Vorwort

Mathematik dringt in immer weitere Bereiche der Naturwissenschaften vor. Das für die Physik so erfolgreiche Programm, die „Sprache der Natur ins Mathematische zu übersetzen“, hat auch für Teile der Bio- und Geo-Wissenschaften große Anziehungskraft gewonnen. Deshalb bieten diese Fachrichtungen – oft in Zusammenarbeit mit der Mathematik – in den ersten Semestern mathematische Grundvorlesungen an. Aus solchen (zweisemestrigen) Vorlesungen an der Universität München ist der vorliegende Text entstanden.

Konzipiert ist dieses Buch primär als vorlesungsbegleitender Text, der die wichtigsten mathematischen Konzepte und Methoden enthält. Vorausgesetzt wird nur Schulmathematik, wie sie an den Gymnasien und Fachoberschulen vermittelt wird.

Betonung wurde auf eine kompakte, einbändige Präsentation des Stoffes gelegt. Dieser Stoff umfasst das Rechnen mit Zahlen, Folgen und Reihen, die (auch mehrdimensionale) Differentialrechnung, die Integralrechnung und reicht über die Fourieranalyse und die Matrizenrechnung bis hin zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Trotz der angestrebten Kürze sollte der Text selbst erklärend und zum Selbststudium geeignet sein.

Erproben kann der Leser das Erlernte an Übungsaufgaben, deren vollständige Lösungen unter
`www.math.lmu.de/~mfn/` Stichwort „Mathematik für Naturwissenschaftler“ zur Verfügung stehen. Ferner werden durchweg Programmcodes in `maple` bzw. `R` angeboten, Letzteres ein `open-source` Paket (`cran.r-project.org`). Informationen zu diesen Paketen findet man in *R. Braun & R. Meise* bzw. in *P. Dalgaard* oder *D. Dolić*.

Organisiert ist das Buch in der Weise, dass die mehr theoretischen Teile mit einem * versehen sind (oder als Exkurs an das jeweilige Kapitel angehängt wurden); für das Verständnis des folgenden Textes kann der Leser sie (zunächst, hoffentlich nicht für immer) überspringen. Dem ungeachtet kann kein Mathematikbuch dieser Art dem Dilemma entgehen, auf der einen Seite hinreichend exakt und präzise zu sein, andererseits aber auch den Bedürfnissen des Anwenders zu dienen und ihn nicht mit Formalismen zu überfordern.

Als **Bitte** an die Leser: Unter der oben genannnten `www` Adresse findet sich ein „Errata“, das durch Ihre Mitteilungen an

`Rost@math.lmu.de` oder `Pruscha@math.lmu.de`

ergänzt werden kann.

Dank ergeht an die Assistenten und Tutoren, welche unsere Vorlesungen begleitet haben, insbesondere an Herrn H. Jaskolla, dessen Kompetenz den Aufgabenteilen zugute kam.

Literatur, die weiterführt, ist (jeweils alphabetisch) für den Bereich
– Analysis (Kap. 1 bis 6, Kap. 8): *O. Forster*, *K. Königsberger*, *K. Meyberg & P. Vachenauer*, *W. Walter*
– Vektoren und Matrizen (Kap. 7): *G. Fischer*, *R. Zurmühl & S. Falk*
– Stochastik (Kap. 9 und 10): *H.-O. Georgii*, *U. Krengel*, *H. Pruscha*, *L. Sachs & J. Hedderich.*

Ferner sei auf Texte hingewiesen, die spezielle Fachrichtungen bedienen, wie *N. Henze & G. Last*, *A. Riede*, *M. Stockhausen.* Der Ältere der beiden Autoren wurde schon in den achtziger Jahren durch die Bücher von *W. Luh* und *J. Hainzl* auf diese interessante Materie aufmerksam gemacht und zu Vorlesungen „Mathematik für Naturwissenschaftler“ angeregt.

Mathematik ist selber keine **Naturwissenschaft**, sondern – nach *Immanuel Kant* – in ganz dezidierter Weise eine Geisteswissenschaft. In ihr sah der Philosoph die *Prinzipien der Vernunft* verwirklicht. Das hervorragende Zusammenspiel der Mathematik mit den Naturwissenschaften – namentlich mit der Physik – ist diesen Prinzipien zu verdanken. Mit ihrer Hilfe befragen wir die Natur und nehmen nur diesbezügliche Antworten zur Kenntnis. Diese seine Einsicht hat Kant so zum Ausdruck gebracht: „Die Vernunft muß mit ihren Prinzipien ... an die Natur gehen, zwar um von ihr belehrt zu werden, aber nicht in der Qualität eines Schülers, der sich alles vorsagen läßt, was der Lehrer will, sondern eines bestallten Richters, der die Zeugen nötigt, auf die Fragen zu antworten, die er ihnen vorlegt“ (zitiert nach *O. Höffe*). Bei diesen „Befragungen“ muss der Naturwissenschaftler einerseits auf eine leistungsfähige – von der Mathematik bereitgestellte – Sprache zurückgreifen können, andererseits den Formeln dieser Sprache substanzwissenschaftliche Bedeutung geben.

Zur **Notation** und damit zurück in die Realität des vorliegenden Textes: Schreiben wir $A := B$, so meinen wir, dass die Größe A durch die rechte Seite B definiert wird, $A = B$ bedeutet in der Regel eine (durch Analyse begründete) Aussage, während $A \equiv B$ bloß zum Ausdruck bringt, dass A und B synonyme Bezeichnungen sind oder sein sollen. Innerhalb der präsentierten `maple` und `R` Programme erkennt man Kommentare an dem vorangestellten Symbol $\sharp$.

München, Juli 2008

Helmut Pruscha
Daniel Rost

1

Zahlen und Anzahl

Die Grundlage des Rechnens, vielleicht sogar der Ursprung der Mathematik überhaupt, liegt im Begriff der Anzahl. „Ein Korb mit 7 Äpfeln“, „eine Bundesliga mit 18 Vereinen“, „eine Party mit 32 Gästen“: hier bezeichnen 7, 18 und 32 Anzahlen (Mächtigkeiten) gewisser Mengen (der Menge aller Äpfel im Korb, aller Vereine in der Bundesliga, aller Gäste auf einer Party), für die man sich gerade interessiert. Der Begriff der Zahl geht aber weit über den der Anzahl hinaus. Nicht nur 7, 18, 32 oder 0 sind Zahlen, sondern auch

$$-3, \quad \frac{4}{7}, \quad \sqrt{2}, \quad \pi, \quad e, \quad \ln 6 \quad \text{oder} \quad 57^{\frac{1}{3}}.$$

Wir verwenden den Begriff „Zahlen“ im Kapitel 1 synonym für „reelle Zahlen“. Um diese und um die Struktur unseres Zahlensystems, das die Grundlage des Rechnens ist, soll es zunächst gehen.

1.1 Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind das Fundament, auf dem die Analysis aufgebaut ist. Wir werden hier nicht der Frage nachgehen, was die reellen Zahlen eigentlich sind. Vielmehr beschäftigen wir uns mit den Fragen

1. Wie sind die reellen Zahlen strukturiert?
2. Wie lassen sich reelle Zahlen darstellen?

und besonders wichtig

3. Wie operiere ich mit reellen Zahlen?

Unter 1. steht die Frage nach dem Aufbau des Zahlensystems, für 2. ist „Dezimalbruchdarstellung“ ein passendes Stichwort und 3. meint zunächst einmal die wichtigsten Rechenregeln, einschließlich der Regeln für Betrag und Ungleichheitszeichen.

1.1.1 Natürliche, ganze und rationale Zahlen

Wir gehen aus von der Menge

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

der **natürlichen Zahlen**. 0 ist für uns keine natürliche Zahl. Soll sie jedoch in die Betrachtung mit aufgenommen werden, so schreiben wir

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}.$$

Auf $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}_0$ sind die Operationen „+“ und „ · “ definiert, so dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$\text{die Summe} \quad n + m \qquad \text{und das Produkt} \quad n \cdot m$$

wieder natürliche Zahlen sind.

