

---

## La méthode de Newton

### 3.1 Introduction

L'itération de Newton est une méthode numérique classique de recherche des zéros d'un système d'équations

$$f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$$

où  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{F}$  sont des espaces de Banach réels ou complexes. Si  $x$  est une approximation d'un zéro de ce système, la méthode de Newton raffine cette approximation en prenant pour nouvelle valeur la solution  $y$  de l'équation linéarisée au voisinage de  $x$  :

$$f(x) + Df(x)(y - x) = 0.$$

Lorsque  $Df(x)$  est inversible on obtient :

$$y = x - Df(x)^{-1}f(x).$$

On appelle opérateur de Newton l'expression ainsi définie :  $N_f(x) = x - Df(x)^{-1}f(x)$ . Il est défini sur  $\mathbb{E} \setminus \Sigma_f$ , l'ensemble des points réguliers pour  $f$ , c'est-à-dire de dérivée inversible.

L'idée d'améliorer la qualité d'une approximation par ajout d'un terme correctif (à  $x$  on ajoute ici  $-Df(x)^{-1}f(x)$ ) est fort ancienne. La méthode que nous présentons apparaît dans un contexte déjà très général dans *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* de 1669, où Newton considère des équations polynomiales et utilise une technique de linéarisation. Le cas de l'équation de Kepler  $x - e \sin(x) = M$ , une équation qui n'est pas polynomiale, est décrit dans *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* publié en 1687. La méthode y trouve toute sa force puisqu'il n'est plus possible de linéariser par des techniques algébriques, comme cela peut se faire pour des équations polynomiales. Deux autres noms sont associés à cette méthode : Joseph Raphson et Thomas Simpson. En 1690 Raphson publie *Analysis aequationum universalis* dans lequel il présente une nouvelle méthode de résolution

des équations polynomiales. Il s'agit de la même méthode que celle décrite dans *De analysi*... mais présentée différemment. Puis vient Simpson, qui dans son essai *Essays in Mathematicks*, 1740, introduit « une nouvelle méthode de résolution des équations » utilisant « la méthode des fluxions » c'est-à-dire les dérivées. Les premières preuves de convergence de la méthode sont dues à J.-R. Mouraille, 1768, puis J. Fourier et A. Cauchy pour le cas des fonctions d'une variable. On doit l'étude des systèmes d'équations à L. Runge et H. Koenig, 1924, et le point de vue « moderne » à L. Kantorovich et A. Ostrowski. Le dernier des grands noms associés à la méthode de Newton est S. Smale qui a introduit le point de vue appelé « théorie alpha » que nous décrivons dans les lignes qui suivent. L'histoire de la méthode de Newton est décrite par Ypma [57] où nous renvoyons le lecteur.

La méthode de Newton est fondée sur l'étude de la suite

$$x_{k+1} = N_f(x_k) = x_k - Df(x_k)^{-1}f(x_k)$$

où  $x_0$  est donné et dont on cherche les points fixes. Si la suite  $(x_k)$  converge vers  $\zeta \notin \Sigma_f$  alors  $f(\zeta) = 0$  : les zéros non-singuliers de  $f$  correspondent aux points fixes de  $N_f$ . De plus, la dérivée de l'opérateur de Newton est donnée par

$$DN_f(x) = Df(x)^{-1}D^2f(x)Df(x)^{-1}f(x)$$

qui est donc nulle en un point fixe. En vertu du Théorème 7 ces points fixes sont super-attractifs : la convergence de la suite  $(x_k)$  est quadratique.

A l'opérateur de Newton est associée l'équation différentielle (équation de Newton)

$$x' = -Df(x)^{-1}f(x).$$

Il est bon de voir la suite de Newton comme la solution approchée de cette équation donnée par la méthode d'Euler :

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{t_{k+1} - t_k} = -Df(x_k)^{-1}f(x_k)$$

où  $x_k$  est l'approximation de la solution  $x(t)$  de l'équation correspondant à l'état initial  $x(t_0) = x_0$  et à l'instant  $t_k$ . On obtient très exactement la suite de Newton en normalisant à 1 les périodes de temps  $t_{k+1} - t_k$ .

Quelles sont les propriétés de convergence de la suite de Newton ? Comment faut-il choisir le point initial  $x_0$  pour être assuré que la suite converge ? Quelle vitesse de convergence peut-on obtenir ? Nous aborderons ces questions sous deux angles. Le premier, que l'on qualifie de « théorie de Kantorovitch » privilégie des systèmes  $f(x) = 0$  de classe  $C^2$  et l'étude de la suite de Newton  $x_{k+1} = N_f(x_k)$  se fait à partir du comportement de ce système au voisinage du point initial  $x_0$ .

Le second point de vue, « la théorie alpha de Smale », suppose que le système  $f(x) = 0$  est analytique, donc beaucoup plus régulier que pour la théorie de Kantorovitch, mais les hypothèses faites sont plus faibles et portent

uniquement sur le comportement du système au point initial  $x_0$ , non plus au voisinage de ce point.

Deux types de théorèmes vont être formulés. L'un décrit le bassin d'attraction quadratique d'un zéro donné du système, l'autre donne un critère au point initial  $x_0$  pour que la suite de Newton converge vers un zéro du système, dont par là même on prouve l'existence.

### 3.2 La théorie de Kantorovitch

Le contexte que nous utilisons est le suivant :  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{F}$  sont des espaces de Banach réels ou complexes,  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{E}$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{F}$  est de classe  $C^2$  sur  $U$ . On note  $\bar{B}(x, r)$  la boule fermée de centre  $x$  et de rayon  $r$  et  $B(x, r)$  la boule ouverte. Le premier résultat que nous donnons est une reformulation du Théorème 7.

**Théorème 85.** *Soit  $\zeta \in U$  tel que  $f(\zeta) = 0$  et que  $Df(\zeta)$  soit inversible. Soit  $r > 0$  tel que  $\bar{B}(\zeta, r) \subset U$ . Notons*

$$K(f, \zeta, r) = \sup_{\|x-\zeta\| \leq r} \|Df(\zeta)^{-1} D^2 f(x)\|.$$

*Si  $2K(f, \zeta, r)r \leq 1$  alors, pour tout  $x_0 \in \bar{B}(\zeta, r)$ , la suite de Newton  $x_{k+1} = N_f(x_k)$  est définie et converge vers  $\zeta$ . De plus*

$$\|x_k - \zeta\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k - 1} \|x_0 - \zeta\|.$$

Nous utiliserons le lemme suivant :

**Lemme 86.** *Soit  $L : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  un opérateur linéaire et continu. Si*

$$\|L\| = \sup_{\|x\|=1} \|L(x)\| < 1$$

*alors  $id_{\mathbb{E}} - L$  est inversible. Son inverse est donné par la somme de la série absolument convergente :*

$$(id_{\mathbb{E}} - L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} L^k.$$

*De plus*

$$\|(id_{\mathbb{E}} - L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|L\|}.$$

**Preuve du Lemme 86.** La série ci-dessus est absolument convergente puisqu'on peut majorer la série des normes par la série géométrique de raison  $\|L\| < 1$ . Comme l'espace des endomorphismes continus de  $\mathbb{E}$  est complet, la série converge et sa somme est un endomorphisme continu  $M$  de  $\mathbb{E}$ . On a

$$(\text{id}_{\mathbb{E}} - L) \sum_{k=0}^p L^k = \text{id}_{\mathbb{E}} - L^{p+1}.$$

Lorsque  $p \rightarrow \infty$  on a  $L^{p+1} \rightarrow 0$  puisque la série converge et d'autre part

$$(\text{id}_{\mathbb{E}} - L) \sum_{k=0}^p L^k \rightarrow (\text{id}_{\mathbb{E}} - L)M.$$

On obtient donc à la limite

$$(\text{id}_{\mathbb{E}} - L)M = (\text{id}_{\mathbb{E}} - L) \sum_{k=0}^{\infty} L^k = \text{id}_{\mathbb{E}}$$

autrement dit

$$(\text{id}_{\mathbb{E}} - L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} L^k.$$

L'inégalité sur les normes s'en déduit.  $\square$

**Preuve du Théorème 85.** Commençons par prouver que  $Df(x)$  est inversible pour tout  $x$  tel que  $\|x - \zeta\| \leq r$ . La formule de Taylor, donnée en appendice, appliquée à la fonction  $Df(\zeta)^{-1}Df(x)$  donne

$$Df(\zeta)^{-1}Df(x) = \text{id}_{\mathbb{E}} + \int_0^1 Df(\zeta)^{-1}D^2f(\zeta + t(x - \zeta))(x - \zeta)dt$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \|\text{id}_{\mathbb{E}} - Df(\zeta)^{-1}Df(x)\| &= \left\| \int_0^1 Df(\zeta)^{-1}D^2f(\zeta + t(x - \zeta))(x - \zeta)dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|Df(\zeta)^{-1}D^2f(\zeta + t(x - \zeta))\| \|x - \zeta\| dt \leq rK(f, \zeta, r) \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons, par le Lemme 86, que  $Df(\zeta)^{-1}Df(x) = \text{id}_{\mathbb{E}} - (\text{id}_{\mathbb{E}} - Df(\zeta)^{-1}Df(x))$  est inversible et aussi que

$$\|Df(x)^{-1}Df(\zeta)\| \leq 2.$$

Ainsi, l'opérateur de Newton est défini sur  $\bar{B}(\zeta, r)$ . Par la formule de Taylor, appliquée à  $Df(\zeta)^{-1}f(x)$  on a

$$\begin{aligned} 0 &= Df(\zeta)^{-1}f(x) = Df(\zeta)^{-1}f(\zeta) + Df(\zeta)^{-1}Df(x)(\zeta - x) \\ &\quad + \int_0^1 (1-t)Df(\zeta)^{-1}D^2f(x + t(\zeta - x))(\zeta - x)^2 dt \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, en composant à gauche par  $Df(x)^{-1}Df(\zeta)$ , que

$$N_f(x) - \zeta = Df(x)^{-1}Df(\zeta) \int_0^1 (1-t)Df(\zeta)^{-1}D^2f(x+t(\zeta-x))(\zeta-x)^2 dt.$$

Compte tenu des estimations précédentes, on a

$$\begin{aligned} \|N_f(x) - \zeta\| &\leq \|Df(x)^{-1}Df(\zeta)\| \\ &\quad \times \int_0^1 (1-t) \|Df(\zeta)^{-1}D^2f(x+t(\zeta-x))\| \|\zeta-x\|^2 dt \\ &\leq K(f, \zeta, r)\|\zeta-x\|^2. \end{aligned}$$

On prouve alors par récurrence sur  $k$  que  $x_k \in \bar{B}(\zeta, r)$  et l'estimation

$$\|x_k - \zeta\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k-1} \|x_0 - \zeta\|$$

en suivant les lignes de la preuve du Théorème 7.  $\square$

Nous allons maintenant établir un critère de convergence, pour une suite de Newton, qui ne fasse pas appel, à priori, à la connaissance d'un zéro du système.

