtecke aufgeteilt, deren Höhen oder Breiten (oder beides) jeweils ganzzahlig sind.

Beweisen Sie, dass auch das große Rechteck diese Eigenschaft hat.



Das Neigen der Waagschale

Auf dem Tisch der Lehrerin steht eine Balkenwaage, die sich im Augenblick nach rechts neigt. Auf beiden Waagschalen befinden sich Gewichte, und auf jedem Gewicht steht der Name von mindestens einem Schüler. Wenn ein Schüler den Klassenraum betritt, dann nimmt er alle Gewichte mit seinem Namen und legt sie auf die andere Seite der Waage.

Beweisen Sie, dass es eine *bestimmte* Menge von Schülern gibt, die die Lehrerin hereinlassen kann, so dass sich die Waage nach links neigt.

Uhren auf dem Tisch

Auf einem Tisch liegen 50 genau gehende Uhren. Beweisen Sie, dass es einen Augenblick gibt, in dem die Summe der Entfernungen vom Mittelpunkt des Tisches bis zu den Enden der Minutenzeiger größer ist als die Summe der Entfernungen vom Mittelpunkt des Tisches zu den Mittelpunkten der Uhren.

Pfad auf einem Schachbrett

Alice fängt an: Sie markiert ein Quadrat in der Ecke eines $n \times n$-Schachbretts; Bob markiert ein direkt benachbartes Quadrat (mit gemeinsamer Kante). Dann fahren Alice und Bob so lange abwechselnd fort – wobei sie jeweils ein Quadrat markieren, das dem zuletzt markierten direkt benachbart ist –, bis kein unmarkiertes direkt benachbartes Quadrat mehr verfügbar ist. Der Spieler, der jetzt an der Reihe ist, hat verloren.

Bei welchen n verfügt Alice über eine Gewinnstrategie? Bei welchen n gewinnt sie, wenn das zuerst markierte Quadrat stattdessen ein Nachbar eines Eckquadrats ist?

Hochzahl über Hochzahl

In den 1960er Jahren enthielt die Abschlussprüfung einer amerikanischen Highschool die folgende Frage. Falls

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2,$$

welche Zahl ist dann x? Nach der vorgesehenen Lösung sollte festgestellt werden, dass der gesamte Exponent zur ersten Basis „x" denselben Wert hat wie der gesamte Ausdruck, also $x^2 = 2$, $x = \sqrt{2}$. Ein Schüler stellte jedoch fest, dass die Antwort auf die Aufgabe

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 4$$

zur gleichen Antwort geführt hätte: $x = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$.

Hm. Nur, was ist aber nun $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$? Können Sie einen Beweis finden?

Soldaten im Gelände

Eine ungerade Zahl von Soldaten wird in einem Gelände stationiert, und zwar so, dass die Entfernungen der Paare jeweils unterschiedlich sind. Jedem Soldaten wird befohlen, den ihm am nächsten stehenden Soldaten im Auge zu behalten.

Beweisen Sie, dass mindestens ein Soldat nicht beobachtet wird.

Intervalle und Abstände

Es sei S die Vereinigung von k disjunktiven, abgeschlossenen Intervallen im Einheitsintervall $[0, 1]$. Angenommen, S hat die

Eigenschaft, dass es für jede reelle Zahl d in $[0, 1]$ zwei Punkte in S gibt, deren Abstand d beträgt. Beweisen Sie, dass die Summe der Intervalllängen in S mindestens $1/k$ beträgt.

Aufsummieren auf 15

Alice und Bob wählen abwechselnd Zahlen aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 9\}$, wobei jede Zahl nur einmal verwendet werden darf. Der Erste, der drei Zahlen mit der Summe 15 hat, hat gewonnen. Gibt es für Alice, die zuerst an der Reihe ist, eine Gewinnstrategie?

Lösungen und Kommentare

Die Bixby-Jungs

Eine klassische Denksportaufgabe. Natürlich sind die Bixbys Drillinge. Der dritte (Arnold?) war in einer anderen Klasse. □

Der Dachbodenlichtschalter

Dieses Rätsel ging vor ungefähr einem Jahrzehnt wie eine Grippewelle rund um die Welt. Ich kenne die Originalquelle nicht.

