

# Inhaltsverzeichnis

|          |                                                                  |           |
|----------|------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Fragestellungen der Festigkeitslehre</b>                      | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Grundprinzipien einer Festigkeitsbetrachtung</b>              | <b>6</b>  |
| 2.1      | Vorgehensweise beim Festigkeitsnachweis                          | 6         |
| 2.2      | Äußere Belastung von Bau- und Maschinenteilen                    | 7         |
| 2.2.1    | Gesamtbelastungen                                                | 8         |
| 2.2.2    | Belastungsarten                                                  | 8         |
| 2.2.3    | Belastungsfälle                                                  | 9         |
| 2.3      | Wirksame Spannungen                                              | 11        |
| 2.4      | Werkstoffkennwerte                                               | 11        |
| 2.5      | Zulässige Spannungen                                             | 11        |
| <b>3</b> | <b>Spannungen, Verzerrungen, Stoffgesetze</b>                    | <b>12</b> |
| 3.1      | Spannung als verteilte innere Kraft                              | 12        |
| 3.2      | Allgemeine Spannungsdefinition                                   | 13        |
| 3.3      | Normal- und Schubspannungen beim Zugstab                         | 15        |
| 3.4      | Verschiebungen und Verzerrungen                                  | 17        |
| 3.4.1    | Verformungen bei einachsigem Zug                                 | 17        |
| 3.4.2    | Verformungen durch Schubbelastungen                              | 19        |
| 3.4.3    | Allgemeine Formänderungen: Verzerrungen                          | 20        |
| 3.5      | Zusammenhänge zwischen Spannungen und Verzerrungen: Stoffgesetze | 21        |
| 3.5.1    | Zugversuch                                                       | 21        |
| 3.5.2    | Spannungs-Dehnungs-Kurven für verschiedene Materialien           | 23        |
| 3.5.3    | Elastisches und nichtelastisches Materialverhalten               | 24        |
| 3.5.4    | HOOKESches Gesetz bei Zug                                        | 25        |
| 3.5.5    | Querdehnung                                                      | 25        |
| 3.5.6    | Volumendehnung                                                   | 26        |
| 3.5.7    | HOOKESches Gesetz bei Schub                                      | 26        |
| 3.6      | Wärmedehnung und Wärmespannung                                   | 29        |
| <b>4</b> | <b>Stäbe und Stabsysteme</b>                                     | <b>32</b> |
| 4.1      | Spannungen und Verformungen bei Stäben                           | 32        |
| 4.1.1    | Stäbe mit konstanter Normalkraft und konstantem Querschnitt      | 32        |
| 4.1.2    | Stäbe mit veränderlichem Querschnitt                             | 33        |
| 4.1.3    | Stäbe mit veränderlicher Belastung                               | 35        |
| 4.2      | Statisch bestimmte Stabsysteme                                   | 38        |
| 4.3      | Statisch unbestimmte Stabsysteme                                 | 40        |
| 4.3.1    | Verschiebungsmethode                                             | 40        |
| 4.3.2    | Superpositionsmethode                                            | 42        |
| 4.4      | Reihen- und Parallelschaltung elastischer Stabsysteme            | 46        |
| 4.4.1    | Reihenschaltung von Stäben                                       | 46        |
| 4.4.2    | Parallelschaltung von Stäben                                     | 48        |