**Définition 87.** *Définissons*

$$\beta(f, x_0) = \|Df(x_0)^{-1}f(x_0)\|$$

si  $Df(x_0)$  est un isomorphisme et  $\beta(f, x_0) = \infty$  sinon.

**Théorème 88.** *Soient  $x_0 \in U$  et  $r > 0$  tels que  $\bar{B}(x_0, r) \subset U$ . Si les conditions suivantes sont satisfaites,*

- $Df(x_0)$  est un isomorphisme,
- $2\beta(f, x_0) \leq r$ ,
- $2\beta(f, x_0)K(f, x_0, r) \leq 1$ ,

alors il existe un unique  $\zeta \in \bar{B}(x_0, r)$  tel que

- $f(\zeta) = 0$ ,
- $Df(\zeta)$  est un isomorphisme,
- $\|x_0 - \zeta\| \leq 1.63281 \dots \beta(f, x_0)$ .

De plus, la suite de Newton  $x_{k+1} = N_f(x_k)$  est définie, converge vers  $\zeta$  et

$$\|x_k - \zeta\| \leq 1.63281 \dots \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k-1} \beta(f, x_0)$$

avec

$$1.63281 \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2^k-1}}.$$

**Preuve du Théorème 88.** Considérons la suite de Newton

$$x_{k+1} = x_k - Df(x_k)^{-1}f(x_k).$$

On a :

$$\|x_1 - x_0\| = \|Df(x_0)^{-1}f(x_0)\| = \beta(f, x_0) \leq \frac{r}{2}.$$

De plus, par la formule de Taylor,

$$\begin{aligned} id_{\mathbb{E}} - Df(x_0)^{-1}Df(x_1) &= Df(x_0)^{-1}Df(x_0) - Df(x_0)^{-1}Df(x_1) \\ &= - \int_0^1 Df(x_0)^{-1}D^2f(x_0 + t(x_1 - x_0))(x_1 - x_0)dt \end{aligned}$$

dont la norme est majorée par

$$\|id_{\mathbb{E}} - Df(x_0)^{-1}Df(x_1)\| \leq \|x_1 - x_0\|K(f, x_0, r) = \beta(f, x_0)K(f, x_0, r) \leq \frac{1}{2}.$$

Par le Lemme 86  $Df(x_0)^{-1}Df(x_1)$  est inversible et son inverse vérifie

$$\|Df(x_1)^{-1}Df(x_0)\| \leq 2.$$

En conséquence

$$\begin{aligned} \beta(f, x_1) &= \|x_2 - x_1\| = \|Df(x_1)^{-1}f(x_1)\| \\ &= \|Df(x_1)^{-1}Df(x_0)Df(x_0)^{-1}(f(x_1) - f(x_0) - Df(x_0)(x_1 - x_0))\| \\ &\leq \|Df(x_1)^{-1}Df(x_0)\| \left\| \int_0^1 (1-t)Df(x_0)^{-1}D^2f(x_0 + t(x_1 - x_0))(x_1 - x_0)^2 dt \right\| \\ &\leq \|x_1 - x_0\|^2 K(f, x_0, r) = \beta(f, x_0)^2 K(f, x_0, r) \leq \frac{\beta(f, x_0)}{2} \leq \frac{r}{4}. \end{aligned}$$

Notons que,  $\bar{B}(x_1, r/2) \subset \bar{B}(x_0, r)$  de sorte que

$$K\left(f, x_1, \frac{r}{2}\right) \leq \|Df(x_1)^{-1}Df(x_0)\|K(f, x_0, r) \leq 2K(f, x_0, r)$$

et

$$2\beta(f, x_1)K\left(f, x_1, \frac{r}{2}\right) \leq 2\frac{\beta(f, x_0)}{2}2K(f, x_0, r) \leq 1.$$

Nous pouvons donc appliquer à  $(x_1, r/2)$  un argument similaire et par récurrence on vérifie que

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \frac{\beta(f, x_0)}{2^{2^k - 1}}.$$

Cette suite est de Cauchy, notons  $\zeta$  sa limite. Il est clair que

$$\|\zeta - x_0\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta(f, x_0)}{2^{2^k - 1}} \leq 1.63281 \dots \beta(f, x_0) \leq r$$

et aussi que

$$\|\zeta - x_p\| \leq \sum_{k=p}^{\infty} \frac{\beta(f, x_0)}{2^{2^k-1}} \leq \frac{1}{2^{2^p-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta(f, x_0)}{2^{2^k-1}} \leq 1.63281 \dots \frac{1}{2^{2^p-1}} \beta(f, x_0).$$

Montrons maintenant que  $\zeta$  est un zéro non-singulier de  $f$ . Comme précédemment pour  $x_1$ , nous prouvons que

$$\begin{aligned} \|id_{\mathbb{E}} - Df(x_0)^{-1}Df(\zeta)\| &\leq \|\zeta - x_0\|K(f, x_0, r) \\ &\leq 1.63281 \dots \beta(f, x_0)K(f, x_0, r) < 0.85 < 1, \end{aligned}$$

et par conséquent  $Df(x_0)^{-1}Df(\zeta) = id_{\mathbb{E}} - (id_{\mathbb{E}} - Df(x_0)^{-1}Df(\zeta))$  est un isomorphisme.

Pour prouver que  $\zeta$  est un zéro nous avons besoin d'une borne sur  $\|Df(x)\|$ . Elle est obtenue via la formule de Taylor. Pour  $x \in \bar{B}(x_0, r)$  on a

$$Df(x) = Df(x_0) + \int_0^1 Df(x_0)Df(x_0)^{-1}D^2f(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0) dt$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \|Df(x)\| &= \|Df(x_0)\| \left( 1 + \int_0^1 \|Df(x_0)^{-1}D^2f(x_0 + t(x - x_0))\| \|x - x_0\| dt \right) \\ &\leq \|Df(x_0)\| (1 + rK(f, x_0, r)). \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \|f(x_k)\| &\leq \|Df(x_k)\| \|Df(x_k)^{-1}f(x_k)\| \leq \|Df(x_0)\| (1 + rK(f, x_0, r))\beta(f, x_k) \\ &\leq \|Df(x_0)\| (1 + rK(f, x_0, r)) \frac{\beta(f, x_0)}{2^{2^k-1}} \end{aligned}$$

et cette expression a pour limite 0 lorsque  $k \rightarrow \infty$ . Ceci prouve que  $f(\zeta) = 0$ .

Pour finir cette démonstration, nous devons montrer qu'un seul zéro satisfait ces critères. Soit  $\zeta'$  tel que  $f(\zeta') = 0$  et  $\|\zeta' - x_0\| \leq 1.63281 \dots \beta(f, x_0)$ . La suite  $(x_k)$  définie précédemment vérifie  $\|x_k - x_0\| \leq 2\beta(f, x_0) \leq r$  et  $f(x_k) + Df(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0$  de sorte que

$$Df(x_k)(x_{k+1} - \zeta') = f(\zeta') - f(x_k) - Df(x_k)(\zeta' - x_k).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \zeta' &= Df(x_k)^{-1}(f(\zeta') - f(x_k) - Df(x_k)(\zeta' - x_k)) \\ &= Df(x_k)^{-1}Df(x_0)Df(x_0)^{-1}(f(\zeta') - f(x_k) - Df(x_k)(\zeta' - x_k)). \end{aligned}$$

Par l'argument déjà utilisé (formule de Taylor à l'ordre 2 et  $\|Df(x_k)^{-1}Df(x_0)\| \leq 2$ ) on obtient

$$\|x_{k+1} - \zeta'\| \leq \|x_k - \zeta'\|^2 K(f, x_0, r),$$

puis par récurrence que

$$\|x_k - \zeta'\| \leq \frac{1}{2^{2^k-1}} \beta(f, x_0).$$

Il suffit alors de passer à la limite lorsque  $k \rightarrow \infty$  pour obtenir  $\zeta = \zeta'$ .  $\square$

### 3.3 La théorie alpha de Smale

Le contexte que nous utilisons tout au long de cette section est le suivant :  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{F}$  sont des espaces de Banach réels ou complexes,  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{E}$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{F}$  est analytique sur  $U$ . On note  $\bar{B}(x, r)$  la boule fermée de centre  $x$  et de rayon  $r$  et  $B(x, r)$  la boule ouverte. Puisque  $f$  est analytique, elle est développable en série de Taylor au voisinage de  $x$  :

$$f(y) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k f(x)}{k!} (y-x)^k$$

dont le rayon de convergence  $R(f, x) > 0$  est donné par

$$R(f, x)^{-1} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{D^k f(x)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k}}.$$

Nous ferons l'hypothèse que, pour tout  $x \in U$ ,

$$B\left(x, \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) R(f, x)\right) \subset U.$$

Cette hypothèse est toujours satisfaite lorsque  $U = \mathbb{E}$  ou bien, plus généralement, lorsque  $U$  est le domaine d'analyticité de la fonction  $f$ .

Le nombre suivant va jouer un grand rôle dans l'étude des propriétés de convergence des suites de Newton.

**Définition 89.** Pour tout  $x \in U$  tel que  $Df(x)$  soit un isomorphisme on pose

$$\gamma(f, x) = \sup_{k \geq 2} \left\| Df(x)^{-1} \frac{D^k f(x)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k-1}}$$

et  $\gamma(f, x) = \infty$  sinon.

La définition de  $\gamma(f, x)$  est à rapprocher de

$$K(f, x, r) = \sup_{\|x-y\| \leq r} \|Df(x)^{-1} D^2 f(y)\|.$$

introduit dans l'énoncé du Théorème 85. Lorsque  $f$  est quadratique, donc de dérivée seconde constante, on a  $K(f, x, r) = 2\gamma(f, x)$ .