Es ist wirklich unmöglich herauszufinden, welcher Schalter zur Lampe auf dem Dachboden gehört, wenn man nur ein Bit an Information von einem Gang zum Dachboden hat. Aber mit Ihren Händen können Sie sich weitere Informationen verschaffen! Schalten Sie die Schalter 1 und 2 ein, warten Sie ein paar Minuten, und schalten Sie dann, bevor Sie auf den Dachboden steigen, Schalter 2 aus. Wenn die Lampe aus, aber warm ist, dann können Sie den Schluss ziehen, dass Schalter 2 der richtige ist. □

Wenn Sie die Glühbirne mit der Hand nicht erreichen können, aber über ein *enormes* Maß an Geduld verfügen, dann können Sie den gleichen Effekt erzielen, indem Sie Schalter 2 anschalten und dann ein paar Monate warten, bevor Sie Schalter 1 aktivieren und den Dachboden aufsuchen. Wenn die Glühbirne durchgebrannt ist, dann ist Schalter 2 der Übeltäter.

Benzinmangel

Dieses Rätsel ist schon lange im Umlauf; es kann zum Beispiel in László Lovászs wunderbarem Buch *Combinatorial Problems and Exercises*, Amsterdam 1979, nachgelesen werden. Der Trick besteht darin, dass Sie sich vorstellen, bei Tankstelle 1 mit einer *ausreichenden* Menge Benzin zu starten und dann die Route abzufahren, wobei Sie jede Tankstelle leertanken. Wenn Sie zu Tankstelle 1 zurückkehren, haben Sie die gleiche Menge Benzin im Tank wie beim Start.

Wenn Sie so vorgehen, dann beobachten Sie, wie viel Benzin Sie bei der Einfahrt in jede Tankstelle noch haben. Nehmen Sie an, dass diese Menge an der Tankstelle k am geringsten ist. Wenn Sie nun an Tankstelle k mit leerem Tank Ihre Rundreise starten, wird Ihnen das Benzin zwischen den Tankstellen nicht ausgehen. □

Der Gebrauch von Zündschnüren

Zünden Sie gleichzeitig die beiden Enden der einen Zündschnur und ein Ende der anderen an. Wenn die erste Lunte abgebrannt ist (nach einer halben Minute), stecken sie das andere Ende der zweiten in Brand. Wenn diese Lunte abgebrannt ist, sind genau 45 Sekunden vergangen. □

Dieses und andere Zündschnurrätsel verbreiteten sich vor einigen Jahren wie ein Flächenbrand. Dick Hess, ein Experte für Unterhaltungsmathematik, hat einen kleinen Band namens *Shoelace Clock Puzzles* zusammengestellt, der ihnen gewidmet ist. Von dem Rätsel oben hörte er zuerst von Carl Morris von der Harvard-Universität.

Hess betrachtet mannigfaltige Zündschnüre (bei ihm sind es Schnürsenkel), aber entzündet sie nur an den Enden. Man kann noch mehr erreichen, wenn man zulässt, dass die Zündschnüre auch in der Mitte oder nach dem Zufallsprinzip mehrfach entzündet werden. Man kann zum Beispiel eine 60-Sekunden-Zündschnur in zehn Sekunden abbrennen, indem man sie an beiden Enden und an zwei inneren Punkten anzündet. Wenn ein Segment abgebrannt ist, zündet man einen neuen inneren Punkt an, so dass immer drei Segmente an beiden Enden brennen. Auf diese Weise wird das Material der Lunte sechsmal so schnell wie vorgesehen verbrannt.

Allerdings wird es am Ende eine ziemliche Hetzerei. Sie benötigen unendlich viele Streichhölzer, um perfekte Präzision zu erreichen.

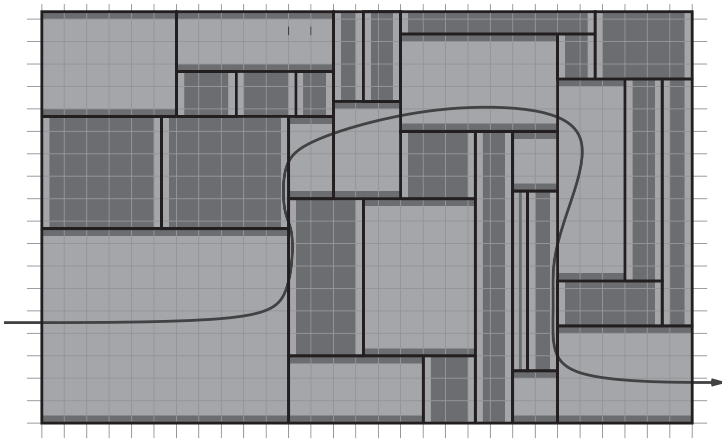
Ganze Zahlen und Rechtecke

Dieses Rätsel war Gegenstand eines einzigartigen Artikels von Stan Wagon (vom Macalester College in St. Paul, Minnesota) mit dem Titel „Fourteen Proofs of a Result about Tiling a Rectangle“ in *The American Mathematical Monthly*, Bd. 94 (1987), S. 601–617.