Beim Rechnen in den natürlichen Zahlen stößt man jedoch schnell an gewisse Grenzen. So besitzt z. B. die simple Gleichung

$$5 + x = 3$$

keine Lösung in $\mathbb{N}_0$, wohl aber in der erweiterten Zahlenmenge

$$\mathbb{Z} := \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

der sog. **ganzen Zahlen**. In $\mathbb{Z}$ ist die Gleichung $n + x = m$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ stets eindeutig lösbar. Unbefriedigend bleibt jedoch, dass auch in $\mathbb{Z}$ die Gleichung

$$5 \cdot x = 3$$

keine Lösung besitzt. Deshalb erweitert man $\mathbb{Z}$ zum System der Brüche (der Bruch $\frac{3}{5}$ ist per Definition die Lösung von $5 \cdot x = 3$)

$$\mathbb{Q} := \Big\{ \frac{n}{m} \ : \ n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \Big\}.$$

$\mathbb{Q}$ heißt Menge der **rationalen Zahlen** und umfasst $\mathbb{Z}$, da die Brüche $\frac{n}{1}$ mit n identifiziert werden. Zwei Brüche $\frac{n_1}{m_1}$ und $\frac{n_2}{m_2}$ sind gleich, wenn gilt

$$n_1 \cdot m_2 = n_2 \cdot m_1 .$$

Damit können also verschiedene Brüche dieselbe rationale Zahl darstellen; z. B. ist

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{-3}{-5} = \frac{300}{500} = ...$$

Die Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Q}$ ist wie folgt erklärt

$$\frac{n_1}{m_1} + \frac{n_2}{m_2} = \frac{n_1 \cdot m_2 + n_2 \cdot m_1}{m_1 \cdot m_2} \tag{1.1}$$

$$\frac{n_1}{m_1} \cdot \frac{n_2}{m_2} = \frac{n_1 \cdot n_2}{m_1 \cdot m_2} \, . \tag{1.2}$$

Mit (1.1) und (1.2) zeigt man sofort, dass in $\mathbb{Q}$ die Gleichungen

$$b + x = a \qquad \text{und} \qquad b \cdot x = a \quad (\text{hier: } b \neq 0)$$

jeweils genau eine Lösung besitzen. Allerdings besitzt die folgende Gleichung

$$x \cdot x = 2$$

nach wie vor keine Lösung in $\mathbb{Q}$, wie man zeigen kann. Dies ist mit ein Grund, eine nochmalige Erweiterung des Zahlenbereiches anzustreben.

1.1.2 Dezimalbrüche und reelle Zahlen

Es ist bekannt, dass sich rationale Zahlen auch in der Form von periodischen Dezimalbrüchen darstellen lassen. Beispielsweise ist

$$\frac{1}{2} = 0.5, \quad \frac{3}{5} = 0.6, \quad \frac{5}{16} = 0.3125, \quad \frac{15}{11} = 1.\overline{36}.$$

Dabei bedeutet $\overline{36}$, dass sich die Ziffernfolge 36 periodisch wiederholt, also

$$\frac{15}{11} = 1.363636363636\ldots.$$

Auch 0.5 kann als periodischer Dezimalbruch geschrieben werden, entweder

$$0.5 = 0.5\overline{0} \qquad \text{oder} \quad 0.5 = 0.4\overline{9}.$$

Die Darstellung einer rationalen Zahl als periodischer Dezimalbruch ist eindeutig, falls man Darstellungen mit Periode 9 ausschließt.

Andererseits weiß man auch, dass jeder periodische Dezimalbruch eine rationale Zahl darstellt. Damit bilden die periodischen Dezimalbrüche genau die rationalen Zahlen. Die nicht-periodischen Dezimalbrüche wie z. B.

$$x = 0.1010010001000010000001...$$

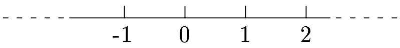
heißen dann irrationale Zahlen. Zusammen mit den rationalen Zahlen bilden sie die **reellen Zahlen**. Die Menge der reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Wir haben die reellen Zahlen also als Dezimalbrüche (periodisch oder nicht-periodisch) kennengelernt, allerdings kein exaktes Konstruktionsverfahren präsentiert. Dies war aber auch gar nicht unsere Absicht gewesen; es reicht für uns, wenn wir

A. ... eine Vorstellung von den reellen Zahlen besitzen

B. ... mit den reellen Zahlen richtig umzugehen wissen.

Zu **A**: Zur Veranschaulichung von $\mathbb{R}$ bietet sich die Zahlengerade an.



Es genügt, wenn wir die Zahlen 0 und 1 fixieren, alle anderen Zahlen sind damit festgelegt.

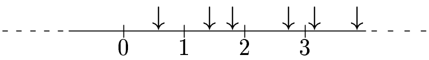
Jede reelle Zahl entspricht einem Punkt auf der Zahlengeraden (leicht aus der Dezimalbruchdarstellung zu erschließen) und umgekehrt entspricht jeder Punkt der Zahlengeraden einer reellen Zahl. Damit ist jede Zahl, die uns im Folgenden (bis einschließlich Kapitel 5) begegnen wird, eine reelle Zahl, so auch alle eingangs aufgeführten Zahlen

$$-3, \quad \frac{4}{7}, \quad \sqrt{2}, \quad \pi, \quad e, \quad \ln 6 \quad \text{oder} \quad 57^{\frac{1}{3}};$$

ihre Dezimalbruchdarstellung (zumindest die ersten 10 Ziffern) entnehmen wir dem Taschenrechner oder MAPLE.

MAPLE Es werden jeweils 10 Stellen ausgedruckt.

```
4/7 = evalf(4/7,10); sqrt(2) = evalf(sqrt(2),10);
Pi = evalf(Pi,10); e = evalf(exp(1),10);
ln6  = evalf(ln(6),10); ’57^(1/3)’ = evalf(57^(1/3),10);
```



Die eingezeichneten Pfeile weisen auf die den Zahlen entsprechenden Punkte auf der Zahlengeraden hin.

Bemerkungen. *1. $\mathbb{Q}$ ist in $\mathbb{R}$ enthalten; trägt man die Elemente von $\mathbb{Q}$ auf der Zahlengeraden auf, so liegen diese zwar so „dicht“, dass man sie nicht einzeln aufzeichnen kann, füllen die Gerade aber nicht aus. Es bleiben „Löcher“ übrig, eben die Punkte, die zu den irrationalen Zahlen gehören. Es gibt sogar viel mehr irrationale Zahlen als rationale (während es überabzählbar viele irrationale – und auch reelle – Zahlen gibt, gibt es „nur“ abzählbar viele rationale). Auf solche Unterscheidungen und Mächtigkeitsvergleiche bei Mengen, die unendlich viele Elemente enthalten, gehen wir hier aber nicht ein.

2. Die Zeichen ∞ und $-\infty$ sind nur Symbole für das offene rechte bzw. offene linke Ende der Zahlengeraden und keine Punkte darauf. Sie sind keine reellen Zahlen, also keine Elemente von $\mathbb{R}$ (es existieren ja auch keine Dezimalbruchdarstellungen von ∞ und $-\infty$).

zu **B**: Auf $\mathbb{R}$ gibt es die beiden Operationen „+“ und „ · “, die die auf $\mathbb{Q}$ definierte Addition und Multiplikation fortsetzen. Wir fassen die grundlegenden Eigenschaften dieser Operationen übersichtlich in der Tabelle 1.1 zusammen.

Tabelle 1.1. Eigenschaften der Operationen „+" und „·" $(a,b,c \in \mathbb{R})$

	Addition	Multiplikation	Gesetz
(R1)	$a+b = b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$	Kommutativ
(R2)	$(a+b)+c = a+(b+c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	Assoziativ
(R3)	$a+0 = a$	$a \cdot 1 = a$	

Addition und Multiplikation werden durch das *Distributivgesetz* verbunden:

(R4) $\quad a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \qquad a,b,c \in \mathbb{R}.$

Ferner besitzen die beiden elementaren Gleichungen $b + x = a$ bzw. $b \cdot x = a$ eindeutig bestimmte Lösungen $x \in \mathbb{R}$, genauer:

(R5) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\quad b + x = a.$
(R6) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\quad b \cdot x = a.$

Wir schreiben für das x aus (R5) mit $b + x = a$ dann

$$x = a - b$$

und für das x aus (R6) mit $b \cdot x = a$ auch $\quad x = \frac{a}{b}.$

Damit haben wir den Ausdruck $\frac{a}{b}$ auch für $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$, erklärt und (1.1) und (1.2) gelten entsprechend in $\mathbb{R}$.

Alle Rechenregeln, die Addition und Multiplikation reeller Zahlen betreffen, können aus (R1) – (R6) abgeleitet werden, z. B.

Rechenregeln. Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt

1. $a \cdot 0 = 0$ 2. $-b = (-1) \cdot b$
3. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ „Minus mal Minus ergibt Plus"
4. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad (b, c, d \neq 0)$ „Auflösen eines Doppelbruchs durch Multiplikation mit dem Kehrwert".

Bemerkung. Man beachte, dass wir bei reellen Zahlen nur von Addition und Multiplikation, nicht von Subtraktion und Division gesprochen haben. Dies ist auch nicht erforderlich, denn man setzt

$$a - b = a + (-b) \qquad \text{und} \qquad a : b = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \qquad (b \neq 0).$$

1.1.3 Anordnung

Zwei reelle Zahlen können nicht nur addiert und multipliziert, sondern auch miteinander verglichen werden, wie schon die Veranschaulichung von $\mathbb{R}$ durch die Zahlengerade nahelegt. So ist z.B.

$$1 < 5.3, \qquad -3 < -2, \qquad 5 = 5, \qquad e < \pi,$$

gelesen als „1 ist kleiner als 5.3“ usw.

Die erste Grundregel für das Rechnen mit „<“ ist

(R7) Für je zwei reelle Zahlen a und b gilt entweder
$$a < b \quad \text{oder} \quad a = b \quad \text{oder} \quad b < a.$$

Wichtig sind die beiden folgenden *Monotoniegesetze*:
Addiert man eine (möglicherweise auch negative) Zahl $c \in \mathbb{R}$ auf beiden Seiten einer Ungleichung $a < b$, so bleibt das „<“ Zeichen erhalten.