Nous allons voir que  $1/\gamma(f, x)$  minore le rayon de convergence de cette série.

**Proposition 90.**  $R(f, x)^{-1} \leq \gamma(f, x)$ .

**Preuve** On a

$$\begin{aligned} R(f, x)^{-1} &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|Df(x)\|^{\frac{1}{k}} \left\| Df(x)^{-1} \frac{D^k f(x)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k}} \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\| Df(x)^{-1} \frac{D^k f(x)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k}} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\| Df(x)^{-1} \frac{D^k f(x)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k-1}} \\ &\leq \sup_{k \geq 2} \left\| Df(x)^{-1} \frac{D^k f(x)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k-1}} = \gamma(f, x). \end{aligned}$$

Le théorème suivant décrit le rayon d'une boule contenue dans le bassin d'attraction quadratique d'un zéro de  $f$  :

**Théorème 91.** (*Théorème gamma*) Soit  $\zeta \in U$  tel que  $f(\zeta) = 0$  et que  $Df(\zeta)$  soit inversible. Soit  $x_0 \in U$  tel que

$$\|x_0 - \zeta\| \gamma(f, \zeta) \leq \frac{3 - \sqrt{7}}{2} = 0.17712 \dots$$

Alors, la suite de Newton  $x_{k+1} = N_f(x_k)$  est définie et converge vers  $\zeta$ . De plus

$$\|x_k - \zeta\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k - 1} \|x_0 - \zeta\|.$$

La démonstration de ce théorème repose sur les trois lemmes suivants :

**Lemme 92.** La fonction

$$\psi(u) = 1 - 4u + 2u^2$$

décroit de 1 à 0 sur l'intervalle  $0 \leq u \leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.29289 \dots$

**Lemme 93.** Soient  $x, x_1 \in U$  avec

$$u = \|x_1 - x\| \gamma(f, x) < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Alors  $Df(x)^{-1} Df(x_1)$  est inversible et

$$\|Df(x_1)^{-1} Df(x)\| \leq \frac{(1-u)^2}{\psi(u)}.$$

**Preuve** Remarquons que l'hypothèse  $\|x_1 - x\|\gamma(f, x) < 1 - \sqrt{2}/2$  fait que  $Df(x)$  est un isomorphisme (lorsque  $Df(x)$  n'est pas un isomorphisme  $\gamma(f, x)$  est égal à  $\infty$  par définition) et entraîne que  $x_1 \in U$  par la Proposition 90 et l'hypothèse  $B\left(x, \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)R(f, x)\right) \subset U$ . Ce lemme est une conséquence du Lemme 86. Le développement de Taylor de  $Df(x_1)$  au voisinage de  $x$  est donné par

$$Df(x_1) = Df(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^{k+1}f(x)}{k!} (x_1 - x)^k$$

de sorte que

$$Df(x)^{-1}Df(x_1) = \text{id}_{\mathbb{E}} + \sum_{k=1}^{\infty} Df(x)^{-1} \frac{D^{k+1}f(x)}{k!} (x_1 - x)^k.$$

En passant aux normes, on obtient :

$$\|Df(x)^{-1}Df(x_1) - \text{id}_{\mathbb{E}}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \|Df(x)^{-1} \frac{D^{k+1}f(x)}{(k+1)!}\| \|x_1 - x\|^k$$

et, compte tenu des définitions de  $\gamma(f, x)$  et  $u$ ,

$$\|Df(x)^{-1}Df(x_1) - \text{id}_{\mathbb{E}}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)u^k = \frac{1}{(1-u)^2} - 1.$$

Cette dernière quantité est  $< 1$  parce que  $u < 1 - \sqrt{2}/2$ ; ainsi le Lemme 86 s'applique, prouve que  $Df(x)^{-1}Df(x_1)$  est un isomorphisme et donne l'estimation voulue

$$\|Df(x_1)^{-1}Df(x)\| \leq \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{(1-u)^2} - 1\right)} = \frac{(1-u)^2}{\psi(u)}. \quad \square$$

**Lemme 94.** Soit  $\zeta \in U$  tel que  $f(\zeta) = 0$  et que  $Df(\zeta)$  soit inversible. Soit  $x \in U$  tel que

$$u = \|x - \zeta\|\gamma(f, \zeta) < \frac{5 - \sqrt{17}}{4} = 0.21922\dots$$

Alors, pour tout  $k \geq 0$ ,

$$\|N_f^k(x) - \zeta\| \leq \left(\frac{u}{\psi(u)}\right)^{2^k - 1} \|x - \zeta\|.$$

**Preuve** Elle consiste à écrire le développement de Taylor de  $f(x)$  et de  $Df(x)$  au point  $\zeta$  puis de celui de

$$Df(x)(x - \zeta) - f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{D^k f(\zeta)}{k!} (x - \zeta)^k.$$

L'hypothèse faite et le lemme précédent prouvent que  $Df(\zeta)^{-1}Df(x)$  est un isomorphisme. On en déduit que

$$\begin{aligned} N_f(x) - \zeta &= Df(x)^{-1}Df(\zeta)Df(\zeta)^{-1}(Df(x)(x - \zeta) - f(x)) \\ &= Df(x)^{-1}Df(\zeta) \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)Df(\zeta)^{-1} \frac{D^k f(\zeta)}{k!} (x - \zeta)^k. \end{aligned}$$

On majore la norme de cette expression en utilisant le Lemme 93 et la définition de  $\gamma(f, \zeta)$  :

$$\begin{aligned} \|N_f(x) - \zeta\| &\leq \|Df(x)^{-1}Df(\zeta)\| \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \|Df(\zeta)^{-1} \frac{D^k f(\zeta)}{k!}\| \|x - \zeta\|^k \\ &\leq \frac{(1-u)^2}{\psi(u)} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)u^{k-1} \|z - \zeta\| \\ &= \frac{(1-u)^2}{\psi(u)} \left( \frac{1}{(1-u)^2} - \frac{1}{1-u} \right) \|x - \zeta\| \\ &= \frac{u}{\psi(u)} \|x - \zeta\|. \end{aligned}$$

Nous terminons la preuve de ce lemme en raisonnant par récurrence sur  $k$  : il faut donc vérifier que

$$\|N_f(x) - \zeta\| \gamma(f, \zeta) < \frac{5 - \sqrt{17}}{4}.$$

De l'inégalité  $u < (5 - \sqrt{17})/4 < 1 - \sqrt{2}/2$  on déduit que  $u/\psi(u) < 1$  de sorte que

$$\|N_f(x) - \zeta\| \gamma(f, \zeta) \leq \frac{u}{\psi(u)} \|x - \zeta\| \gamma(f, \zeta) < u < \frac{5 - \sqrt{17}}{4}$$

et le tour est joué.  $\square$

**Preuve du Théorème 91.** C'est une conséquence immédiate du Lemme 94

et de l'inégalité  $\frac{u}{\psi(u)} \leq \frac{1}{2}$  lorsque  $u \leq \frac{3 - \sqrt{7}}{2}$ .  $\square$

Nous allons maintenant prouver, dans le cadre de la théorie alpha, l'équivalent du Théorème 88. Ce théorème provient de Kim [29], [30], qui traite le cas des polynômes d'une variable complexe et Smale [50] pour le cas général.

**Définition 95.** *Notons*

$$\beta(f, x) = \|Df(x)^{-1}f(x)\|$$

la longueur de la correction de Newton et

$$\alpha(f, x) = \beta(f, x)\gamma(f, x) = \|Df(x)^{-1}f(x)\| \sup_{k \geq 2} \left\| Df(x)^{-1} \frac{D^k f(x)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k-1}}.$$

**Théorème 96.** (Théorème alpha de Smale.) Il existe une constante  $\alpha_0 > 0$  ayant la propriété suivante. Pour tout  $x \in U$  qui vérifie  $\alpha(f, x) < \alpha_0$  il existe un zéro  $\zeta$  de  $f$  tel que

$$\|\zeta - x\| \leq 1.63281 \dots \beta(f, x)$$

et

$$1.63281 \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2^k-1}}.$$

De plus, la suite de Newton  $x_{k+1} = N_f(x_k)$  avec  $x_0 = x$  est définie et vérifie

$$\|x_k - \zeta\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k-1} \|x_0 - \zeta\|$$

pour tout  $k \geq 0$ .

La preuve que nous donnons ici de ce théorème (ce n'est pas la seule possible) repose sur trois arguments. Le premier est une borne sur la norme de la dérivée de l'opérateur de Newton :

$$\|DN_f(y)\| \leq 2\alpha(f, y),$$

le second est une estimation de  $\alpha(f, y)$  en termes de  $\alpha(f, x)$  et  $r > 0$  pour tout  $y \in \bar{B}(x, r)$ , qui permet de donner une constante de contraction pour  $N_f$  sur cette boule et le troisième est l'application du théorème des approximations successives à cette situation.

**Lemme 97.** Soient  $x, x_1 \in U$  avec  $u = \|x - x_1\|\gamma(f, x) < 1 - (\sqrt{2}/2)$ . Alors, pour tout  $k \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} - \left\| Df(x_1)^{-1} \frac{D^k f(x_1)}{k!} \right\| &\leq \frac{1}{\psi(u)} \left( \frac{\gamma(f, x)}{1-u} \right)^{k-1}, \\ - \|Df(x)^{-1}f(x_1)\| &\leq \beta(f, x) + \frac{\|x_1 - x\|}{1-u}. \end{aligned}$$

**Preuve** Pour prouver la première assertion nous utilisons un développement de Taylor en  $x$  pour  $D^k f(x_1)$  et nous le composons à gauche par  $Df(x_1)^{-1}$ .