|          |                                                                                  |            |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.4.3    | Kombinationen .....                                                              | 50         |
| 4.5      | Festigkeitsnachweis bei Stäben .....                                             | 53         |
| <b>5</b> | <b>Biegung von Balken und balkenartigen Tragwerken.....</b>                      | <b>56</b>  |
| 5.1      | Schnittgrößen und ihre Wirkung .....                                             | 56         |
| 5.2      | Normalspannung infolge des Biegemoments .....                                    | 57         |
| 5.2.1    | Berechnung der Normalspannung .....                                              | 57         |
| 5.2.2    | Unterscheidung von einachsiger und/oder schiefer Biegung .....                   | 61         |
| 5.2.3    | Biegespannungsverteilung und maximale Biegespannung bei einachsiger Biegung..... | 62         |
| 5.2.4    | Festigkeitsnachweis bei Biegung.....                                             | 63         |
| 5.3      | Flächenträgheitsmomente .....                                                    | 66         |
| 5.3.1    | Definition der Flächenträgheitsmomente.....                                      | 66         |
| 5.3.2    | Berechnung der Flächenträgheitsmomente einzelner Querschnittsprofile .....       | 67         |
| 5.3.3    | Flächenträgheitsmomente und Widerstandsmomente bei Biegung .....                 | 70         |
| 5.3.4    | Flächenträgheitsmomente für parallel verschobene Bezugsachsen .....              | 72         |
| 5.3.5    | Flächenträgheitsmomente beliebig zusammengesetzter Querschnittsflächen .....     | 74         |
| 5.3.6    | Flächenträgheitsmomente für gedrehtes Bezugssystem .....                         | 78         |
| 5.3.7    | Hauptachsen und Hauptträgheitsmomente .....                                      | 80         |
| 5.4      | Biegeverformungen von Balken.....                                                | 82         |
| 5.4.1    | Differentialgleichungen der Biegelinie.....                                      | 83         |
| 5.4.2    | Ermittlung der Biegelinie durch Integration der Differentialgleichung.....       | 85         |
| 5.4.3    | Einbereichsprobleme .....                                                        | 86         |
| 5.4.4    | Mehrbereichsprobleme .....                                                       | 90         |
| 5.4.5    | Biegelinien und Verformungen von grundlegenden Balkenproblemen.....              | 92         |
| 5.4.6    | Ermittlung der Biegelinie durch Superposition grundlegender Belastungsfälle..... | 94         |
| 5.4.7    | Federkonstanten für Balken .....                                                 | 98         |
| 5.5      | Statisch unbestimmte Balkenprobleme.....                                         | 99         |
| 5.6      | Schiefe oder zweiachsige Biegung .....                                           | 102        |
| 5.6.1    | Zweiachsige Biegung mit $y$ und $z$ als Hauptachsen .....                        | 103        |
| 5.6.2    | Zweiachsige Biegung für den Fall, dass $y$ und $z$ keine Hauptachsen sind .....  | 104        |
| <b>6</b> | <b>Schubbeanspruchungen .....</b>                                                | <b>109</b> |
| 6.1      | Schubbeanspruchung beim Abschervorgang.....                                      | 109        |
| 6.2      | Schubspannungen bei Klebverbindungen .....                                       | 110        |
| 6.3      | Schubspannungen beim Balken und bei balkenartigen Strukturen .....               | 112        |
| 6.3.1    | Balken mit Vollquerschnitt.....                                                  | 113        |
| 6.3.2    | Balken mit dünnwandigen Profilen .....                                           | 115        |
| 6.3.3    | Lage der Schubmittelpunkte bei dünnwandigen Querschnittsprofilen .....           | 119        |
| 6.4      | Festigkeitsnachweis bei Schub .....                                              | 119        |