(R8) $$a < b \implies a + c < b + c \qquad \text{für } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Bei Multiplikation mit $c \in \mathbb{R}$ gilt die entsprechende Regel nur im Fall $0 < c$:

(R9) $$a < b \implies a \cdot c < b \cdot c \qquad \text{für } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 < c.$$

Die letzte Grundrechenregel für „<“ ist das sog. *Transitivitätsgesetz*:

(R10) $$a < b \quad \text{und} \quad b < c \implies a < c \qquad \text{für } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

$a < b$ bedeutet: der Punkt a liegt auf der Zahlengeraden links von b.

In (R7) – (R10) haben wir nur das Zeichen „<“ verwendet. Wir können das Zeichen „>“ (größer als) aber auf das „<“ - Zeichen zurückführen, indem wir setzen:

$$a > b :\iff b < a.$$

Ferner definiert man noch

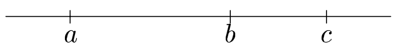
$$a \leq b \quad :\iff \quad a < b \ \text{ oder } \ a = b$$

und eine Doppelungleichung als zwei einfache Ungleichungen

$$a < b < c \quad :\iff \quad a < b \ \text{ und } \ b < c.$$

Ganz entsprechend sind natürlich auch $a \geq b$, $a \leq b < c$, usw. definiert.

Im Diagramm gelten die Ungleichungen $a < b$, $a < c$, $b < c$ und $a < b < c$.



Wir nennen die Zahlen, die auf der Zahlengeraden links der 0 liegen, negativ; die rechts der 0 liegen bezeichnen wir als positiv. Wir haben nämlich die

Definition 1. $a \in \mathbb{R}$ heißt positiv (besitzt positives Vorzeichen), falls $a > 0$, und negativ (besitzt negatives Vorzeichen), falls $a < 0$.

Aus (R7) – (R10) lassen sich folgende, schon aus der Schule bekannte Rechenregeln ableiten. Man beachte, dass $a < b$ gemäß (R8) gleichbedeutend ist mit $b - a > 0$.

***Lemma.** Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt

1. $a < b \quad \text{und} \quad c < 0 \implies a \cdot c > b \cdot c$
2. $a < b \quad \text{und} \quad c < d \implies a + c < b + d$
3. $0 < a < b \quad \text{und} \quad 0 < c < d \implies a \cdot c < b \cdot d$
4. $0 < a < b \implies 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

***Beweis.** (nur zu 1 und 2):
zu 1: Es ist $c < 0 \iff -c > 0$; also gilt

$$a < b \overset{(R9)}{\implies} a \cdot (-c) < b \cdot (-c) \implies -ac < -bc \overset{(R8)}{\implies} bc < ac \overset{\text{Def}}{\implies} ac > bc.$$

zu 2: Es ist $a + c \overset{(R8)}{<} a + d \overset{(R8)}{<} b + d$; mit (R10) folgt Behauptung 2. □

Mit „$<$“ bzw. „$\leq$“ können Intervalle definiert werden. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Dann bezeichnet $[a, b]$ die Menge aller reellen Zahlen x mit $a \leq x \leq b$. In diesem Sinne definieren wir die folgenden Typen von Intervallen:

Definition 2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Dann heißen die Mengen

1.	$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	abgeschlossenes Intervall
2.	$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	offenes Intervall
3.	$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	halboffene Intervalle
4.	$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ $(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$	ein- und zweiseitig unendliche Intervalle.

Im Vorgriff auf 1.1.5 kann man die Intervalle aus 1. bis 3. der Definition 2 beschränkt nennen, die aus 4. unbeschränkt; vgl. Abb. 1.1.

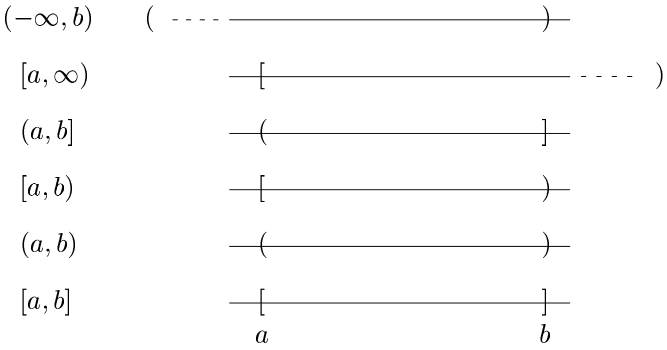


Abb. 1.1. Zwei unbeschränkte Intervalle (oben), dann die vier Typen von Intervallen mit Intervallgrenzen a und b.

1.1.4 Betrag

Wir definieren nun den Betrag einer reellen Zahl als ihren „Abstand von der Zahl Null“.

Definition. Sei $x \in \mathbb{R}$. Der Betrag von x ist definiert als

$$|x| := \begin{cases} x & , \text{ für } x \geq 0 \\ -x & , \text{ für } x < 0. \end{cases}$$

Es ist also z. B. $|-7| = 7 = |7|$. Stets ist $|x| \geq 0$ und es gilt gemäß Definition

$$|x| = 0 \iff x = 0.$$

Trivialerweise ist auch immer $x \leq |x|$ und $-x \leq |x|$.
Ferner haben wir für $r > 0$

$$|x| < r \iff -r < x < r \iff x < r \quad \text{und} \quad x > -r \tag{1.3}$$

$$|x| > r \iff x > r \quad \text{oder} \quad x < -r\,, \tag{1.4}$$

vgl. Abb. 1.2. Dies gilt analog auch mit „$\leq$“ bzw. “$\geq$“ statt „$<$“ bzw. „$>$“.

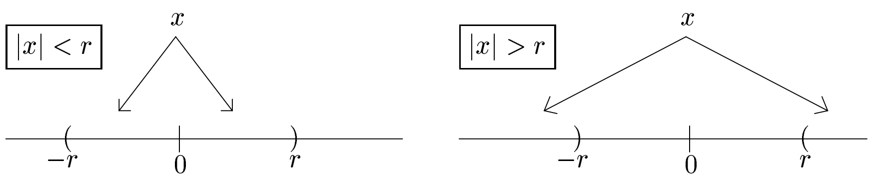


Abb. 1.2. Die Lage der Zahlen x mit $|x| < r$ (links) und mit $|x| > r$ (rechts).

Wie wir mit Beträgen rechnen können, sagt der folgende

Satz. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

1. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
2. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $\quad (y \neq 0)$
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$ [Dreiecksungleichung]

*4. $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Beweis. (nur zu 3):
Da stets $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$, ist also nach Lemma in 1.1.3

$$x + y \leq |x| + |y|.$$

Weil auch $-x \leq |x|$ und $-y \leq |y|$, gilt wiederum nach demselben Lemma

$$-(x + y) = -x + (-y) \leq |x| + |y|.$$

Gemäß (1.3) ist also $|x + y| \leq |x| + |y|$. □

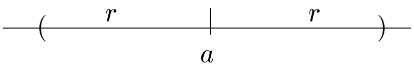
Zur Gültigkeit der Dreiecksungleichung einige numerische

Beispiele. (Anwendung der Dreiecksungleichung)

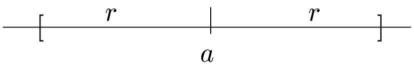
$$\begin{aligned}
8 = |3 + 5| &\leq |3| + |5| = 8 \\
2 = |3 + (-5)| &\leq |3| + |-5| = 8 \\
8 = |(-3) + (-5)| &\leq |-3| + |-5| = 8 \\
2 = |(-3) + 5| &\leq |-3| + |5| = 8\,.
\end{aligned}$$

Als Lösungsmengen von Ungleichungen treten Intervalle auf. In der Tat, für fixierte $a \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ besteht die Menge

$\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x - a| < r\} = (a - r, a + r)$



$\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x - a| \leq r\} = [a - r, a + r]$



aus allen Punkten x, die von a einen Abstand kleiner bzw. kleiner gleich r haben (a ist also der Mittelpunkt und r ist die halbe Länge des Intervalls).

1.1.5 Maximum, Minimum und Schranken

In diesem Abschnitt besprechen wir keine Rechenregeln, sondern lernen Begriffe kennen, die auf der Anordnung von $\mathbb{R}$ aufbauen. Wir suchen nach größten und kleinsten Elementen einer Teilmenge M von $\mathbb{R}$ und definieren Maximum und Minimum. Im Anschluss kommen wir auf die Begriffe der oberen und unteren Schranke zu sprechen.

Als Einstieg bemerken wir, dass sich der Betrag $|x|$ einer Zahl $x \in \mathbb{R}$ auch schreiben lässt als

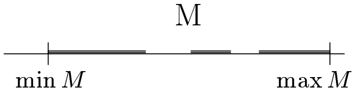
$$|x| = \max\{x, -x\},$$

wobei $\max\{a, b\}$ die größere der beiden Zahlen a und b bezeichnet, genauer:

$$\max\{a, b\} := \begin{cases} a & , \text{ falls } a \geq b \\ b & , \text{ falls } a < b. \end{cases}$$

Allgemein definiert man:

Definition 1. Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge.