Cela donne

$$Df(x_1)^{-1} \frac{D^k f(x_1)}{k!} = Df(x_1)^{-1} Df(x) \sum_{l=0}^{\infty} Df(x)^{-1} \frac{D^{k+l} f(x)}{k!l!} (x_1 - x)^l.$$

En passant aux normes, on a

$$\begin{aligned} \left\| Df(x_1)^{-1} \frac{D^k f(x_1)}{k!} \right\| &\leq \|Df(x_1)^{-1} Df(x)\| \\ &\quad \times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+l)!}{k!l!} \left\| Df(x)^{-1} \frac{D^{k+l} f(x)}{(k+l)!} \right\| \|x_1 - x\|^l \end{aligned}$$

et, à l'aide du Lemme 93, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| Df(x_1)^{-1} \frac{D^k f(x_1)}{k!} \right\| &\leq \frac{(1-u)^2}{\psi(u)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+l)!}{k!l!} \gamma(f, x)^{k+l-1} \|x_1 - x\|^l \\ &= \frac{(1-u)^2}{\psi(u)} \gamma(f, x)^{k-1} \frac{1}{(1-u)^{k+1}} \end{aligned}$$

ce qui prouve la première assertion. Pour la seconde, par un argument désormais familier,

$$Df(x)^{-1} f(x_1) = Df(x)^{-1} f(x) + (x_1 - x) + \sum_{k=2}^{\infty} Df(x)^{-1} \frac{D^k f(x)}{k!} (x_1 - x)^k,$$

ce qui donne l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \|Df(x)^{-1} f(x_1)\| &\leq \|Df(x)^{-1} f(x)\| + \|x_1 - x\| \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} \left\| Df(x)^{-1} \frac{D^k f(x)}{k!} \right\| \|x_1 - x\|^k \\ &\leq \beta(f, x) + \|x_1 - x\| + \sum_{k=2}^{\infty} \gamma(f, x)^{k-1} \|x_1 - x\|^k \\ &= \beta(f, x) + \|x_1 - x\| \left( 1 + \left( \frac{1}{1-u} - 1 \right) \right) \\ &= \beta(f, x) + \frac{\|x_1 - x\|}{1-u}. \quad \square \end{aligned}$$

**Lemme 98.** Soient  $x, x_1 \in U$  avec  $u = \|x - x_1\| \gamma(f, x) < 1 - (\sqrt{2}/2)$ . Alors, pour tout  $k \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} -\beta(f, x_1) &\leq \frac{1-u}{\psi(u)} ((1-u)\beta(f, x) + \|x_1 - x\|), \\ -\gamma(f, x_1) &\leq \frac{\gamma(f, x)}{(1-u)\psi(u)}, \\ -\alpha(f, x_1) &\leq \frac{(1-u)\alpha(f, x) + u}{\psi(u)^2}. \end{aligned}$$

**Preuve** Pour  $\beta$  on utilise les Lemmes 93, 97 et l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}\beta(f, x_1) &= \|Df(x_1)^{-1}f(x_1)\| \leq \|Df(x_1)^{-1}Df(x)\| \|Df(x)^{-1}f(x_1)\| \\ &\leq \frac{(1-u)^2}{\psi(u)} \left( \beta(f, x) + \frac{\|x_1 - x\|}{1-u} \right).\end{aligned}$$

L'estimation sur  $\gamma$  est une conséquence du Lemme 97 :

$$\begin{aligned}\gamma(f, x_1) &= \sup_{k \geq 2} \left\| Df(x_1)^{-1} \frac{D^k f(x_1)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k-1}} \\ &\leq \sup_{k \geq 2} \left( \frac{1}{\psi(u)} \right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{\gamma(f, x)}{1-u} = \frac{\gamma(f, x)}{(1-u)\psi(u)}.\end{aligned}$$

En effet, pour  $u < 1 - \sqrt{2}/2$  on a  $\psi(u) < 1$  et ce sup est atteint pour  $k = 2$ .

La troisième inégalité est obtenue en multipliant les deux premières entre-elles.  $\square$

**Lemme 99.** Pour tout  $x \in U$ ,  $\|DN_f(x)\| \leq 2\alpha(f, x)$ .

**Preuve** La dérivée de l'opérateur de Newton est donnée par

$$\begin{aligned}DN_f(x) &= D(x) - D(Df(x)^{-1})f(x) - Df(x)^{-1}Df(x) \\ &= \text{id}_{\mathbb{E}} + Df(x)^{-1}D^2f(x)Df(x)^{-1}f(x) - \text{id}_{\mathbb{E}}\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\|DN_f(x)\| &= \|Df(x)^{-1}D^2f(x)Df(x)^{-1}f(x)\| \\ &\leq \|Df(x)^{-1}D^2f(x)\| \|Df(x)^{-1}f(x)\| \\ &\leq 2\gamma\beta = 2\alpha. \square\end{aligned}$$

**Théorème 100.** Soient  $r > 0$ ,  $\alpha_0$  et  $x \in U$  qui vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}- u_0 &= r\gamma(f, x) < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ - \alpha(f, x) &\leq \alpha_0, \\ - \lambda &= 2 \frac{(1-u_0)\alpha_0 + u_0}{\psi(u_0)^2} < 1, \\ - \alpha_0 + \lambda u_0 &\leq u_0.\end{aligned}$$

Alors  $N_f$  est une contraction de  $\bar{B}(x, r)$  dans elle-même, de constante de contraction  $\lambda$ . Il existe donc un unique zéro  $\zeta$  de  $f$  dans cette boule et pour tout  $x_0 \in \bar{B}(x, r)$  la suite de Newton  $x_{k+1} = N_f(x_k)$  initialisée en  $x_0$  converge vers  $\zeta$ .

**Preuve** C'est une conséquence du Corollaire 5 dont nous allons vérifier les hypothèses. D'une part, pour tout  $x_1 \in \bar{B}(x, r)$ , puisque  $u = \|x - x_1\|\gamma(f, x) \leq r\gamma(f, x) < 1 - (\sqrt{2}/2)$ , par les lemmes 98 et 99

$$\|DN_f(x_1)\| \leq 2\alpha(f, x_1) \leq 2 \frac{(1-u)\alpha(f, x) + u}{\psi(u)^2} = \leq 2 \frac{(1-u_0)\alpha_0 + u_0}{\psi(u_0)^2} = \lambda < 1$$

et donc  $N_f$  est une contraction de constante  $\lambda$ . On aura  $N_f(\bar{B}(x, r)) \subset \bar{B}(x, r)$  si  $\lambda r + \|x - N_f(x)\| \leq r$  c'est à dire si  $\lambda u_0 + \|x - N_f(x)\|\gamma(f, x) \leq u_0$ , donnée par  $\lambda u_0 + \alpha_0 \leq u_0$  qui est notre hypothèse.  $\square$

Les valeurs numériques  $u_0 = 0.06$  et  $\alpha_0 = 0.04$  conduisent à la valeur  $\lambda = 0.33163 \dots < 1/2$ . De plus, pour tout  $x_0 \in \bar{B}(x, u_0/\gamma(f, x))$ , et pour le zéro  $\zeta$  de  $f$  contenu dans cette boule, on a

$$\|x_0 - \zeta\| \leq \|x_0 - x\| + \|x - \zeta\| \leq \frac{2u_0}{\gamma(f, x)}.$$

On déduit de cette inégalité et du Lemme 98 la suivante :

$$\|x_0 - \zeta\|\gamma(f, \zeta) \leq \frac{2u_0\gamma(f, \zeta)}{\gamma(f, x)} \leq \frac{2u_0}{\psi(u_0)(1-u_0)} = 0.16639 \dots < \frac{3-\sqrt{7}}{2}.$$

Autrement dit, la boule  $\bar{B}(x, u_0/\gamma(f, x))$  est contenue dans  $\bar{B}(\zeta, (3-\sqrt{7})/2\gamma(f, \zeta))$ . Dans cette boule, l'opérateur de Newton est une contraction de constante  $\leq 1/2$  comme nous l'avons vu au Théorème 91. Nous venons de prouver le théorème suivant :

**Théorème 101.** (*Théorème alpha robuste*) *Il existe des constantes positives  $u_0$  et  $\alpha_0$  telles que : si  $x \in U$  vérifie  $\alpha(f, x) \leq \alpha_0$  alors, il existe un unique zéro  $\zeta$  de  $f$  vérifiant  $\|\zeta - x\| \leq u_0/\gamma(f, x)$ . De plus*

$$\bar{B}\left(x, \frac{u_0}{\gamma(f, x)}\right) \subset \bar{B}\left(\zeta, \frac{3-\sqrt{7}}{2\gamma(f, \zeta)}\right)$$

et  $N_f$  est une contraction de  $\bar{B}(x, u_0/\gamma(f, x))$  de constante de contraction au plus  $1/2$ .

**Preuve du Théorème 96.** On applique le théorème précédent au centre  $x$  de la boule.  $\square$

Peut-on préciser les constantes  $u_0$  et  $\alpha_0$  du Théorème alpha robuste ? Cette question a été étudiée par Wang et Han dans [54] qui donnent la réponse suivante

**Théorème 102.** (Wang-Han) Pour tout  $\alpha \in [0, 3 - 2\sqrt{2}]$ , la quantité  $(1 + \alpha)^2 - 8\alpha$  décroît de 1 à 0. Posons

$$q = \frac{1 - \alpha - \sqrt{(1 + \alpha)^2 - 8\alpha}}{1 - \alpha + \sqrt{(1 + \alpha)^2 - 8\alpha}}.$$

On a

$$\begin{aligned} 0 \leq q < 1 & \text{ si } 0 \leq \alpha < 3 - 2\sqrt{2}, \\ q = 1 & \text{ si } 0 \leq \alpha = 3 - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Pour tout  $x \in U$  tel que  $\alpha = \alpha(f, x) \leq 3 - 2\sqrt{2}$ , il existe un et un seul zéro  $\zeta$  de  $f$  tel que

$$\|\zeta - x\| \leq \frac{1 + \alpha - \sqrt{(1 + \alpha)^2 - 8\alpha}}{4\gamma(f, x)}.$$

De plus, la suite de Newton  $x_{k+1} = N_f(x_k)$ ,  $x_0 = x$ , est définie et vérifie

$$\begin{aligned} \|\zeta - x_k\| &\leq \frac{1 + \alpha - \sqrt{(1 + \alpha)^2 - 8\alpha}}{4\gamma(f, x)} q^{2^k - 1} & \text{ si } 0 \leq \alpha < 3 - 2\sqrt{2}, \\ \|\zeta - x_k\| &\leq \frac{2 - \sqrt{2}}{2\gamma(f, x)} \left(\frac{1}{2}\right)^k & \text{ si } \alpha = 3 - 2\sqrt{2}, \end{aligned}$$

pour tout  $k \geq 0$ .