|           |                                                                                                      |            |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>7</b>  | <b>Torsion von Wellen und Tragstrukturen .....</b>                                                   | <b>121</b> |
| 7.1       | Wellen oder Strukturen mit Kreis- bzw. Kreisringquerschnitt.....                                     | 121        |
| 7.1.1     | Berechnung der Schubspannung .....                                                                   | 122        |
| 7.1.2     | Verdrehwinkel infolge Torsionsbelastung.....                                                         | 124        |
| 7.1.3     | Kreisringquerschnitt .....                                                                           | 125        |
| 7.1.4     | Torsionsfederkonstanten von Wellen .....                                                             | 127        |
| 7.2       | Strukturen mit beliebigem Querschnitt.....                                                           | 129        |
| 7.2.1     | Schubspannungen und maximale Schubspannungen .....                                                   | 130        |
| 7.2.2     | Verdrehwinkel und spezifischer Verdrehwinkel .....                                                   | 130        |
| 7.2.3     | Torsionsflächenträgheitsmomente und<br>Torsionswiderstandsmomente für grundlegende Querschnitte..... | 130        |
| 7.3       | Festigkeitsnachweis bei Torsion.....                                                                 | 133        |
| <b>8</b>  | <b>Mehrachsig und überlagerte Beanspruchungen .....</b>                                              | <b>135</b> |
| 8.1       | Einteilung der auftretenden Spannungszustände.....                                                   | 135        |
| 8.2       | Ebener Spannungszustand .....                                                                        | 136        |
| 8.2.1     | Spannungen an einem Volumenelement .....                                                             | 136        |
| 8.2.2     | Spannungen an einem gedrehten Volumenelement.....                                                    | 137        |
| 8.2.3     | Hauptnormalspannungen.....                                                                           | 138        |
| 8.2.4     | Hauptschubspannung.....                                                                              | 139        |
| 8.2.5     | MOHRscher Spannungskreis .....                                                                       | 140        |
| 8.2.6     | Sonderfälle des ebenen Spannungszustandes .....                                                      | 143        |
| 8.3       | Ebener Verzerrungszustand.....                                                                       | 148        |
| 8.4       | Verallgemeinertes HOOKEsches Gesetz .....                                                            | 149        |
| 8.4.1     | HOOKEsches Gesetz beim ebenen Spannungszustand.....                                                  | 149        |
| 8.4.2     | HOOKEsches Gesetz beim ebenen Verzerrungszustand .....                                               | 150        |
| 8.5       | Festigkeitsberechnung bei mehrachsigen Spannungszuständen.....                                       | 151        |
| 8.5.1     | Festigkeitsbedingung .....                                                                           | 152        |
| 8.5.2     | Festigkeitshypothesen.....                                                                           | 152        |
| 8.6       | Überlagerung grundlegender Belastungen .....                                                         | 153        |
| 8.6.1     | Zug- und Biegebelastung bei Balken und balkenartigen Strukturen .....                                | 154        |
| 8.6.2     | Biege- und Torsionsbelastung von Wellen.....                                                         | 158        |
| 8.6.3     | Zug- und Torsionsbelastung in einer Rohrstruktur.....                                                | 162        |
| <b>9</b>  | <b>Stabilitätsprobleme bei Stäben und Balken .....</b>                                               | <b>165</b> |
| 9.1       | Knicken von Stäben.....                                                                              | 165        |
| 9.1.1     | Ermittlung der Knickkraft .....                                                                      | 166        |
| 9.1.2     | Knickfälle nach EULER.....                                                                           | 168        |
| 9.1.3     | Knickkraft, freie Knicklänge und Knickspannung .....                                                 | 168        |
| 9.2       | Kippen von Balken.....                                                                               | 172        |
| <b>10</b> | <b>Energiemethoden .....</b>                                                                         | <b>175</b> |
| 10.1      | Arbeit der äußeren Kräfte: Formänderungsarbeit.....                                                  | 176        |
| 10.2      | Arbeit der inneren Kräfte: Elastische Energie .....                                                  | 176        |
| 10.2.1    | Elastische Energiedichte beim einachsigen Spannungszustand .....                                     | 176        |
| 10.2.2    | Elastische Energiedichte beim ebenen Spannungszustand.....                                           | 178        |
| 10.2.3    | Elastische Energiedichte bei reiner Schubbeanspruchung .....                                         | 178        |

|                            |                                                                                       |            |
|----------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 10.2.4                     | Elastische Energie bei Zug- oder Druckbelastung eines Stabs.....                      | 178        |
| 10.2.5                     | Elastische Energie bei Biegebelastung von Balken und<br>balkenartigen Strukturen..... | 179        |
| 10.2.6                     | Elastische Energie bei Torsionsbelastung von Wellen und<br>Tragstrukturen .....       | 179        |
| 10.2.7                     | Elastische Energie bei überlagerter Belastung.....                                    | 180        |
| 10.3                       | Arbeitssatz der Elastostatik.....                                                     | 180        |
| 10.4                       | Satz von CASTIGLIANO .....                                                            | 182        |
| 10.5                       | Satz von MENABREA .....                                                               | 186        |
| <b>11</b>                  | <b>Klausuraufgaben</b> .....                                                          | <b>188</b> |
| 11.1                       | Aufgabenstellungen.....                                                               | 188        |
| 11.2                       | Ergebnisse.....                                                                       | 193        |
| <b>Anhang</b>              | .....                                                                                 | <b>200</b> |
| A1                         | Werkstoffkennwerte für die Festigkeitsberechnung.....                                 | 200        |
| A2                         | Sicherheitsfaktoren für die Festigkeitsberechnung.....                                | 201        |
| A3                         | Dichte, Querdehnzahlen und Wärmeausdehnungskoeffizienten<br>von Werkstoffen .....     | 201        |
| A4                         | Wichtige Formelzeichen.....                                                           | 202        |
| <b>Literatur</b>           | .....                                                                                 | <b>205</b> |
| <b>Sachwortverzeichnis</b> | .....                                                                                 | <b>206</b> |