1

Die Problemstellung

Im Jahre 1968 erschien in der ersten Ausgabe der mathematischen Zeitschrift *Linear Algebra and its Applications* ein Artikel von Richard W. Cottle und George B. Dantzig, der eine mathematische Problemstellung behandelt, die lineare und quadratische Programme verallgemeinert sowie das Berechnen eines Nash-Gleichgewichts in einem Zwei-Personen-Spiel ermöglicht.

Diese Problemstellung wurde in jenem Artikel mit *fundamental problem* bezeichnet. Es ist aber überliefert[1], dass Richard W. Cottle bereits 1965 für diese Problemstellung den Begriff *linear complementarity problem* vorgeschlagen hat. Dieser Begriff hat sich nun seit Jahrzehnten etabliert und wird in der Literatur mit LCP abgekürzt. Übersetzen wollen wir den Begriff mit *lineares Komplementaritätsproblem*.

Mittlerweile gibt es viele weitere Problemstellungen, die sich in ein LCP überführen lassen, und es ist Teil dieses Buches, einige dieser Anwendungen im Detail vorzustellen. Der komplementäre Teil des Buches widmet sich der Aufgabe, ein LCP zu lösen.

Was ist aber nun ein LCP?

Gegeben sind eine reelle Matrix

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

und ein reeller Vektor

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

[1] Siehe Notes and References 1.7.1 in [21].

Das lineare Komplementaritätsproblem besteht darin, zwei Vektoren

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

zu finden, die

$$w = q + Mz, \tag{1.1}$$

$$0 = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \ldots + w_n z_n, \tag{1.2}$$

$$w \geq o,\ z \geq o \tag{1.3}$$

erfüllen, oder zu zeigen, dass keine solchen Vektoren existieren. In (1.3) bezeichnet o den Nullvektor, und das $\geq$-Zeichen ist komponentenweise zu verstehen. $z \geq o$ bedeutet also

$$z_1 \geq 0,\ z_2 \geq 0,\ \ldots, z_n \geq 0.$$

Für $w_1 z_1 + w_2 z_2 + \ldots + w_n z_n$ schreibt man $w^{\mathrm{T}} z$. Man schreibt die drei Bedingungen (1.1)-(1.3) auch oft in eine Zeile:

$$w = q + Mz, \quad w^{\mathrm{T}} z = 0, \quad w \geq o,\ z \geq o. \tag{1.4}$$

Machmal wird das LCP auch mit $LCP(q, M)$ abgekürzt, um die Eingangsdaten q und M zu betonen.

Eine alternative Formulierung von $LCP(q, M)$ besteht darin, einen Vektor z zu finden, der

$$q + Mz \geq o, \quad z \geq o, \quad (q + Mz)^{\mathrm{T}} z = 0 \tag{1.5}$$

erfüllt, oder zu zeigen, dass kein solcher Vektor existiert. Beide Formulierungen sind äquivalent im folgenden Sinne: Bilden w und z eine Lösung von (1.4), so ist z eine Lösung von (1.5). Umgekehrt bilden $w := q + Mz$ und z eine Lösung von (1.4), falls z (1.5) löst.

1.1 Zur Namensgebung

Bezeichnet E die Einheitsmatrix, also

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so lässt sich (1.1) schreiben als

$$\left(E \vdots -M\right)\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = q. \tag{1.6}$$

Dies ist ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und $2n$ Unbekannten. Daher der Name *lineares* Komplementaritätsproblem. Der Name *Komplementarität* begründet sich aus folgender Beobachtung: Bilden $w \in \mathbb{R}^n$ und $z \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $LCP(q, M)$, so erfüllen sie insbesondere die Bedingungen (1.2)-(1.3). Daher gilt

$$0 = \underbrace{w_1 z_1}_{\geq 0} + \underbrace{w_2 z_2}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{w_n z_n}_{\geq 0}.$$

Eine Summe aus n Summanden, wobei jeder Summand positiv oder gleich null ist, kann nur dann null ergeben, wenn alle n Summanden den Wert null haben, d.h. es muss gelten

$$w_1 z_1 = 0,\, w_2 z_2 = 0, \ldots, w_n z_n = 0.$$

Für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ gilt somit

$$w_i = 0 \quad \text{oder} \quad z_i = 0.$$

In einem gewissen Sinne sind w_i und z_i daher *komplementär*: Ist $w_i > 0$, so folgt $z_i = 0$; aus $z_i > 0$ folgt umgekehrt $w_i = 0$.

Bilden w und z eine Lösung von $LCP(q, M)$, so kann es auch vorkommen, dass für ein $i \in \{1, ..., n\}$ sowohl $w_i = 0$ als auch $z_i = 0$ gilt. Eine solche Lösung nennt man entartet. Andernfalls nichtentartet.

1.2 Wie man prinzipiell das LCP lösen kann

Die Beobachtungen aus dem letzten Abschnitt geben uns eine Möglichkeit, alle Lösungen von $LCP(q, M)$ zu bestimmen. Die Vektoren $w \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^n$ sind nämlich genau dann eine Lösung von $LCP(q, M)$, wenn sie (1.6) erfüllen mit $w \geq o$, $z \geq o$ und wenn

$$\text{für jedes } i \in \{1, ..., n\} \quad w_i = 0 \quad \text{oder} \quad z_i = 0 \quad \text{gilt.} \tag{1.7}$$

Da also mindestens n der $2n$ Unbekannten den Wert null annehmen müssen, kann man $LCP(q, M)$ mit Hilfe von Fallunterscheidungen in Angriff nehmen. Wir werden dies anhand eines Beispiels erläutern.