Einige von Wagons Lösungen machen seltsamen Gebrauch von schwerem mathematischen Geschütz. Eine Lösung, die dies vermeidet, erfordert, dass man die linke untere Ecke des großen Rechtecks auf den Ursprung eines Gitters platziert, das aus Quadraten mit der Seitenlänge 1/2 besteht. Indem wir die Quadrate des Gitters wie bei einem Schachbrett abwechselnd schwarz und weiß färben, sehen wir, dass jedes kleine Rechteck exakt halb weiß und halb schwarz ist.

Dasselbe gilt folglich für das große Rechteck. Wenn jedoch die Höhe des großen Rechtecks nicht ganzzahlig ist, dann ist der Bereich des großen Rechtecks zwischen den Geraden $x = 0$ und $x = 1/2$ farblich nicht ausbalanciert. Demzufolge müsste die Breite ganzzahlig sein. $\square$

Ihr Autor ist für die folgende Lösung verantwortlich, die sich in Wagons Artikel nicht findet. Es sei ε kleiner als die geringste Abweichung in der Zerlegung. Färben Sie jedes kleine Rechteck mit ganzzahliger Breite grün, außer einem waagrechten Streifen von der Breite ε am oberen und unteren Rand. Färben Sie jedes restliche kleine Rechteck rot, außer einem grünen senkrechten Streifen von der Breite ε am linken und rechten Rand.



Platzieren Sie die linke untere Ecke des großen Rechtecks auf dem Ursprung (eines Gitters). Entweder gibt es einen grünen Pfad von der linken zur rechten Seite, oder es gibt einen roten Pfad von unten nach oben. Angenommen das Erstere trifft zu. Jedes Mal, wenn der grüne Pfad eine senkrechte

Grenze der Partition überquert, liegt sie auf einer ganzzahligen Koordinate. Deshalb hat das große Rechteck eine ganzzahlige Breite. In gleicher Weise führt ein roter Pfad von unten nach oben zwangsweise zu einer ganzzahligen Höhe.

Das Neigen der Waagschale

Betrachten Sie alle Teilmengen der Schüler inklusive der leeren Menge und der Gesamtmenge. Jedes Gewicht befindet sich die Hälfte der Zeit auf der linken Seite; also ist das Gesamtgewicht für all diese Teilmengen auf der linken Seite gleich dem Gesamtgewicht auf der rechten Seite. Da die leere Menge zu einer Neigung nach rechts führt, muss eine andere Menge in einer Neigung nach links resultieren.

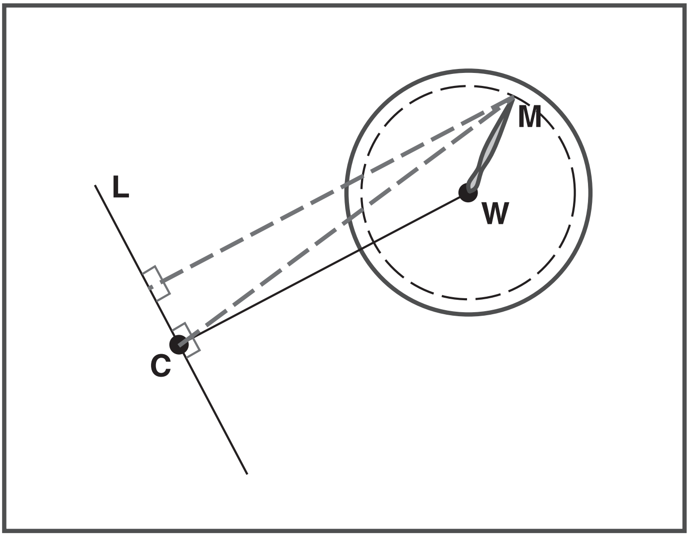
Quelle: 2. Gesamtsowjetischer Mathematikwettbewerb, Leningrad 1968. □

Die Technik der „Mittelung", die hier angewandt wird, kommt häufig vor: Achten Sie darauf!

Uhren auf dem Tisch

Wenn wir nur eine Uhr betrachten, dann behaupten wir, dass während des Ablaufs einer Stunde die durchschnittliche Entfernung vom Mittelpunkt C des Tisches bis zur Spitze M des Minutenzeigers größer als die Entfernung von C zum Mittelpunkt W der Uhr ist. Denn ziehen wir eine Gerade L durch C, die senkrecht auf der Strecke von C nach W steht, ist die Durchschnittsentfernung von L zu M eindeutig gleich der Entfernung LW. Diese ist wiederum gleich CW. Aber CM ist mindestens gleich LM und normalerweise größer.