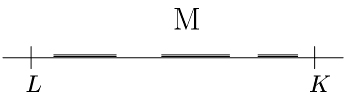
Eine Zahl $\begin{Bmatrix} b \in M \\ a \in M \end{Bmatrix}$ heißt $\begin{Bmatrix} \text{größtes} \\ \text{kleinstes} \end{Bmatrix}$ Element von M oder auch $\begin{Bmatrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{Bmatrix}$ von M, geschrieben $\begin{Bmatrix} b = \max M \\ a = \min M \end{Bmatrix}$, falls $\begin{Bmatrix} x \leq b \\ a \leq x \end{Bmatrix}$ für alle $x \in M$.

Wichtig ist bei dieser Definition, dass Maximum und Minimum zur Menge M gehören müssen.

Beispiele. **1.** Für die Menge (das Intervall) $M := [0, 1]$ ist $\min M = 0$ und $\max M = 1$.

2. Für die Menge $M := \{-3, -4.2, \pi, 17\}$ ist $\min M = -4.2$ und $\max M = 17$.

Definition 2. Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge.



1. M heißt nach $\begin{Bmatrix} \text{oben} \\ \text{unten} \end{Bmatrix}$ beschränkt, wenn es eine Zahl $\begin{Bmatrix} K \\ L \end{Bmatrix}$ gibt mit $\begin{Bmatrix} x \leq K \\ L \leq x \end{Bmatrix}$ für alle $x \in M$. Die Zahl $\begin{Bmatrix} K \\ L \end{Bmatrix}$ heißt eine $\begin{Bmatrix} \text{obere} \\ \text{untere} \end{Bmatrix}$ Schranke.

2. M heißt beschränkt, falls es nach oben und nach unten beschränkt ist. Anderenfalls heißt M unbeschränkt.

Existiert also das Maximum bzw. Minimum einer Menge, so ist sie insbesondere beschränkt. Das Umgekehrte braucht nicht zu gelten.

***Beispiel und Bemerkung**. Die Menge (das offene Intervall) $M := (0,1)$ hat weder ein größtes noch ein kleinstes Element. Es existieren also weder $\max M$ noch $\min M$. M ist nach oben und nach unten beschränkt, z. B. mit der oberen Schranke 1 und der unteren Schranke 0. Die Zahl 1 ist sogar die kleinste obere Schranke (man spricht von einem *Supremum*) und 0 die größte untere Schranke (*Infimum*). Tatsächlich hat jede beschränkte (nicht leere) Menge $M \subset \mathbb{R}$ ein Supremum und ein Infimum.

Zum Abschluss noch eine Rechenregel für den Zusammenhang zwischen Maximum und Minimum.

Bemerkung. Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge, für die $\max M$ und $\min M$ existiert. Setzen wir $-M := \{-x \,:\, x \in M\}$, so gilt $\max M = -\min(-M)$.

Beispiel. Sei $M := [-1,2]$. Dann ist $-M = [-2,1]$ und $\max M = 2 = -(-2) = -\min(-M)$.

1.1.6 Potenzen und Wurzeln

In diesem Abschnitt gibt es wieder mehr zu „rechnen“. Wir definieren Potenzen und Wurzeln.

Definition. Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a^n := \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n-mal} \qquad [a^0 := 1]$$

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n} \qquad \text{(nur für } a \neq 0).$$

Insbesondere haben wir jetzt

$$a^{-1} := \frac{1}{a}$$

definiert. Ein Ausdruck der Form a^p heißt Potenz; a heißt Basis, p heißt Exponent. Die Basis $a \in \mathbb{R}$ darf beliebig gewählt werden (eventuell mit der Einschränkung $a \neq 0$ oder $a \geq 0$), als Exponenten betrachten wir zunächst nur ganzzahliges p. Erst später, in 2.4.1, verallgemeinern wir die Definition von a^p auf reellwertiges p (dann bei $a > 0$).

Man beachte, dass aus der Definition für alle $a \neq 0$ und $z \in \mathbb{Z}$

$$a^z = \frac{1}{a^{-z}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-z}$$

folgt; zum Beispiel ist

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}\,, \quad a^3 = \frac{1}{a^{-3}}\,, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4\,, \quad 3^{-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \quad \text{usw.}$$

Wir haben die äußerst wichtigen

Rechenregeln (für Potenzen).

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ (ggf. $\neq 0$) und $z, z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

1. $(a \cdot b)^z = a^z \cdot b^z$ $\quad\quad \left(\frac{a}{b}\right)^z = \frac{a^z}{b^z}$
2. $a^{z_1} \cdot a^{z_2} = a^{z_1+z_2}$
3. $\left(a^{z_1}\right)^{z_2} = a^{z_1 \cdot z_2}$.

Beweis. Einfaches Anschreiben und Umklammern, z.B. ist (bei $z = 3$ bzw. $z_1 = 2, z_2 = 3$)

$$(a \cdot b)^3 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = a^3 \cdot b^3.$$
$$a^2 \cdot a^3 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^5 = a^{2+3}$$
$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^6 = a^{2 \cdot 3}\,. \qquad \square$$

Beispiele.

1. $(2^3)^4 = 2^{12}, \quad (-a)^5 = (-1)^5 \cdot a^5 = -a^5, \quad a^{3n-1} \cdot a^{n+1} = a^{4n}$,
$10^{-3} = 1/1000 = 0.001$. Dagegen gilt die Ungleichung $(2^3)^4 \neq 2^{(3^4)}$.

2. Die Angabe 1 Liter Niederschlag pro m^2 bedeutet eine Niederschlags-Höhe von 1 mm. In der Tat,

$$\frac{1\,l}{1\,m^2} = \frac{100 \cdot 100 \cdot 100 \;\; mm^3}{1000 \cdot 1000 \;\; mm^2} = \frac{10^6}{10^6}\, mm = 1\, mm.$$

Etwas komplizierter ist die Formel für $(a+b)^n$, die sog. binomische Formel, die wir erst in 1.2.2 herleiten werden.

Der folgende Satz ermöglicht es, für $b > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung
$$x^n = b$$
nach x aufzulösen.

Satz und Definition. Seien $b > 0$ und $n \in \mathbb{N}$.

Dann gibt es genau eine reelle Zahl $x > 0$, so dass $x^n = b$ gilt.

Diese Zahl x heißt n-te Wurzel aus b und wird mit $\sqrt[n]{b}$ bezeichnet (oder auch mit $b^{\frac{1}{n}}$, siehe 2.4.1). Bei $n = 2$ schreibt man auch nur $\sqrt{b}$ statt $\sqrt[2]{b}$ und spricht kurz von der Wurzel aus b.

Wir setzen noch $\sqrt[n]{0} := 0$ und haben damit $\sqrt[n]{b}$ für alle $b \geq 0$ eingeführt.

***Beweis.** Die Existenz der n-ten Wurzel erhält man auf zwei Wegen.

1. Man setzt x an als die kleinste obere Schranke (Supremum) der Menge $M := \{y \in \mathbb{R} \, : \, y^n \leq b\}$, vgl. 1.1.5. Dann gilt $x^n = b$.

2. Man definiert x als „Grenzwert einer Folge“, wie es in 2.4.1 geschehen wird.

Die Eindeutigkeit der n-ten Wurzel folgt aus der Tatsache, dass für $0 \leq x_1 < x_2$ nach (R9) in 1.1.3 auch $x_1^n < x_2^n$ gilt. □

Zusammengefasst gilt $\quad x^n = b \iff x = \sqrt[n]{b}.$

Die n-te Wurzel $\sqrt[n]{b}$ ist nur für $b \geq 0$ definiert und ist stets ≥ 0.

Beispiele. Es ist

$$\sqrt{25} = 5 \qquad \sqrt[3]{8} = 2$$
$$\sqrt{(-3)^2} = 3 \qquad \sqrt[3]{-8} \text{ ist } \underline{\text{nicht}} \text{ definiert.}$$

Die Rechenregeln für Potenzen übertragen sich auf Wurzeln.

Rechenregeln (für Wurzeln).

Seien $a, b > 0$ und $n, m \in \mathbb{N}$. Dann gilt

1. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

*2. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n \cdot m]{b} \qquad$ insbesondere $\qquad \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^n}$.

Beispiele. Es ist also

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{5}$$
$$\sqrt[8]{4} = \sqrt[4]{\sqrt[2]{4}} = \sqrt[4]{2}$$
$$\sqrt[6]{8} \cdot \sqrt{8} = \sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[6]{8^3} = \sqrt[6]{8^4} = \sqrt[6]{2^{12}} = \left(\sqrt[6]{2^6}\right)^2 = 2^2 = 4.$$

$\boxed{\text{MAPLE}}$ Rechnen mit Potenzen und Wurzeln.

```
2^12;2^(-10)=evalf(2^(-10),8);sqrt(20); evalf(root[6](2^12));
```

Anwendung. Gravitation.

Das Gesetz der Gravitation zwischen den Massen M und m_0 lautet

$$F = \gamma \cdot \frac{M \cdot m_0}{r^2}, \qquad \gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \left[\frac{m^3}{kg \cdot sec^2}\right].$$

Mit der Erdmasse $M = 5.97 \cdot 10^{24}$ kg und dem Erdradius $r = 6.37 \cdot 10^6$ m lässt sich die Konstante g der Erdbeschleunigung, die in dem Gesetz

$F = g \cdot m_0$ auftritt, wie folgt berechnen: Einsetzen von M, r und γ in das Gravitationsgesetz liefert

$$F = 6.67 \cdot \frac{5.97}{6.37^2} \cdot 10^{-11} \cdot 10^{24} \cdot 10^{-12} \cdot m_0 = 0.9813 \cdot 10^{24-23} \cdot m_0 = 9.813 \cdot m_0 \, .$$

Also ist $g = 9.813$, und zwar in den Einheiten $\frac{m^3}{kg \cdot sec^2} \cdot \frac{kg}{m^2} = \frac{m}{sec^2}$.