Beispiel 1.2.1 Wir betrachten $LCP(q, M)$ mit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad q = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1.6) lautet dann

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

1. Fall: $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $z_3 = 0$. Dann reduziert sich (1.8) zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$w = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \not\geq o, \quad z = o. \tag{1.9}$$

Der 1. Fall führt somit zu keiner Lösung.
2. Fall: $w_1 = 0$, $z_2 = 0$, $z_3 = 0$. Dann reduziert sich (1.8) zu

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$z_1 = 2, \quad w_2 = 7, \quad w_3 = 15.$$

Somit ist

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

eine Lösung von $LCP(q, M)$.
3. Fall: $w_1 = 0$, $w_2 = 0$, $z_3 = 0$. Dann reduziert sich (1.8) zu

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -4 & -5 & 0 \\ -7 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren erhält man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 0 & -2 \\ -4 & -5 & 0 & -1 \\ -7 & -8 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & 1 & 15 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right). \tag{1.11}$$

Es folgt

$$w_3 = 1, \quad z_2 = \frac{7}{3}, \quad z_1 = -\frac{8}{3}.$$

Somit ist

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

eine Lösung von (1.8), aber wegen $z \not\geq o$ keine Lösung von $LCP(q, M)$.
4. Fall: $w_1 = 0$, $w_2 = 0$, $w_3 = 0$. Dann reduziert sich (1.8) zu

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren erhält man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -3 & -2 \\ -4 & -5 & -6 & -1 \\ -7 & -8 & -9 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 6 & 12 & 15 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{1.13}$$

In diesem Fall (d.h. falls $w = o$) besitzt (1.8) keine Lösung und somit auch nicht $LCP(q, M)$.
Die restlichen vier Fälle liefern keine weitere Lösung von $LCP(q, M)$. Die entsprechenden Rechnungen seien als Übung empfohlen. □

Wir wollen die Vorgehensweise in Beispiel 1.2.1 allgemein beschreiben und dabei einige Definitionen einführen. $LCP(q, M)$ hat $2n$ Unbekannte

$$w_1, w_2, \dots w_n, z_1, z_2, \dots z_n, \tag{1.14}$$

die auch oft Variablen genannt werden. Das Variablenpaar (w_i, z_i) nennt man das i-te komplementäre Variablenpaar mit $i \in \{1, ..., n\}$. Bilden die Variablen (1.14) eine Lösung von $LCP(q, M)$, so hat in jedem der n komplementären Variablenpaaren (w_i, z_i) mindestens eine Variable den Wert null. Diese Variable nennt man Nichtbasisvariable, die dazu komplementäre Variable nennt man Basisvariable. Aus den n komplementären Variablenpaaren

$$(w_1, z_1),\ (w_2, z_2), \dots, (w_n, z_n)$$

wählt man jeweils eine Variable als Basisvariable, im Falle $n = 4$ beispielsweise

$$('w_1', 'z_2', 'z_3', 'w_4').$$

Dies nennen wir Basisvariablenfeld. Ein Basisvariablenfeld ist also ein n-dimensionales Array (auf Deutsch: Feld), welches als i-ten Eintrag das Symbol $'w_i'$ oder $'z_i'$ besitzt.

Es definiert ein lineares Gleichungssystem

$$Cx = q, \quad C \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.15}$$

durch

$$C_{\cdot j} := \left\{ \begin{array}{r} E_{\cdot j} \text{ falls } w_j \text{ Basisvariable ist,} \\ -M_{\cdot j} \text{ falls } z_j \text{ Basisvariable ist,} \end{array} \right\} \quad j = 1, ..., n.$$

Ist die Matrix C regulär, so nennt man C eine Basis und falls $x := C^{-1}q \geq o$ gilt, hat man eine Lösung von $LCP(q, M)$ gefunden, wie in Beispiel 1.2.1 erläutert wurde.

Um alle Lösungen von $LCP(q, M)$ zu bestimmen, löst man all die linearen Gleichungssysteme (1.15), die durch sämtliche Basisvariablenfelder definiert werden.

Lemma 1.2.1 *Für $LCP(q, M)$, $q \in \mathbb{R}^n$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt es 2^n verschiedene Basisvariablenfelder.*

Beweis: Für $n = 1$ gibt es $2^1 = 2$ Basisvariablenfelder $('w_1')$ und $('z_1')$. Für den Induktionsschluss von n auf $n + 1$ wählt man z_{n+1} als $(n + 1)$-te Basisvariable. Dann hat man nach Induktionsvoraussetzung für die restlichen n Basisvariablen 2^n Auswahlmöglichkeiten. Diese 2^n Auswahlmöglichkeiten hat man auch, wenn w_{n+1} als Basisvariable gewählt wurde. Somit gibt es genau $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ Basisvariablenfelder. □

Aufgabe 1.2.1 *Zeigen Sie, dass $LCP(q, M)$ mit*

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

genau drei Lösungen besitzt.

Aufgabe 1.2.2 *Zeigen Sie, dass $LCP(q, M)$ mit*

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ -3\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \varepsilon > 0$$

keine Lösung besitzt.

Aufgabe 1.2.3 *Zeigen Sie, dass $LCP(q, M)$ mit*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

unendlich viele Lösungen besitzt.

Aufgabe 1.2.4 *Schreiben Sie ein Computerprogramm, welches für einzugebendes n alle 2^n Basisvariablenfelder ausgibt.*