Ce théorème admet les deux corollaires suivants :

**Corollaire 103.** Pour tout  $x \in U$  tel que  $\alpha = \alpha(f, x) \leq 3 - 2\sqrt{2}$ , il existe un et un seul zéro  $\zeta$  de  $f$  tel que

$$\|\zeta - x\| \leq \frac{2 - \sqrt{2}}{2\gamma(f, x)}.$$

De plus, la suite de Newton  $x_{k+1} = N_f(x_k)$ ,  $x_0 = x$ , est définie et converge vers  $\zeta$ .

**Preuve**  $(2 - \sqrt{2})/2$  est le maximum de  $(1 + \alpha - \sqrt{(1 + \alpha)^2 - 8\alpha})/4$  lorsque  $\alpha \in [0, 3 - 2\sqrt{2}]$ .  $\square$

**Corollaire 104.** Pour tout  $x \in U$  tel que  $\alpha = \alpha(f, x) \leq \frac{13 - 3\sqrt{17}}{4}$ , la suite de Newton  $x_{k+1} = N_f(x_k)$ ,  $x_0 = x$ , converge vers un zéro  $\zeta$  de  $f$  et de plus

$$\|\zeta - x_k\| \leq \frac{5 - \sqrt{17}}{4\gamma(f, x)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k - 1}$$

pour tout  $k \geq 0$ .

**Preuve** C'est une conséquence du théorème précédent obtenue en prenant  $q = 1/2$ . Ceci impose la condition  $\alpha \leq 13 - 3\sqrt{17}/4$ . L'expression  $1 + \alpha - \sqrt{(1 + \alpha)^2 - 8\alpha}$  est alors majorée par  $5 - \sqrt{17}$ .  $\square$

*Remarque 3.* La preuve du théorème de Wang-Han n'est pas donnée ici. Elle repose sur une technique très astucieuse de suites majorantes. Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'article original.

Le Corollaire 104 est à comparer au Théorème 101.

Nous donnons ci-dessous une démonstration du Corollaire 103 : voir celle du Théorème 115.

## 3.4 Exemples

### 3.4.1 Calcul des racines carrées

Le procédé suivant, pour le calcul du nombre  $\sqrt{a}$ , consiste en l'itération définie par

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left( x_k + \frac{a}{x_k} \right).$$

Cette formule est attribuée à Héron d'Alexandrie, grec du premier siècle, mais elle était déjà connue des babyloniens 300 à 400 années avant.

Il s'agit de la méthode de Newton appliquée à  $f(x) = x^2 - a$  :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k}.$$

Notons que cette suite possède trois points fixes qui sont  $\pm\sqrt{a}$  et l'infini qui est un point fixe répulsif. L'étude de ce dernier point fixe se fait en 0 via le changement de variable  $X = 1/x$ .

Quelles sont les propriétés de convergence de la suite  $(x_k)$  ? Lorsque  $x$  est un grand nombre positif, la quantité  $\frac{1}{2}(x + a/x)$  est approximativement égale à  $x/2$  : la suite  $(x_k)$  qui démarre en un grand  $x_0$  se comporte comme une suite géométrique de raison  $1/2$ . Il y a donc convergence linéaire et non pas quadratique. Lorsque  $x$  est proche de  $\sqrt{a}$  l'approximation ci-dessus n'est plus valide. Le Théorème 85 décrit un intervalle centré en  $\sqrt{a}$  et contenu dans le bassin de convergence quadratique qui est ici égal à :

$$\left[ \frac{\sqrt{a}}{2}, \frac{3\sqrt{a}}{2} \right].$$

On voit donc qu'il faut nuancer l'affirmation « la méthode de Newton a une convergence quadratique » et bien distinguer le bassin d'attraction de  $\sqrt{a}$  qui est défini par

$$BA(\sqrt{a}) = \{x_0 : (x_k) \rightarrow \sqrt{a}\},$$

ici égal à l'intervalle  $]0, \infty[$ , du bassin de convergence quadratique que l'on peut définir par

$$BAQ(\sqrt{a}) = \{x_0 : \|x_k - \sqrt{a}\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k - 1} \|x_0 - \sqrt{a}\|\}$$

et qui est contenu dans le précédent.

### 3.4.2 Equations du second degré

Posons

$$f(z) = az^2 + bz + c$$

où  $a \neq 0$ ,  $b, c$  sont des nombres complexes et  $z \in \mathbb{C}$ . Lorsque  $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$  cette équation possède deux racines distinctes que l'on note  $r_1$  et  $r_2$ . Nous allons étudier la méthode de Newton appliquée à ce cas.

Une première réduction consiste à prendre  $a = 1$ . Elle ne change rien à l'affaire puisque  $N_{\lambda f} = N_f$  pour tout scalaire  $\lambda \neq 0$ . Ainsi  $f(z) = (z - r_1)(z - r_2)$ . Soit  $g(z)$  la transformation homographique suivante

$$g(z) = \frac{z - r_1}{z - r_2}, \quad g^{-1}(z) = \frac{zr_2 - r_1}{z - 1},$$

qui est prolongée sur la sphère de Riemann par  $g(r_2) = \infty$  et  $g(\infty) = 1$ . De façon similaire,

$$N_f(z) = \frac{1}{2} \frac{x^2 - r_1 r_2}{x - \frac{r_1 + r_2}{2}}$$

est prolongé à cette sphère par :  $N_f((r_1 + r_2)/2) = \infty$  et  $N_f(\infty) = \infty$ .

Par ce changement de variable, l'opérateur de Newton devient l'élévation au carré :

$$g \circ N_f \circ g^{-1}(z) = z^2.$$

Posons  $g^{-1}(z_k) = x_k$ . Puisque  $x_k = N_f(x_{k-1}) = N_f^k(x_0)$  nous obtenons pour la suite  $(z_k)$  :

$$z_k = g \circ N_f \circ g^{-1}(z_{k-1}) = g \circ N_f^k \circ g^{-1}(z_0) = z_0^{2^k}.$$

Cette suite converge vers 0 si et seulement si  $|z_0| < 1$ , circule sur le cercle unité si  $|z_0| = 1$  et converge vers l'infini si  $|z_0| > 1$ . Revenons par  $g^{-1}$  à la suite de Newton : l'image de 0 est  $r_1$ , celle de  $\infty$  est  $r_2$ , le cercle unité est transformé en la médiatrice  $\mathcal{M}$  du segment  $[r_1, r_2]$ , l'intérieur du cercle en le demi-plan qui contient  $r_1$  et enfin l'extérieur du cercle en le demi-plan qui contient  $r_2$ . Nous en déduisons le résultat suivant :

- Si  $x_0 \in \mathcal{M}$  la suite de Newton  $x_k = N_f(x_{k-1})$  reste enfermée dans  $\mathcal{M}$ ,
- Si  $x_0 \in \mathcal{M}(r_1)$  (resp.  $x_0 \in \mathcal{M}(r_2)$ ), le demi-plan ouvert délimité par  $\mathcal{M}$  qui contient  $r_1$  (resp.  $r_2$ ), la suite  $(x_k)$  converge vers  $r_1$  (resp.  $r_2$ ).

Pour en finir avec cet exemple, il faut noter que le disque donné par le Théorème 85 et contenu dans le bassin de convergence quadratique de  $r_1$  a pour rayon  $\frac{|r_1 - r_2|}{4}$ , c'est-à-dire la moitié de la distance de  $r_1$  à la médiatrice  $\mathcal{M}$ .

### 3.4.3 Equations du troisième degré

Nous avons vu que pour les équations du second degré, sauf pour un ensemble de conditions initiales de mesure nulle (la médiatrice du segment qui relie les deux racines), les suites de Newton sont toujours convergentes. Ce résultat n'est pas général et dès le degré trois on trouve des polynômes pour lesquels il existe un ensemble ouvert  $U \subset \mathbb{C}$  tel que les suites  $(N_p^k(x))_k$  ne convergent pas quelque soit  $x \in U$ . Un exemple est donné par

$$p(x) = x^3 - 2x + 2$$

pour lequel l'opérateur de Newton

$$N_p(x) = x - \frac{x^3 - 2x + 2}{3x^2 - 2}$$

possède le cycle de période 2 :  $N_p(0) = 1$ ,  $N_p(1) = 0$ . Ce cycle est super-attractif puisque 0 est un point fixe super-attractif de  $N_p^2 = N_p \circ N_p$ . Ainsi, pour tout  $x$  dans un voisinage de 0, la suite de Newton  $(N_p^k(x))_k$  est captée par le cycle et ne peut donc converger vers une des racines.

### 3.4.4 Comment calculer toutes les racines d'un polynôme ?

La méthode que nous allons présenter ici a pour but le calcul de toutes les racines d'un polynôme  $p(x)$  de degré  $d$  à coefficients complexes. Cette méthode est due à Hubbard, Schleicher et Sutherland [25] et consiste à construire un nombre fini de points dans le plan complexe tels que les suites de Newton partant de ces points convergent vers toutes les racines de  $p(x)$ . Autrement dit, ces points sont suffisamment bien répartis dans le plan complexe pour que les bassins d'attraction des racines en contiennent au moins un. De plus, la construction de cet ensemble de points est indépendante du polynôme  $p(x)$ , elle ne dépend que de  $d$ .

Notons  $\mathcal{P}_d$  l'ensemble des polynômes unitaires et de degré  $d$

$$p(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \dots + a_1x + a_0$$

et dont toutes les racines sont dans le disque unité  $|r| \leq 1$ . On peut toujours se ramener à ce cas par un changement d'échelle. La borne de Cauchy pour

le maximum des modules des racines de  $p(x)$  est :

$$|r| \leq 1 + \max_{1 \leq k \leq d} |a_k|,$$

et celle de Montel :

$$|r| \leq \left( 1 + \sum_{k=1}^d |a_k|^2 \right)^{1/2}.$$

On peut donc par une homothétie ramener les racines dans le disque unité.