1.2 Binomialkoeffizient

Aus der Schule ist die Gleichung

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

unter dem Namen binomische Formel bekannt. Unser Ziel ist es nun, diese zu verallgemeinern und eine „binomische Formel“ für $(a+b)^n$ bei beliebigem $n \in \mathbb{N}_0$ anzugeben. Um diesen „binomischen Lehrsatz“ formulieren zu können, benötigen wir die Begriffe Binomialkoeffizient und Fakultät.

1.2.1 Fakultät und Binomialkoeffizient

Wir beginnen mit der Definition von Fakultäten.

Definition. Für $n \in \mathbb{N}$ wird die Zahl $n!$ definiert als

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \qquad \text{[gelesen } n \text{ Fakultät].}$$

$n!$ ist also das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen. Man setzt noch $0! := 1$.

Die nächste Tabelle zeigt, dass $n!$ sehr schnell wächst.

$$\begin{array}{rlrl}
0! = 1 & = 1 & 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 & = 720 \\
1! = 1 & = 1 & 7! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 7 & = 5040 \\
2! = 1 \cdot 2 & = 2 & 8! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 8 & = 40320 \\
3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 & = 6 & 9! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 9 & = 362880 \\
4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 & = 24 & 10! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 10 & = 3628800 \\
5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 & = 120 & &
\end{array}$$

Es ist bereits $20! > 10^{18}$, $50! > 10^{64}$ und $100! > 10^{157}$, und in der Tat wächst $n!$ sogar noch schneller als 10^n.

MAPLE

```
seq(print(n!), n=0..20);
'100!'> 10^evalf(log[10](100!));
```

Für die Fakultät $n!$ gibt es die (auch für die Berechnung) wichtige Rekursionsformel

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)\ , \qquad n \in \mathbb{N}_0 \qquad [0! = 1].$$

Mit Hilfe der Fakultät definieren wir den Binomialkoeffizienten.

Definition. Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ und $k \leq n$ ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ definiert als

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \qquad [\text{gelesen } n \text{ über } k].$$

Für $k > n$ setzt man $\binom{n}{k} := 0$. Spezialfälle sind

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1 \qquad \text{und} \qquad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1. \tag{1.5}$$

Als **Rechenformel** ist oft die Gleichung

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$$

nützlich, zumal sich in der Regel einige Faktoren kürzen lassen.

Beispiele.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35, \qquad \binom{12}{4} = \frac{12!}{8! \cdot 4!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495\,.$$

Diese ersten Beispiele lassen vermuten, dass $\binom{n}{k}$ stets eine natürliche Zahl ist. Dies ist auch der Fall (siehe Ende von 1.2.1), aus der Definition allerdings zunächst nicht ersichtlich. Sofort sieht man jedoch

Lemma 1. Für $k, n \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$, ist

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{1.6}$$

Es gilt also $\binom{7}{0} = \binom{7}{7}$, $\binom{7}{1} = \binom{7}{6}$, $\binom{7}{2} = \binom{7}{5}$ usw.

Wichtig ist die folgende Rekursionsgleichung.

Lemma 2. Für $k, n \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$ ist

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}. \tag{1.7}$$

Beweis. Durch Erweitern mit $k+1$ bzw. mit $n-k$ hat man (für $k<n$)

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} = \frac{n!\cdot(k+1)}{(n-k)!\cdot k!\cdot(k+1)} + \frac{n!\cdot(n-k)}{(n-k-1)!\cdot(k+1)!\cdot(n-k)}$$
$$= \frac{n!\cdot(k+1)}{(n-k)!\cdot(k+1)!} + \frac{n!\cdot(n-k)}{(n-k)!\cdot(k+1)!}$$
$$= \frac{n!\cdot(k+1+n-k)}{(n-k)!\cdot(k+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-(k+1))!\cdot(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}. \qquad \square$$

Gleichung (1.7) kann besonders gut veranschaulicht werden, wenn man die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}, n=0,1,2,3,...,\ k=0,1,...,n$, auf folgende Weise in Dreiecksform anordnet

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
n & k\longrightarrow & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
\downarrow & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
 & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array} \tag{1.8}$$

In diesem sog. Pascalschen Dreieck ist also $\binom{n}{k}$ der $(k+1)$-te Eintrag von links in der $(n+1)$-ten Zeile von oben (die Numerierung beginnt jeweils bei $n=0$ und $k=0$, n läuft nach unten, k nach rechts).

Nach (1.7) ist nun jeder Binomialkoeffizient im „Innern“ des Dreiecks die Summe der beiden Binomialkoeffizienten direkt links und rechts über ihm.

$$\begin{array}{ccc}
\binom{5}{2} & + & \binom{5}{3} \\
\searrow & = & \swarrow \\
 & \binom{6}{3} &
\end{array}$$

MAPLE

```
Binomial(6,3) = binomial(5,2)+binomial(5,3);
a:= binomial(6,k); seq(a,k=0..6);
```

Um das Pascalsche Dreieck (1.8) mit konkreten Zahlenwerten anzuschreiben, ist es nicht nötig, die Binomialkoeffizienten gemäß ihrer Definition zu berechnen. Es reicht zu wissen, dass nach (1.5) „außen an den Seiten“ immer die 1 steht; damit baut sich das Dreieck rekursiv von oben nach unten unter Verwendung von (1.7) auf.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & & & \vdots & & & & & \end{array} \tag{1.9}$$

Die nächste Zeile, also $\binom{6}{k}$, $k = 0, 1, ..., 6$, würde sich aus der letzten ergeben als

$$1 \qquad 6 \qquad 15 \qquad 20 \qquad 15 \qquad 6 \qquad 1$$

usw. Jetzt sieht man auch, dass $\binom{n}{k}$ eine natürliche Zahl ist, d. h. $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$, mit $k \leq n$.

Zur Herleitung einer binomischen Formel für $(a+b)^n$ ist das Pascalsche Dreieck von großer Bedeutung.

1.2.2 Der binomische Lehrsatz

Im Folgenden wird, parallel zur Langform $a_1 + \ldots + a_n$ der Summenschreibweise, auch das Summenzeichen in der Form $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ eingeübt; vgl. den Exkurs 1.4.1 am Ende des Kapitels.

Wie man bereits nach Ausmultiplizieren von $(a+b)^n$ für $n = 0, 1, ..., 5$, nämlich

$$\begin{aligned} (a+b)^0 &= 1 \\ (a+b)^1 &= 1a + 1b \\ (a+b)^2 &= 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\ (a+b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\ (a+b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4 \\ (a+b)^5 &= 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5 \, , \end{aligned} \tag{1.10}$$

erkennt, wird es sich bei der binomischen Formel für $(a+b)^n$ um eine Summe mit $n+1$ Summanden handeln, und zwar von der folgenden Form

$$\begin{aligned} (a+b)^n = \; & c_{n,0} \cdot a^n \, b^0 \; + \; c_{n,1} \cdot a^{n-1} \, b^1 \; + \; c_{n,2} \cdot a^{n-2} \, b^2 \; + \; ... \; + \; c_{n,n-1} \cdot a^1 \, b^{n-1} \\ & + \; c_{n,n} \cdot a^0 \, b^n \; \equiv \; \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} \cdot a^{n-k} \, b^k \, , \end{aligned}$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten $c_{n,0}, c_{n,1}, ..., c_{n,n} \in \mathbb{R}$. Dies folgt im Wesentlichen aus der Rekursionsformel

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b).$$

Mit ihrer Hilfe identifiziert man ebenfalls $c_{n,0}, c_{n,1}, ..., c_{n,n}$ als die Zahlen in der $(n+1)$-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks. In der Tat, lässt man in (1.10) die Potenzen und das „+“ Zeichen weg, so steht das Pascalsche Dreieck (1.9) da. Aus (1.8) schließt man dann für die Zahlen $c_{n,k}$, dass

$$c_{n,k} = \binom{n}{k}, \qquad n = 0,1,2,...,\ k = 0,1,...,n,$$

gilt. Damit haben wir also unsere allgemeine binomische Formel wie folgt.

Satz. (Binomischer Lehrsatz) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(a+b)^n = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \cdot a^n\, b^0 + \underbrace{\binom{n}{1}}_{n} \cdot a^{n-1}\, b^1 + ... + \underbrace{\binom{n}{n-1}}_{n} \cdot a^1\, b^{n-1} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{1} \cdot a^0\, b^n$$

$$\equiv \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k}\, b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k\, b^{n-k}$$

(Die letzte Gleichheit ergibt sich sofort durch Vertauschung von a und b).

Folgerungen. Es ist für $n \in \mathbb{N}_0$

1. $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \equiv 1 + n \cdot x + \binom{n}{2} \cdot x^2 + \ldots + n \cdot x^{n-1} + x^n$

   [das ist die 2.te Form des Binomischen Lehrsatzes]

2. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \equiv \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = 2^n$

*3. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \equiv \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + - ... \pm \binom{n}{n} = 0$

*4. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$

5. $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$ für alle $x \geq -1$ [Bernoullische Ungleichung].