Wenn wir alle Uhren zusammenzählen, dann kommen wir natürlich zur gleichen Schlussfolgerung. Daraus folgt, dass irgendwann während des Ablaufs einer Stunde die gewünschte Ungleichheit erreicht wird. □



Die Anforderung, dass die Uhren genau gehen, stellt sicher, dass sich jeder Minutenzeiger mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Es spielt keine Rolle, ob sich diese Geschwindigkeiten unterscheiden, sofern unsere Geduld nicht auf eine Stunde begrenzt ist.

Eine zusätzliche Anmerkung: Wenn Sie die Uhren ganz sorgfältig auf dem Tisch ausrichten, dann können Sie sicherstellen, dass die Summe der Entfernungen vom Mittelpunkt des Tisches zu den Enden der Minutenzeiger stets größer ist als die Summe der Entfernungen vom Mittelpunkt des Tisches zum Mittelpunkt der Uhren.

Quelle: 10. Gesamtsowjetischer Mathematikwettbewerb, Duschanbe 1976.

Pfad auf dem Schachbrett

Wenn n gerade ist, steht Bob eine einfache Gewinnstrategie zur Verfügung, wobei es gleichgültig ist, wo Alice beginnt. Bob stellt sich einfach vor, das Schachbrett werde von Dominosteinen bedeckt, wobei ein Stein zwei benachbarte Quadrate des Bretts bedeckt. Er wählt dann die zweite Hälfte jedes Dominosteins, der von Alice begonnen wird. (Beachten Sie bitte, dass diese Methode auch dann funktioniert, wenn man Alice erlaubt, bei jedem Zug jedes beliebige Quadrat zu markieren!)

Wenn n ungerade ist und Alice in einer Ecke beginnt, gewinnt sie, wenn sie sich ein Kachelmuster aus Dominosteinen vorstellt, das jedes Quadrat bedeckt – außer dem in der Ecke, mit dem sie beginnt.

Alice verliert jedoch im ungeraden Fall n, wenn sie in dem Quadrat beginnen muss, das neben der Ecke liegt. Nehmen wir an, die Eckquadrate auf einem Schachbrett sind schwarz gefärbt, so dass ihr Startquadrat weiß ist. Es gibt also ein Kachelmuster aus Dominosteinen minus einem schwarzen Quadrat. Bob gewinnt, indem er diese Dominosteine komplettiert. Alice kann das eine Quadrat, das frei liegt, niemals markieren, denn alle Quadrate, die sie markiert, sind weiß. □

Quelle: 12. Gesamtsowjetischer Mathematikwettbewerb, Taschkent 1978.

Hochzahl über Hochzahl

Falls der Ausdruck

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

überhaupt etwas bedeutet, dann ist er der Grenzwert der Folge $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$,$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$, ... Der Grenzwert existiert tatsächlich; die Folge ist steigend und nach oben beschränkt.

Um das Erstere zu zeigen, bezeichnen wir die Folge mit $s_1, s_2, \ldots$ und beweisen mit Induktion, dass $1 < s_i < s_{i+1}$ für jedes $i \geq 1$. Das ist einfach, denn $s_{i+2} = \sqrt{2}^{s_{i+1}} > \sqrt{2}^{s_i} = s_{i+1}$.

Um die obere Grenze zu ermitteln, gehen wir von der Beobachtung aus, dass der gesamte Ausdruck auf den Wert 2 zusammenschrumpft, wenn wir für jedes s_i den höchsten Exponenten $\sqrt{2}$ durch die größere Zahl 2 ersetzen.

Jetzt, da wir wissen, dass ein Grenzwert existiert, nennen wir ihn y. Er muss in der Tat die Gleichung $\sqrt{2}^y = y$ erfüllen. Sehen wir uns die Gleichung $x = y^{1/y}$ näher an, dann stellen wir mit Hilfe der elementaren Analysis fest, dass x streng monoton steigt, bis es sein Maximum in y erreicht, und danach streng monoton fällt. Es gibt daher höchstens zwei y-Werte, die einem beliebigen x-Wert entsprechen. Für $x = \sqrt{2}$ kennen wir die Werte: $y = 2$ und $y = 4$.