**Théorème 105.** *Pour tout  $d \geq 2$  il existe un ensemble  $\mathcal{S}_d$  qui consiste en au plus  $1.11d(\log d)^2$  points de  $\mathbb{C}$  avec la propriété suivante : pour tout polynôme  $p(x) \in \mathcal{P}_d$  et pour toute racine  $r$  de ce polynôme, il existe un point  $x \in \mathcal{S}_d$  pour lequel la suite de Newton  $(N_f^k(x))$  converge vers  $r$ . Pour les polynômes dont toutes les racines sont réelles, il y a un ensemble analogue avec au plus  $1.3d$  points.*

Le facteur multiplicatif  $1.11(\log d)^2$  entre le nombre maximum de racines et le nombre de suites considérées n'est pas très grand. On ignore s'il peut être abaissé à  $C \log d$  pour une constante  $C$  convenable.

**Construction de  $\mathcal{S}_d$ .** C'est une grille constituée de  $s = \lceil 0.26632 \log d \rceil$  cercles centrés en 0 et de  $n = \lceil 8.32547d \log d \rceil$  points sur chacun de ces cercles ( $\lceil x \rceil$  est le plus petit entier  $\geq x$ ). Posons

$$r_k = (1 + \sqrt{2}) \left( \frac{d-1}{d} \right)^{\frac{2k-1}{4s}} \quad \text{et} \quad \theta_j = \frac{2\pi j}{n},$$

avec  $1 \leq k \leq s$  et  $0 \leq j \leq n-1$ . La grille  $\mathcal{S}_d$  consiste en les points  $r_k \exp(i\theta_j)$ .

Cette construction est fondée sur le fait remarquable suivant : les bassins d'attraction des racines d'un polynôme pour la méthode de Newton sont tous adhérents au point à l'infini, qui est lui un point fixe répulsif. Ce sont des « canaux », qui ne peuvent pas être partout trop minces et qui vont des racines à l'infini. Un cercle de rayon assez grand va tous les couper et si l'on prend assez de points sur un tel cercle il y en aura un dans chaque « canal ». Le procédé est raffiné en prenant plusieurs cercles et moins de points sur chacun d'eux. Le nombre de cercles est égal à 1 jusqu'au degré  $\leq 42$ , 2 cercles pour  $43 \leq d \leq 1825$  puis 3 cercles pour  $d \leq 78015$ .

### 3.4.5 La méthode de Weierstrass pour le calcul simultané des racines d'un polynôme

Rappelons tout d'abord la définition des fonctions symétriques : étant donné un vecteur  $r \in \mathbb{C}^d$ ,  $d \geq 0$ , et un entier  $k \geq 0$  on définit la fonction symétrique

$\sigma_k(r)$  par  $\sigma_0(r) = 1$ ,  $\sigma_k(r) = 0$  si  $k > d$  et

$$\sigma_k(r) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} r_{i_1} \dots r_{i_k}$$

lorsque  $1 \leq k \leq d$ .

Considérons le polynôme à coefficients complexes

$$p(z) = z^d - a_1 z^{d-1} + a_2 z^{d-2} \dots + (-1)^k a_k z^{d-k} + \dots + (-1)^d a_d.$$

Notons aussi  $r_k$ ,  $1 \leq k \leq d$ , ses racines, chacune comptée autant de fois que sa multiplicité. Comme on a aussi

$$p(z) = \prod_{k=1}^d (z - r_k)$$

les coefficients de  $p(z)$  sont reliés aux racines via leurs fonctions symétriques :

$$\sigma_k(r) = a_k, \quad 1 \leq k \leq d.$$

On utilisera les notations suivantes :  $r$  est le vecteur colonne dont les entrées sont les  $r_k$ ,  $\sigma_0(r) = 1$ ,  $\sigma_k(\hat{r}_l)$  est la fonction symétrique relative au vecteur  $r$  privé de sa  $l$ -ième composante :

$$\sigma_k(\hat{r}_l) = \sigma_k(r_1, \dots, r_{l-1}, r_{l+1}, \dots, r_d),$$

et enfin  $\Sigma(r)$  (resp.  $A$ ) est le vecteur colonne dont les entrées sont les  $\sigma_k(r)$  (resp.  $a_k$ ).

La recherche de toutes les racines de  $p(z)$  revient à résoudre le système  $\Sigma(r) = A$ . Ce système possède  $d!$  solutions qui sont toutes obtenues par permutation des coordonnées du vecteur  $r$ . La méthode de Weierstrass consiste à calculer une solution du système  $\Sigma(r) = A$  en utilisant la méthode de Newton. Ceci définit un nouvel opérateur

$$W(r) = N_{\Sigma-A}(r)$$

dont les coordonnées seront notées  $W_i(r)$ . Un petit miracle se produit : on peut donner une expression analytique pour cet opérateur :

**Proposition 106.** *L'opérateur  $W(r)$  est défini pour tout  $r$  dont les coordonnées sont deux à deux distinctes. Dans ce cas*

$$W_i(r) = r_i - \frac{p(r_i)}{\prod_{\substack{1 \leq k \leq d \\ k \neq i}} (r_i - r_k)}.$$

L'algorithme de Weierstrass consiste, à partir d'un vecteur initial  $w^0 \in \mathbb{C}^d$  dont toutes les coordonnées sont distinctes, à calculer la suite de vecteurs  $w^k = W(w^{k-1})$ . Cette méthode est facile à implémenter et donne de bons résultats numériques au moins pour des polynômes dont les racines sont bien séparées.

La preuve de cette proposition repose sur la méthode d'interpolation de Lagrange. Nous en donnons ici les grandes lignes.

**Première étape : Calcul de la dérivée de  $\Sigma$ .** Le résultat est le suivant

$$D\Sigma(r) = \begin{pmatrix} D\sigma_1(r) \\ D\sigma_2(r) \\ \vdots \\ D\sigma_d(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_0(\hat{r}_1) & \sigma_0(\hat{r}_2) & \dots & \sigma_0(\hat{r}_d) \\ \sigma_1(\hat{r}_1) & \sigma_1(\hat{r}_2) & \dots & \sigma_1(\hat{r}_d) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{d-1}(\hat{r}_1) & \sigma_{d-1}(\hat{r}_2) & \dots & \sigma_{d-1}(\hat{r}_d) \end{pmatrix}.$$

Cela se démontre en utilisant la formule suivante :

$$\sigma_k(r) = \sigma_k(\hat{r}_k) + r_k \sigma_{k-1}(\hat{r}_k).$$

**Deuxième étape :  $D\Sigma(r)$  est-elle inversible ?** Nous allons prouver que

$$D(d, r) = \det(D\Sigma(r)) = \prod_{1 \leq i < j \leq d} (r_i - r_j)$$

de sorte que  $D\Sigma(r)$  est inversible, c'est-à-dire  $W(r)$  définie, si et seulement si les  $r_i$  sont deux à deux distincts. Pour prouver cette formule, on note que la première ligne de  $D\Sigma(r)$  est constituée de  $\sigma_0(\hat{r}_i) = 1$  et les  $d-1$  autres lignes par des polynômes en les  $r_i$  dont les degrés partiels sont

$$\deg(\sigma_i(\hat{r}_j), r_k) \leq 1.$$

Considérons  $D(d, r)$  comme un polynôme en la variable  $r_1$ . On vient de voir que son degré est  $\leq d-1$ . On voit aussi que si l'on donne à  $r_1$  les valeurs  $r_2, \dots, r_d$ , deux colonnes du déterminant sont égales et donc ce déterminant est nul. On obtient, en factorisant,

$$D(d, r) = E(r_2, \dots, r_d) \prod_{2 \leq j \leq d} (r_1 - r_j).$$

Le même raisonnement est appliqué à  $r_2$  et  $E(r_2, \dots, r_d)$ , puis  $r_3 \dots$  et ainsi de suite, pour obtenir

$$D(d, r) = C_d \prod_{1 \leq i < j \leq d} (r_i - r_j)$$

où  $C_d$  est une constante ne dépendant que de  $d$ . Nous allons prouver par récurrence qu'elle est égale à 1. C'est vrai pour  $d=1$ . Pour passer de  $d-1$  à

$d$ , on écrit

$$\begin{aligned} D(d, r) &= D(d, r_1, \dots, r_{d-1}, r_d) = C_d \prod_{1 \leq i \leq d-1} (r_i - r_d) \prod_{1 \leq i < j \leq d-1} (r_i - r_j) \\ &= C_d \prod_{1 \leq i \leq d-1} (r_i - r_d) D(d-1, r_1, \dots, r_{d-1}). \end{aligned}$$

Pour  $r_d = 0$  on obtient

$$D(d, r_1, \dots, r_{d-1}, 0) = C_d \sigma_{d-1}(r_1, \dots, r_{d-1}) D(d-1, r_1, \dots, r_{d-1}).$$

D'autre part

$$D\Sigma(r_1, \dots, r_{d-1}, 0) = \begin{pmatrix} D\Sigma(r_1, \dots, r_{d-1}) & * \\ 0 & \sigma_{d-1}(r_1, \dots, r_{d-1}) \end{pmatrix}$$

ce qui prouve que

$$D(d, r_1, \dots, r_{d-1}, 0) = D(d-1, r_1, \dots, r_{d-1}) \sigma_{d-1}(r_1, \dots, r_{d-1}).$$

L'hypothèse de récurrence assure que  $D(d-1, r_1, \dots, r_{d-1}) \sigma_{d-1}(r_1, \dots, r_{d-1}) \neq 0$ , d'où l'égalité  $C_d = 1$ .