Beweis. Setze im binomischen Lehrsatz
1. $a = 1$ und $b = x$ 2. $a = b = 1$ 3. $a = 1$, $b = -1$ 4. $a = 1-x$, $b = x$
5. Folgt für $x \geq 0$ direkt aus 1.
* Für $x \geq -1$ ist die Ungleichung durch vollständige Induktion nachzuweisen, vgl. den Exkurs 1.4.2 unten. □

MAPLE
```
expand((x+y)^6);
```

Auch folgende Gleichung rechnet man zu den binomischen Formeln

$$(a+b)\cdot(a-b) \;=\; a^2-b^2.$$

Eine Verallgemeinerung hiervon ist (vgl. 1.5, Aufg. 2)

$$\begin{aligned} a^n-b^n \;&=\; \left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)\cdot(a-b) \\ &\equiv\; \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}\cdot b^k\right)\cdot(a-b)\,, \end{aligned}$$

woraus sich im Spezialfall $a=1$, $b\neq 1$ die folgende Formel ergibt

$$\sum_{k=0}^{n-1} b^k \;=\; \frac{1-b^n}{1-b}\,. \tag{1.11}$$

1.3 Kombinatorik

Die Kombinationslehre befasst sich mit dem Herausnehmen von Elementen aus einer Menge von n Stück und der Zusammenstellung der herausgenommenen Elemente zu k Stück. Sie fragt nach der Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, dies zu tun. Dabei werden wir unterscheiden, ob (i) in der Zusammenstellung Wiederholungen von gleichen Elementen vorkommen dürfen oder nicht und ob (ii) die Reihenfolge, in der die Zusammenstellung der Elemente erfolgt, berücksichtigt wird oder nicht.

Hilfreich ist oft das Urnenmodell: Aus einer Urne, in der n unterscheidbare Elemente (z. B. nummerierte Kugeln) liegen, werden k Stück herausgenommen (gezogen). Hier laufen die oben gemachten Unterscheidungen darauf hinaus,

ob (i) nach jedem Zug das gezogene Element zurückgelegt wird (Ziehen mit Zurücklegen) oder nicht und

ob (ii) die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, von Belang ist oder nicht.

In der folgenden Übersicht sind Situationen (Spiele) aufgeführt, in denen man die geschilderten 2×2 Fälle antrifft.

Berücksichtigung der Reihenfolge	Wiederholung von Elementen mit (Ziehen mit Zurücklegen)	Wiederholung von Elementen ohne (Ziehen ohne Zurücklegen)
mit	Toto	aufgestellte Bücher „vertauschen“
ohne	„Lotto mit Zurücklegen“	Lotto

Die Kombinatorik-Probleme der oberen Zeile nennt man *Permutations*-Probleme, die in der unteren Zeile Probleme der *Kombination*.

1.3.1 Permutationen

Sind n unterscheidbare Elemente $A_1, \dots, A_n$ gegeben, so nennt man jede Anordnung von k Stück aus ihnen eine Permutation (Der Begriff Anordnung besagt, dass die Reihenfolge von Bedeutung ist). Je nachdem, ob in der Anordnung Wiederholungen des gleichen Elements verboten sind oder nicht, sprechen wir von Permutationen von n Elementen zur Klasse k $\left\{\begin{matrix}\text{ohne}\\ \text{mit}\end{matrix}\right\}$ Wiederholungen. Die Anzahl der verschiedenen Permutationen bezeichnen wir mit $P_k(n)$ bzw. mit $P_k^W(n)$,

$$\left.\begin{matrix}P_k(n)\\ P_k^W(n)\end{matrix}\right\} = \text{ Anz. der Perm. von } n \text{ Elementen zur Klasse } k \left\{\begin{matrix}\text{ohne}\\ \text{mit}\end{matrix}\right\} \text{Wiederh.}$$

Beispiel. Für $n = 3$ und $k = 2$ gibt es die $P_2(3) = 6$ Permutationen

$$\begin{matrix} & (A_1, A_2) & (A_1, A_3), & \\ (A_2, A_1) & & (A_2, A_3) & \qquad \text{ohne Wiederholungen,} \\ (A_3, A_1) & (A_3, A_2) & & \end{matrix}$$

und die $P_2^W(3) = 9$ Permutationen

$$\begin{matrix} (A_1, A_1) & (A_1, A_2) & (A_1, A_3) & \\ (A_2, A_1) & (A_2, A_2) & (A_2, A_3) & \qquad \text{mit Wiederholungen.} \\ (A_3, A_1) & (A_3, A_2) & (A_3, A_3) & \end{matrix}$$

Eine allgemeine Formel für $P_k(n)$ und $P_k^W(n)$ bietet der folgende

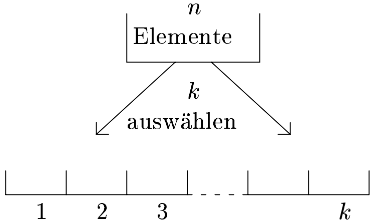
Satz. Die Anzahl der Permutationen von n Elementen zur Klasse k

$$\left.\begin{matrix}\text{ohne}\\ \text{mit}\end{matrix}\right\} \text{ Wiederholungen ist gleich } \left\{\begin{matrix} P_k(n) = & n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \\ P_k^W(n) = & n^k \end{matrix}\right. ,$$

wobei in der oberen Zeile $k \leq n$ vorausgesetzt wird.

Beweis. Wir legen die k gezogenen Elemente auf k Positionen $1, 2, \dots, k$.

Ohne Wiederholungen: Auf die Position 1 können alle n verhandenen Elemente gelegt werden; dann gibt es für die Belegung der Position 2 noch $n-1$ mögliche Elemente, usw., bis es bei Position k nur noch $n-k+1$ Möglichkeiten gibt.
Mit Wiederholungen: Auf jede der k Positionen können alle n möglichen Elemente gelegt werden. □



Beispiele. **1.** Zahlenschloss. Mit den Ziffern $1, 2, \ldots, 9$ können $P_3^W(9) = 9^3 = 729$ dreiziffrige Zahlen gebildet werden ($k = 3$, $n = 9$). Darf eine Ziffer nicht mehrfach in der Zahl vorkommen, so reduziert sich diese Anzahl auf $P_3(9) = 9{\cdot}8{\cdot}7 = 504$.

[Werden alle 10 Ziffern $0, 1, \ldots, 9$ zur Bildung der Zahl zugelassen, so lauten die Ergebnisse $P_3^W(10) = 10^3 = 1000$ und $P_3(10) = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$].

mit W.			ohne W.		
1	1	1	1	2	3
1	1	2	1	2	4
.	.	.	.	.	.
.	.	.	9	8	6
.	.	.	9	8	7
9	9	8			
9	9	9			

2. Fussballtoto. Bei 11 ausgewählten Spielen ist jeweils einer von 3 Spielausgängen (Gewinn der Heimmannschaft 1, Unentschieden 0, Gewinn der Gastmannschaft 2) zu tippen. Dazu gibt es $P_{11}^W(3) = 3^{11} = 177\,147$ Möglichkeiten.

Nr	Spiel	1	0	2
1	FC A – FC B	x		
2	FC C – FC D			x
3	FC E – FC F	x		
.	... – ...	...	...	...
11	FC U – FC V		x	

Spezialfall $n = k$, ohne Wiederholungen.

Im Fall, dass $n = k$ ist und dass keine Wiederholungen zugelassen sind, spricht man auch von Permutationen von n Elementen schlechthin. Ihre Anzahl beträgt

$$P_n(n) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!\,.$$

Beispiel. Stellt man zehn Bücher auf ein Regal, dann gibt es $10! = 3\,628\,800$ verschiedene Anordnungen. Schon bei 60 Büchern steigt diese Anzahl auf über $8 \cdot 10^{81}$ [Die Anzahl aller (langlebigen) Elementarteilchen dieses Weltalls wird auf 10^{80} geschätzt].