Da unsere Folge von der Zahl 2 beschränkt wird, kommt die Lösung $y = 4$ nicht in Frage. Wir folgern also $y = 2$. $\square$

In Verallgemeinerung der obigen Argumentation können wir sagen, dass $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ eine definierte Bedeutung besitzt und den gleichen Wert hat wie die kleinere Lösung der Gleichung $x = y^{1/y}$, sofern $1 \leq x \leq e^{1/e}$. Für $x = e^{1/e}$ ist der Ausdruck gleich e, aber sobald x den Ausdruck $e^{1/e}$ übersteigt, divergiert die Folge ins Unendliche.

Diese Beobachtung hat Leonhard Euler im Jahre 1778 gemacht!

Gerald Folland von der Universität Washington wies mich darauf hin, dass das Verhalten von $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ ebenfalls ganz interessant ist, wenn x kleiner als 1 ist. Weitere Informationen zu dieser Angelegenheit können Sie dem Artikel von J. M. de Villiers und P. N. Robinson in *American Mathematical Monthly*, Bd. 93 (1986), S. 13–23, entnehmen.

Soldaten im Gelände

Dieses Problem vom 6. Gesamtsowjetischen Mathematikwettbewerb 1966 in Woronesch löst man am einfachsten, wenn man sich die beiden Soldaten betrachtet, die am dichtesten beieinanderstehen. Jeder beobachtet den jeweils anderen; beobachtet noch irgendjemand einen von den beiden, dann gibt es einen Soldaten, der zweimal beobachtet wird, und daher einen anderen, der überhaupt nicht beobachtet wird. Anderenfalls könnte man diese beiden Soldaten entfernen, ohne dass die anderen davon betroffen sind. Da die Anzahl der Soldaten ungerade ist, reduziert sich mit diesem Verfahren die Zahl schließlich auf einen Soldaten, der niemanden beobachtet – ein Widerspruch. □

Intervalle und Abstände

Quelle: 17. Gesamtsowjetischer Mathematikwettbewerb, Kischenew 1983.

Angenommen, die Längen der Intervalle in S sind $s_1, \ldots, s_k$, die Summe aller Längen ist s. Lassen Sie uns das Intervall I_{ij} der *Abstände* betrachten, das wir erhalten, wenn wir einen Punkt aus dem $i$ten Intervall und einen anderen Punkt aus dem $j$ten Intervall nehmen. Das Intervall I_{ij} hat ganz klar die Länge $s_i + s_j$. Summiert man alle Intervalle paarweise auf, dann taucht s_i $k-1$-mal auf. Somit beträgt die Gesamtlänge der Abstände, die man durch die Wahl von zwei verschiedenen Intervallen erhält, höchstens $(k-1)s$. Die Abstände, die man durch die Wahl von zwei Punkten aus *demselben* Intervall erhält, reichen von 0 bis zur maximalen Länge s_i. Insgesamt ist das Maß der Abstände also höchstens ks; aus $ks \geq 1$ erhalten wir $s \geq 1/k$. □

Die Beweisführung ist nur dann hieb- und stichfest, wenn das maximale s_i gleich s ist, das heißt dass alle Intervalle außer einem die Länge 0 haben. Dies können wir erreichen, wenn wir ein Intervall mit $[j/k, (j+1)/k]$ festlegen für ein beliebiges $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ und die einzelnen Punkte 0, $1/k$, $2/k$, $\ldots$, $(j-2)/k$, $(j-1)/k$, $(j+2)/k$, $(j+3)/k$, $\ldots$, 1 hinzufügen.

Aufsummieren auf 15

Der schnelle Weg, dieses Rätsel zu lösen, besteht darin, dass Alice und Bob mit dem folgenden magischen Quadrat spielen:

$$\begin{matrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2\,. \end{matrix}$$

Da die Reihen, Spalten und Hauptdiagonalen die Summe 15 ergeben, spielen sie Tic-Tac-Toe! Jeder weiß, dass in Tic-Tac-Toe auch das beste Spiel zu einem Unentschieden führt. Die Antwort auf unsere Frage ist also: Nein, es gibt keine Gewinnstrategie für Alice. □

Dieses verrückte Spiel wird im zweiten Band des Klassikers *Winning Ways for Your Mathematical Plays* von Elwyn Berlekamp, John Conway und Richard Guy (Academic Press, 1982; 2. Auflage, A K Peters 2001) erwähnt. Das Buch schreibt das Rätsel einem E. Pericoloso Sporgersi zu, aber es stimmt einen doch misstrauisch, dass man diese Worte auch in italienischen Eisenbahnzügen finden kann, wo sie Fahrgäste warnen, sich nicht aus dem Fenster zu lehnen.