**Troisième étape : calcul de l'inverse de  $D\Sigma(r)$ .**

Supposons que les racines  $r_i$  de  $p(z)$  soient simples. Considérons le polynôme

$$L_j(z) = \frac{\sum_{k=1}^d (-1)^{k-1} \sigma_{k-1}(\hat{r}_j) z^{d-k}}{\prod_{k \neq j} (r_j - r_k)}.$$

Il est de degré  $d-1$  et, par construction de ses coefficients, il vérifie

$$L_j(r_i) = \frac{\sum_{k=1}^d (-1)^{k-1} \sigma_{k-1}(\hat{r}_j) r_i^{d-k}}{\prod_{k \neq j} (r_j - r_k)} = \delta_{ij}$$

pour tout  $1 \leq i, j \leq d$ . C'est un polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux noeuds d'interpolation  $r_i$ . Cette dernière égalité peut être vue comme le terme général du produit de matrices suivant :

$$W D\Sigma(r) \Delta = I_d$$

où  $W_{ij} = (-1)^{j-1} r_i^{d-j}$ ,  $\Delta$  est la matrice diagonale dont les entrées sont

$$\Delta_{jj} = \left( \prod_{k \neq j} (r_j - r_k) \right)^{-1}$$

et  $I_d$  la matrice identité. Ceci prouve que  $D\Sigma(r) = W^{-1}\Delta^{-1}$  ou bien que  $D\Sigma(r)^{-1} = \Delta W$ , c'est-à-dire

$$D\Sigma(r)_{ij}^{-1} = \frac{(-1)^{j-1}r_i^{d-j}}{\prod_{k \neq i}(r_i - r_k)}.$$

**Quatrième étape : calcul de l'opérateur  $N_{\Sigma-A}$ .**

Par définition,  $N_{\Sigma-A}(r) = r - D\Sigma(r)^{-1}(\Sigma(r) - A)$  dont la  $i$ -ème composante est

$$N_{\Sigma-A}(r)_i = r_i - \sum_{j=1}^d \frac{(-1)^{j-1}r_i^{d-j}(\sigma_j(r) - a_j)}{\prod_{k \neq i}(r_i - r_k)}.$$

Pour simplifier cette expression, on note que

$$r_i^d + \sum_{j=1}^d (-1)^j \sigma_j(r) r_i^{d-j} = 0$$

par définition des fonctions symétriques des racines, de sorte que

$$\sum_{j=1}^d (-1)^{j-1} r_i^{d-j} \sigma_j(r) = r_i^d$$

et donc

$$N_{\Sigma-A}(r)_i = r_i - \frac{p(r_i)}{\prod_{k \neq i}(r_i - r_k)}$$

qui est le résultat cherché.

### 3.4.6 Le problème symétrique des valeurs propres

Soit  $A$  une matrice réelle, symétrique et de taille  $n \times n$ . Ses valeurs propres sont réelles, nous les notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  et il existe une base orthonormée de vecteurs propres correspondants notés  $v_1, \dots, v_n$ . Si  $V$  désigne la matrice orthogonale dont les colonnes sont les  $v_i$ , on a  $A = VDV^T$  où  $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

Le problème symétrique des valeurs propres consiste à calculer les  $\lambda_i$  ainsi que les  $v_i$  c'est-à-dire résoudre le système d'équations  $Av = \lambda v$ . Ce système contient  $n+1$  inconnues et  $n$  équations, il est donc sous-déterminé. On rajoute l'équation manquante en normalisant le vecteur propre ce qui conduit au système

$$\begin{aligned} (\lambda I_n - A)v &= 0, \\ \frac{1}{2}(\|v\|^2 - 1) &= 0. \end{aligned}$$

que nous noterons  $F \begin{pmatrix} v \\ \lambda \end{pmatrix} = 0$ . La présence du facteur  $1/2$  est purement cosmétique et a pour but de disparaître dans les dérivations futures. Lorsque les valeurs propres de  $A$  sont distinctes, les vecteurs propres correspondants sont  $n$  droites vectorielles distinctes qui coupent la sphère unité en  $2n$  points. Ceci prouve que le système  $F \begin{pmatrix} v \\ \lambda \end{pmatrix} = 0$  possède  $2n$  solutions distinctes dans ce cas. Le cas d'une matrice non symétrique, où la structure complexe risque d'intervenir, est plus délicat puisque l'intersection d'une droite vectorielle contenue dans  $\mathbb{C}^n$  avec la sphère unité ne produit plus deux points diamétralement opposés comme dans le cas réel mais un grand cercle sur cette sphère. Une stratégie possible consiste plutôt à remplacer l'équation  $\|v\| = 1$  par l'équation linéaire  $\langle v, a \rangle = 1$  où  $a$  est un vecteur pris au hasard dans  $\mathbb{C}^n$ .

Notre objectif, dans ce paragraphe, est l'étude de la méthode de Newton dans ce contexte. Nous allons donc commencer par élucider le calcul de  $DF^{-1}$ .

**Proposition 107.** *Pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  la dérivée de  $F$  est donnée par*

$$DF \begin{pmatrix} v \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n - A & v \\ v^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Lorsque  $v$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ ,  $DF \begin{pmatrix} v \\ \lambda \end{pmatrix}$  est inversible si et seulement si cette valeur propre est simple. Dans ce cas et si de plus  $\|v\| = 1$ , notons  $v^\perp$  le sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  orthogonal à  $v$ ,  $\Pi_{v^\perp}$  la projection orthogonale sur ce sous-espace et  $(\lambda I_n - A)|_{v^\perp}$  la restriction de  $\lambda I_n - A$  à ce sous-espace. On a

$$\left\| DF \begin{pmatrix} v \\ \lambda \end{pmatrix}^{-1} \right\| = \max \left( 1, \left\| (\Pi_{v^\perp} \circ (\lambda I_n - A)|_{v^\perp})^{-1} \right\| \right).$$

**Preuve** Calculons la dérivée de  $F$  :

$$DF \begin{pmatrix} v \\ \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda I_n - A)\dot{v} + \dot{\lambda}v \\ v^T \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n - A & v \\ v^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Passons à la seconde assertion. Supposons que  $Av_1 = \lambda_1 v_1$  et  $Ve_1 = v_1$  où  $e_1, \dots, e_n$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Utilisant la décomposition  $A = VDVT$  on a

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_n - A & v_1 \\ v_1^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 I_n - D & e_1 \\ e_1^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est alors facile de voir que le déterminant de cette matrice est égal à  $-(\lambda_1 - \lambda_2) \dots (\lambda_1 - \lambda_n)$ . Il est non nul si et seulement si  $\lambda_1$  est simple. Considérons

maintenant l'équation

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_n - A & v_1 \\ v_1^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \nu \end{pmatrix}.$$

Posons  $y = \alpha v_1 + y_1$  et  $z = \beta v_1 + z_1$  où  $y_1$  et  $z_1$  sont orthogonaux à  $v_1$ . Rappelons que  $\|v_1\| = 1$ . Cette équation matricielle s'écrit

$$\begin{aligned} (\lambda_1 I_n - A)y + \mu v_1 &= z, \\ \langle y, v_1 \rangle &= \nu \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} (\lambda_1 I_n - A)(\alpha v_1 + y_1) + \mu v_1 &= \beta v_1 + z_1, \\ \langle \alpha v_1 + y_1, v_1 \rangle &= \nu \end{aligned}$$

de sorte que  $(\lambda_1 I_n - A)y_1 = z_1$ ,  $\mu = \beta$  et  $\alpha = \nu$ . Comme  $y_1$  et  $z_1 \in v_1^\perp$  on obtient  $y_1 = \left( \Pi_{v_1^\perp} \circ (\lambda_1 I_n - A)|_{v_1^\perp} \right)^{-1} z_1$ . Il est alors facile de prouver la dernière assertion.  $\square$

**Théorème 108.** *Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  une valeur propre simple de  $A$  associée au vecteur propre  $v \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|v\| = 1$ . La suite de Newton associée à  $F$  et aux données initiales  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  et  $v_0 \in \mathbb{R}^n$  :*

$$\begin{pmatrix} v_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_k \\ \lambda_k \end{pmatrix} - DF \begin{pmatrix} v_k \\ \lambda_k \end{pmatrix}^{-1} F \begin{pmatrix} v_k \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

converge quadratiquement vers  $\begin{pmatrix} v \\ \lambda \end{pmatrix}$  au sens du Théorème 91 dès lors que

$$\left( \|v - v_0\|^2 + |\lambda - \lambda_0|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{3 - \sqrt{7}}{\sqrt{2} \max \left( 1, \left\| \left( \Pi_{v^\perp} \circ (\lambda I_n - A)|_{v^\perp} \right)^{-1} \right\| \right)}.$$

**Preuve** C'est une conséquence du Théorème 91 et de l'estimation

$$\gamma \left( F, \begin{pmatrix} v \\ \lambda \end{pmatrix} \right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \max \left( 1, \left\| \left( \Pi_{v^\perp} \circ (\lambda I_n - A)|_{v^\perp} \right)^{-1} \right\| \right)$$

que nous devons établir. Puisque  $F$  est polynomiale de degré 2, on a

$$\begin{aligned} \gamma \left( F, \begin{pmatrix} v \\ \lambda \end{pmatrix} \right) &= \frac{1}{2} \left\| DF \begin{pmatrix} v \\ \lambda \end{pmatrix}^{-1} D^2 F \begin{pmatrix} v \\ \lambda \end{pmatrix} \right\| \\ &\leq \frac{1}{2} \left\| DF \begin{pmatrix} v \\ \lambda \end{pmatrix}^{-1} \right\| \left\| D^2 F \begin{pmatrix} v \\ \lambda \end{pmatrix} \right\|. \end{aligned}$$

Cette dérivée seconde vaut

$$D^2F \begin{pmatrix} v \\ \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha y + \beta x \\ \langle x, y \rangle \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \left\| D^2F \begin{pmatrix} v \\ \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \beta \end{pmatrix} \right\|^2 &= \|\alpha y + \beta x\|^2 + |\langle x, y \rangle|^2 \\ &\leq (|\alpha|\|y\| + |\beta|\|x\|)^2 + \|x\|^2\|y\|^2 \\ &\leq (\|x\|^2 + |\alpha|^2)(\|y\|^2 + |\beta|^2) + \|x\|^2\|y\|^2 \\ &\leq 2(\|x\|^2 + |\alpha|^2)(\|y\|^2 + |\beta|^2). \end{aligned}$$

Ce calcul prouve que

$$\left\| D^2F \begin{pmatrix} v \\ \lambda \end{pmatrix} \right\| = \max_{\substack{\|(x, \alpha)\| = 1 \\ \|(y, \beta)\| = 1}} \left\| D^2F \begin{pmatrix} v \\ \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \beta \end{pmatrix} \right\| \leq \sqrt{2}$$

d'où le résultat.  $\square$

### 3.4.7 L'équation de Riccati algébrique

L'équation de Riccati, que nous considérons ici, est donnée par

$$R(X) = A^T X + X^T A - X B B^T X + Q = 0$$

où  $A$ ,  $Q$  et  $X$  sont des matrices  $n \times n$  réelles,  $Q$  et  $X$  symétriques et  $B$  est une matrice  $n \times p$  réelle et de rang  $p$ . Cette équation provient de problèmes de contrôle optimal et, sous certaines hypothèses relatives à l'observabilité et la contrôlabilité du problème, il possède une unique solution  $X$  définie positive.