1.3.2 Kombinationen

Sind n unterscheidbare Elemente $A_1, \ldots, A_n$ gegeben, so nennt man jede Auswahl von k Stück aus ihnen eine Kombination (Der Begriff Auswahl besagt, dass die Reihenfolge ohne Belang ist). Je nachdem, ob in der Auswahl Wiederholungen des gleichen Elements verboten sind oder nicht, so sprechen wir von Kombination von n Elementen zur Klasse k $\left\{\begin{matrix}\text{ohne}\\ \text{mit}\end{matrix}\right\}$ Wiederholungen. Die Anzahl der verschiedenen Kombinationen bezeichnen wir mit $C_k(n)$ bzw. mit $C_k^W(n)$,

$$\left.\begin{matrix}C_k(n)\\ C_k^W(n)\end{matrix}\right\} = \text{Anz. der Komb. von } n \text{ Elementen zur Klasse } k \left\{\begin{matrix}\text{ohne}\\ \text{mit}\end{matrix}\right\} \text{Wiederh.}$$

Beispiel. Für $n = 3$ und $k = 2$ gibt es die $C_2(3) = 3$ Kombinationen (A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_2, A_3) ohne Wiederholungen und die $C_2^W(3) = 6$ Kombinationen

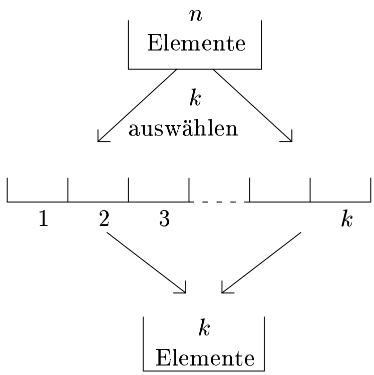
$$\begin{array}{lll} (A_1, A_1) & (A_1, A_2) & (A_1, A_3) \\ & (A_2, A_2) & (A_2, A_3) \\ & & (A_3, A_3) \end{array} \qquad \text{mit Wiederholungen.}$$

Eine allgemeine Formel für $C_k(n)$ und $C_k^W(n)$ bietet der folgende

Satz. Die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur Klasse k

$$\left.\begin{array}{c}\text{ohne}\\ \text{mit}\end{array}\right\} \text{Wiederholungen ist gleich} \left\{\begin{array}{ll} C_k(n) = \binom{n}{k} & [k \leq n] \\ C_k^W(n) = \binom{n+k-1}{k} & \end{array}\right. .$$

Beweis. Ohne Wiederholungen: Nach 1.3.1 gibt es zunächst $P_k(n)$ Permutationen von n Elemente auf k Positionen.



Die Anzahl der möglichen Reihenfolgen der k gezogenen Elemente ist jedesmal $P_k(k)$, so dass sich

$$C_k(n) = \frac{P_k(n)}{P_k(k)} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

ergibt.

Mit Wiederholungen: Der Beweis ist schwieriger und wird nicht gebracht. □

Beispiel. Zahlenlotto.

Beim Lotto werden aus einer Trommel mit 49 Zahlen (Kugeln) ohne Zurücklegen 6 Zahlen gezogen. Die Anzahl der möglichen Ziehungen beträgt

$$C_6(49) = \binom{49}{6} = 13\,983\,816 .$$

(Dass dem Publikum die Zahlen in aufsteigender Größe präsentiert werden, ist gerade ein Indiz dafür, dass die Reihenfolge der gezogenen Kugeln keine Rolle spielt).

Würde nach jedem Zug die gezogene Kugel zurückgelegt („Lotto mit Zurücklegen"), so gäbe es mit

$$C_6^W(49) = \binom{49+5}{6} = \binom{54}{6} = 25\,827\,165$$

fast doppelt so viele Möglichkeiten.

Eine Zusammenfassung der kombinatorischen Formeln bietet die Tabelle 1.2. Sie differenziert nach den Alternativen „mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge" und „mit/ohne Wiederholungen von Elementen".

Tabelle 1.2 Kombinatorische Formeln

Berücksichtigung der Reihenfolge	Wiederholung von Elementen mit	ohne
mit	$P_k^W(n) = n^k$	$P_k(n) = n(n-1)\dots(n-k+1)$
ohne	$C_k^W(n) = \binom{n+k-1}{k}$	$C_k(n) = \binom{n}{k}$

Anwendung. DNA-Sequenz.

Die Erbsubstanz ist aus 4 elementaren Basen `A, T, G, C` aufgebaut, wobei `A-T` sowie `G-C` jeweils ein Paar bilden. Die beiden Stränge eines DNA-Moleküls sind komplementär zueinander;

d. h., ein `A` auf dem einen ist mit einem `T` auf dem anderen Strang verbunden (Gleiches für die Bausteine `G` und `C`). Die beiden Stränge sind unterscheidbar.

1.Strang:	`GATTCTG...`
2.Strang:	`CTAAGAC...`

Ein (fiktiver) Doppelstrang bestehe aus 30 Basenpaaren, nämlich aus 15 Paaren `A-T` und aus 15 Paaren `G-C`. Wieviele solcher Doppelstränge sind möglich? Wir lösen die Aufgabe in zwei Schritten. (i) Im ersten Schritt werden die Paare auf die 30 Plätze verteilt. (ii) Im zweiten Schritt wird berücksichtigt, welche der zwei Basen eines Paares jeweils auf den 1. Strang kommt.

(i) Für die 15 `A-T` Paare stehen 15 aus 30 Plätzen des Stranges zur Verfügung (Die 15 `G-T` Paare nehmen dann die anderen 15 Plätze ein). Die Anzahl ist

$$C_{15}(30) = \binom{30}{15} = \frac{30!}{15! \cdot 15!} \approx 1.551 \cdot 10^8 \qquad \text{[ca. 155 Millionen].}$$

(ii) Da es zwei unterscheidbare Stränge gibt (Strang 1 und Strang 2), gibt es bei *jedem* der 30 Paare (`A-T` bzw. `G-C`) die Alternativen `A` auf Strang 1 oder auf Strang 2 (bzw. `G` auf Strang 1 oder 2). Dies beläuft sich auf

$$P_{30}^W(2) = 2^{30} \approx 1.074 \cdot 10^9 \qquad \text{[ca. 1 Milliarde]}$$

Möglichkeiten. Insgesamt haben wir also

$$2^{30} \cdot C_{15}(30) \approx 1.665 \cdot 10^{17} \quad \text{verschiedene solcher Doppelstränge.}$$

1.4 Exkurse

1.4.1 Summenzeichen, Produktzeichen

Um Summen und Produkte mit mehreren Summanden bzw. Faktoren griffig und übersichtlich darstellen zu können, erweist sich die folgende Konvention über das Summen- bzw. Produktzeichen als hilfreich.

Definition. Sind die Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ gegeben, so schreibt man für ihre Summe

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + ... + a_n$$

und für ihr Produkt

$$\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n \, .$$

Es ist also zum Beispiel

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{i} \;=\; \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \qquad \sum_{i=1}^{6} (-1)^i \;=\; -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{5} 7 \;=\; 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35 \qquad \prod_{i=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot ... \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \, .$$

Wir haben die folgenden

Rechenregeln. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gilt

1. $\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i) \;=\; \sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$
2. $\sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda \cdot a_i) \;=\; \lambda \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$
3. $\sum\limits_{i=1}^{m} \Big(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \Big) \;=\; \sum\limits_{j=1}^{n} \Big(\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} \Big).$

Die Regel 3 besagt: Sollen alle Zahlen eines rechteckigen Schemas

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

aufsummiert werden, so ist es egal, ob dies zeilenweise oder spaltenweise geschieht. Der Indexbereich von Summen und von Produkten kann auch ein anderer sein als $1, 2, \dots, n$. Zum Beispiel

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \;=\; a_0 + a_1 + \ldots + a_n \, , \qquad \sum_{i=-3}^{n+2} a_i \;=\; a_{-3} + a_{-2} + \ldots + a_{n+1} + a_{n+2} \, .$$

Wir sprechen von einer Teleskopsumme, wenn eine Differenz $a_{n+1} - a_1$ zweier Zahlen durch (sich aufhebende) Zwischensummanden aufgebläht wird; das heißt

$$a_{n+1} - a_1 = \sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i)\,.$$

Entsprechend ist $\prod\limits_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_{n+1}}{a_1}$ ein Teleskopprodukt $(a_1, \ldots, a_n \neq 0)$.

1.4.2 *Vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist ein Beweisprinzip:
Für jedes $n \in \mathbb{N}_0, n \geq n_0$ mit $n_0 \in \mathbb{N}_0$ fest, sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Um nachzuweisen, dass die Aussage $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ richtig ist, genügt es zu zeigen:

a) $A(n_0)$ ist richtig (Induktionsanfang)

b) Für alle $n \geq n_0$ gilt:
Ist $A(n)$ richtig, so auch $A(n+1)$. (Induktionsschluss)

Wir demonstrieren dieses Vorgehen an einem

Beispiel. $A(n)$ sei die Aussage $(n \in \mathbb{N})$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Wir beweisen durch vollständige Induktion, dass $A(n)$ für alle $n \geq 1$ richtig ist:

a) Induktionsanfang $n = 1$: Durch Einsetzen sieht man sofort, dass $A(1)$ richtig ist.

b) Induktionsschluss von n auf $n+1$: Sei $n \geq 1$ und gelte $A(n)$, also $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \underset{A(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

also gilt $A(n+1)$. $\square$

Vielen Beweisen liegt das Prinzip der vollständigen Induktion zugrunde, ohne dass explizit darauf eingegangen wird. Auch unsere Argumentation beim Beweis des Binomischen Lehrsatzes oder der Tatsache, dass $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$, beruhte auf diesem Induktionsprinzip.

Eng verwandt mit der vollständigen Induktion ist die

rekursive Definition. Auch hiervon hatten wir bereits Gebrauch gemacht, etwa in 1.1.6 bei der Definition von $a^n \;:=\; \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n-mal}$, die rekursiv aufgeschrieben, so lautet:

$$\begin{aligned} a^0 &:= 1 \\ a^{n+1} &:= a^n \cdot a \qquad \text{für } n \geq 0. \end{aligned}$$

1.5 Aufgaben

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Gegeben positive reelle Zahlen a und b. Ausgangspunkt der Teilaufgaben a) und b) ist ein Quadrat Q der Seitenlänge $a+b$.

a) Man unterteile das Quadrat Q in der Weise, dass sich ein geometrischer Nachweis der folgenden Formel ergibt:

$$(a+b)^2 \;=\; a^2 + 2\,a\,b + b^2\,.$$

b) Es bezeichne c die Seitenlänge der Hypotenuse in dem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten-Längen a und b. Zeichne in das Quadrat Q ein Quadrat der Seitenlänge c ein, so dass sich ein geometrischer Nachweis des Satzes von Pythagoras ergibt, das ist

$$c^2 \;=\; a^2 + b^2\,.$$

$\boxed{\mathbf{2.}}$ Betrachte für reelle Zahlen a $\neq$ b und für $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1}\,. \tag{1.12}$$

[Für $n = 1$ liest sich die rechte Seite von (1.12) als 1, für $n = 2$ als $a + b$, usw.]

a) Schreibe die Formel (1.12) aus für $b = 1$, ebenso für $a = 2,\, b = 1$.

b) Berechne den Ausdruck

$$3^5 + 3^3 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 2^5$$

unter Benutzung der Formel (1.12).

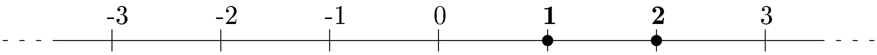
c) Man beweise die Formel (1.12) (ersatzweise kann $n = 5$ gewählt werden).

$\boxed{\mathbf{3.}}$ **a)** Man stelle den Bruch $\frac{130}{33}$ als (periodischen) Dezimalbruch dar.

b) Man stelle den periodischen Dezimalbruch $4{,}3\overline{21}$ als Bruch dar.

4. Man fixiere auf der Zahlengeraden die Punkte **1** und **2**. Bestimme die Menge der reellen Zahlen x, deren Abstand von **1** weniger als $\frac{3}{4}$ ihres Abstandes von **2** beträgt, und zwar in drei Schritten.

(i) Aufstellen einer Ungleichung mit Beträgen
(ii) Lösen der Ungleichung durch Fallunterscheidungen
(iii) Skizzieren der Lösungsmenge auf der Zahlengeraden.



5. Forme den folgenden Ausdruck in die rechts vom Gleichheitszeichen angegebene Gestalt um, wobei z_1, z_2, z_3 ganze Zahlen sind (also aus $\mathbb{Z}$ sind):

$$\frac{a^{-3} \cdot 10^6 \cdot b^7}{10^{-8} \cdot a^{-2} \cdot b^6} = 10^{z_1} \cdot a^{z_2} \cdot b^{z_3} .$$

6. Setze die Funktionen

$$f(x) = 10^{-5} \cdot a^{5/2} \cdot x^4 , \quad g(x) = 10^6 \cdot a^{-3/2} \cdot x^{1/3} , \quad h(x) = 10^2 \cdot a^{-3} \cdot x^{7/3} ,$$

($x > 0$, $a > 0$ eine Konstante) in den folgenden Ausdruck ein und vereinfache diesen dann soweit wie möglich,

$$\sqrt{\frac{f(x) \cdot g(x)}{h(x)}} .$$

7. **a)** Nach dem Muster 1 Zentner $= a \cdot 10^z$ Gramm [g], mit $a = 5$ und $z = 4$, forme man um

(i) 1 Jahr in sec (ii) 1 Lichtjahr in m.

Hinweise: 1 Jahr = 365.25 Tage; das Licht legt in 1 sec (ca.) 300000 km zurück.

b) Man rechne die Gravitationskonstante

$$\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \left[\frac{m^3}{kg \cdot sec^2}\right]$$

um in $\frac{cm^3}{g \cdot min^2}$ (vgl. auch die Anwendung in 1.1.6).

8. Berechne a) – c) unter Zuhilfenahme des binomischen Lehrsatzes

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \binom{5}{k} \cdot 3^k$ **b)** $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} \binom{6}{i} \cdot 3^i \cdot 7^{6-i}$

c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} 4^i - \sum_{i=0}^{4} \binom{5}{i} 2^i \cdot 3^{5-i} .$

9. Man zeige für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$

a) $\frac{1}{m^k}\binom{m}{k} < \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}$ für $k = 2, \ldots, n$

b) $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Hinweis zu a): Benutze $(1-\frac{j}{m}) < (1-\frac{j}{n})$ für $j \geq 1$.

Hinweis zu b): Binomischer Lehrsatz.

10. 6 Buben und 5 Mädchen stellen sich in einer bunten Reihe auf (abwechselnd Bub und Mädchen). Auf wieviele Arten ist dies möglich?

11. Ein Spiel bestehe darin, einen Würfel fünfmal hintereinander zu werfen und die Augenzahlen zu notieren. Gefragt ist in a) und b) nach der Anzahl der möglichen Spielausgänge.

a) Die Reihenfolge der Würfe wird <u>nicht</u> berücksichtigt.
b) Die Reihenfolge der Würfe wird berücksichtigt.

12. **a)** Wieviele verschiedene 11-stellige „Wörter“ kann man mit 7 `A`’s und 4 `B`’s bilden? Beispiel für ein Wort: `BAAABBAABAA`

b) Wieviele verschiedene 11-stellige „Wörter“ kann man mit 6 `A`’s, 3 `B`’s und 2 `C`’s bilden?

13. Ein Student der Freien Universität GeoCity studiert 4 Semester und wählt in jedem Semester aus einem Angebot an verschiedenen Vorlesungen aus.

a) Gemäß Studienordnung wählt der Student im 1. Semester genau 2 Vorlesungen aus 4 angebotenen, im 2. Semester genau 3 Vorlesungen aus 5, im 3. Semester genau 4 Vorlesungen aus 6, im 4. Semester genau 4 aus 7.

Wieviele verschiedene Möglichkeiten hat der Student, sein Studium zu gestalten?

b) Wieviele verschiedene Möglichkeiten hat er, wenn in der Studienordnung anstelle von „genau“ das Wort „mindestens“ steht?

14. Ein Skatspiel besteht aus 32 verschiedenen Karten und wird von 3 Spielern gespielt. Jeder Spieler erhält 10 Karten.

a) Wieviele verschiedene „Blätter“ kann ein Spieler erhalten?

b) Wieviele verschiedene „Blätter“ können an die 3 Spieler ausgeteilt werden?

Hinweise: Ein „Blatt“ besteht aus 10 Karten ohne Berücksichtigung ihrer Reihenfolge. In b) genügt es, eine Formel anzugeben.

15. Acht weiße (ununterscheidbare) Türme werden auf ein (leeres) 8×8 Schachbrett gestellt.

a) Wieviele Möglichkeiten (Stellungen) gibt es?

b) Bei wievielen Stellungen wird kein Turm durch einen anderen „gedeckt"?

Regeln: Auf einem Feld darf höchstens eine Figur stehen. Zwei Türme „decken" sich, wenn sie auf derselben Vertikalen oder derselben Horizontalen stehen.

16. Die Fußballmannschaft 1.FC BIO spielt bekanntlich im 5-3-2 System:

1 Torhüter, 5 Defensivspieler, 3 Mittelfeldspieler, 2 Stürmer.

a) Wieviele verschiedene Möglichkeiten der Aufstellung hat der Trainer, wenn ihm

(*) 3 Torhüter, 9 Defensivspieler, 6 Mittelfeldspieler, 5 Stürmer

zur Verfügung stehen?

b) Gibt es ein D-M-S System (D+M+S=10), das dem Trainer (mit dem Spielerkader (*)) mehr Aufstellungsmöglichkeiten eröffnet als das 5-3-2 System?

Fortlaufende Serie: Mathematik & Praxis (M & P)

17. *M & P:* Zwei lotrechte Türme, jeder der Höhe $H = 330$ m, werden (in Äquatornähe) nebeneinander gebaut. Um wieviel Prozent (auf vier Kommastellen) ist ihr horizontaler Abstand an den Turmspitzen größer als ihr horizontaler Abstand auf dem Boden?

18. *M & P:* Ein quadratisches Grundstück mit der Seitenlänge x [m] ist kontaminiert.

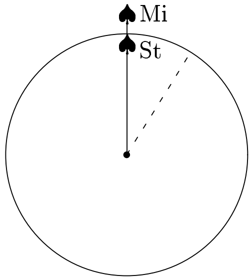
Alternative 1: Die ganze Fläche wird saniert. Kosten 1 EUR pro qm.

Alternative 2: Um die Fläche wird ein Schutzzaun errichtet. Kosten 2 EUR pro lfd m, plus 105 EUR Festkosten für Warntafeln.

Welche Alternative ist (in Abhängigkeit von x) die kostengünstigere?

19. *M & P: Konjunktionen.*

a) Die beiden Zeiger einer Uhr überdecken sich um 12 Uhr. Zu welcher (genauen!) Uhrzeit t_1 stehen sie wieder übereinander?



b) Die Planeten Erde und Venus umlaufen die Sonne einmal in $t_V = 224.70$ bzw. $t_E = 365.25$ (Erd)Tagen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ mögen sie in Konjunktion stehen (d. h.: Venus steht exakt zwischen Erde und Sonne). Berechne den Zeitpunkt t_1 der nächsten Konjunktion.

Annahme: Jeweils kreisförmige Umlaufbahn.