Nous envisageons ici le calcul de cette solution par la méthode de Newton. Notons  $\mathcal{S}_n$  l'espace des matrices  $n \times n$  réelles et symétriques que l'on munit de la structure euclidienne canonique. La dérivée de  $R : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$  est donnée par  $DR(X) : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$ ,

$$DR(X)(S) = (A - B B^T X)^T S + S(A - B B^T X).$$

C'est un opérateur de Liapunov associé à la matrice  $A - B B^T X$ . Plus généralement on pose

$$\mathcal{L}_M(S) = M^T S + S M.$$

L'opérateur  $\mathcal{L}_M$  est inversible si et seulement si la matrice  $M$  est elle-même inversible, voir Stewart-Sun [51] Chap. V, sect. 1. 2.

Afin d'utiliser le Théorème 91 qui décrit le bassin quadratique d'attraction pour la méthode de Newton, nous devons estimer l'invariant  $\gamma(R, X)$  qui vaut ici

$$\gamma(R, X) = \frac{1}{2} \|DR(X)^{-1}D^2R(X)\|$$

puisque  $R$  est une application polynomiale de degré 2. Nous allons estimer séparément les quantités  $\|DR(X)^{-1}\|$  et  $\|D^2R(X)\|$ .

**Lemme 109.** *Soit  $M$  une matrice  $n \times n$ , réelle et stable c'est-à-dire dont les valeurs propres ont une partie réelle négative. Pour toute matrice  $B$  l'équation*

$$\mathcal{L}_M(X) = M^T X + X M = B$$

a pour solution

$$X = \int_0^\infty \exp(M^T t) B \exp(M t) dt.$$

**Preuve** Cette intégrale est convergente parce que  $M$  est stable. Ce point sera rendu plus clair au cours de la démonstration du prochain lemme. De plus

$$\begin{aligned} M^T X + X M &= M^T \left( \int_0^\infty \exp(M^T t) B \exp(M t) dt \right) \\ &\quad + \left( \int_0^\infty \exp(M^T t) B \exp(M t) dt \right) M \\ &= \int_0^\infty M^T \exp(M^T t) B \exp(M t) + \exp(M^T t) B \exp(M t) M dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} (\exp(M^T t) B \exp(M t)) dt = B. \quad \square \end{aligned}$$

**Lemme 110.** *Sous l'hypothèse du lemme précédent*

$$\|\mathcal{L}_M^{-1}\| \leq \int_0^\infty \|\exp(M t)\|^2 dt.$$

*Si de plus  $M$  est diagonalisable et  $M = P D P^{-1}$  avec  $D$  diagonale alors*

$$\|\mathcal{L}_M^{-1}\| \leq \frac{\kappa(P)^2}{2 \min_{1 \leq k \leq n} |\Re(\lambda_k)|}$$

où  $\kappa(P)$  est le conditionnement de la matrice  $P$ ,  $\lambda_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , les valeurs propres de  $M$  et  $\Re(\lambda_k)$  la partie réelle.

**Preuve** On a  $\mathcal{L}_M^{-1}(B) = X$ , dont l'expression est donnée au lemme précédent, d'où

$$\|\mathcal{L}_M^{-1}(B)\| = \|X\| = \left\| \int_0^\infty \exp(M^T t) B \exp(Mt) dt \right\| \leq \|B\| \int_0^\infty \|\exp(Mt)\|^2 dt$$

ce qui établit la première inégalité. Lorsque  $M$  est diagonalisable on a

$$X = \int_0^\infty P^{-T} \exp(Dt) P^T B P \exp(Dt) P^{-1} dt$$

de sorte que

$$\|X\| \leq \kappa(P)^2 \|B\| \int_0^\infty \|\exp(Dt)\|^2 dt.$$

Par ailleurs, puisque  $D = \text{Diag}(\lambda_k)$ ,

$$\|\exp(Dt)\| = \max_{1 \leq k \leq n} |\exp(\lambda_k t)| = \max_{1 \leq k \leq n} \exp(\Re(\lambda_k) t).$$

Comme ces parties réelles sont négatives, les intégrales correspondantes sont convergentes et

$$\int_0^\infty \|\exp(Dt)\|^2 dt = \max_{1 \leq k \leq n} \int_0^\infty \exp(2\Re(\lambda_k) t) dt = \max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{2|\Re(\lambda_k)|}. \quad \square$$

**Lemme 111.**  $\|D^2 R(X)\| = \|BB^T\| \leq \|B\|^2.$

**Preuve** C'est une conséquence immédiate de l'égalité

$$D^2 R(X)(S, T) = -SBB^T T. \quad \square$$

A partir de ces calculs le Théorème 91 se transcrit de la façon suivante :

**Théorème 112.** Soit  $X \in \mathcal{S}_n$  solution de l'équation de Riccati

$$R(X) = A^T X + X^T A - XBB^T X + Q = 0.$$

Supposons que  $A - BB^T X$  soit stable. Alors, pour toute matrice  $X_0 \in \mathcal{S}_n$  telle que

$$\|X_0 - X\|_F \leq \frac{3 - \sqrt{7}}{\|BB^T\| \int_0^\infty \|\exp(Mt)\|^2 dt}$$

la suite de Newton  $X_{k+1} = N_R(X_k)$  est définie et converge vers  $X$ . Elle s'obtient en résolvant l'équation de Liapunov

$$(A - BB^T X_k)^T X_{k+1} + X_{k+1} (A - BB^T X_k) + X_k BB^T X_k + Q = 0.$$

De plus

$$\|X_k - X\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k - 1} \|X_0 - X\|.$$

Les résultats classiques concernant l'équation de Riccati sont présentés dans le livre de Bittanti, Laub et Willems [5]. Les auteurs décrivent la résolution numérique de cette équation via la méthode de Newton d'un point de vue différent de celui que nous adoptons ici.

L'hypothèse de stabilité faite sur la matrice  $A - BB^T X$  est réaliste dans le contexte des problèmes de contrôle. De façon plus précise on a le résultat suivant que nous empruntons au livre cité ci-dessus :

**Théorème 113.** *On dit que  $(A, B)$  est stabilisable s'il existe une matrice  $F$  telle que  $A + BF$  soit stable. On dit que  $(C, A)$  est détectable s'il existe une matrice  $L$  telle que  $A + LC$  soit stable. Lorsque  $(A, B)$  est stabilisable et  $(C, A)$  détectable, l'équation de Riccati*

$$R(X) = A^T X + X^T A - XBB^T X + Q = 0$$

*admet une unique solution semi-définie positive  $X$ . De plus  $A - BB^T X$  est une matrice stable.*

### 3.4.8 Sur la séparation des racines d'un système

Un nombre qui intervient souvent dans l'analyse de certains algorithmes est le nombre de séparation. Etant donné une application analytique entre deux espaces de Banach,

$$f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$$

et une solution de ce système :  $f(\zeta) = 0$ , on note

$$\text{sep}(f, \zeta) = \inf_{f(\zeta')=0, \zeta' \neq \zeta} \|\zeta' - \zeta\|.$$

Nous pouvons estimer ce nombre de séparation à l'aide de l'invariant  $\gamma$  :

**Théorème 114.** *Lorsque  $f(\zeta) = 0$  et que  $Df(\zeta)$  est un isomorphisme on a*

$$\text{sep}(f, \zeta) \geq \frac{1}{2\gamma(f, \zeta)}.$$

**Preuve** Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe  $\zeta' \neq \zeta$  tel que  $f(\zeta') = 0$  et

$$\|\zeta' - \zeta\| < \frac{1}{2\gamma(f, \zeta)}.$$

Par la proposition 90 la série de Taylor de  $f$  au point  $\zeta$  converge en  $\zeta'$  de sorte que

$$f(\zeta') = f(\zeta) + Df(\zeta)(\zeta' - \zeta) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{D^k f(\zeta)}{k!} (\zeta' - \zeta)^k.$$

Comme  $f(\zeta) = f(\zeta') = 0$  on obtient

$$\zeta' - \zeta = - \sum_{k=2}^{\infty} Df(\zeta)^{-1} \frac{D^k f(\zeta)}{k!} (\zeta' - \zeta)^k$$

d'où

$$\begin{aligned} 1 &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \left\| Df(\zeta)^{-1} \frac{D^k f(\zeta)}{k!} \right\| \|\zeta' - \zeta\|^{k-1} \leq \sum_{k=2}^{\infty} \gamma(f, \zeta)^{k-1} \|\zeta' - \zeta\|^{k-1} \\ &= \frac{\|\zeta' - \zeta\| \gamma(f, \zeta)}{1 - \|\zeta' - \zeta\| \gamma(f, \zeta)}. \end{aligned}$$

Puisque, par hypothèse,  $\|\zeta' - \zeta\| \gamma(f, \zeta) < 1/2$ , on obtient

$$1 < \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1$$

ce qui est absurde.  $\square$

L'application du Théorème gamma (Théorème 91) donne immédiatement

$$\text{sep}(f, \zeta) > \frac{3 - \sqrt{7}}{2\gamma(f, \zeta)}.$$

La constante  $1/2$  donnée ici est bien meilleure.

### 3.4.9 Séparation des racines via le théorème de Rouché

Nous allons démontrer, par une méthode de séries majorantes, l'énoncé suivant que nous avons déjà rencontré au Corollaire 103.

**Théorème 115.** *Soient  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une fonction analytique,  $x_0 \in \mathbb{C}^n$  tel que  $Df(x_0)$  soit un isomorphisme. Si  $\alpha(f, x_0) < 3 - 2\sqrt{2}$ , il existe un et seul zéro  $\zeta$  de  $f$  avec*

$$\|x_0 - \zeta\| < \frac{2 - \sqrt{2}}{2\gamma(f, x_0)}.$$

Nous suivons ici une démonstration de Jean-Claude Yakoubsohn basée sur le théorème de Rouché dont voici un énoncé (voir [11] Chap.IV-18, Théorème 2) :

**Théorème 116.** *Donnons nous un domaine borné  $D \subset \mathbb{C}^n$  de frontière de Jordan  $S$  et deux applications analytiques  $f$  et  $g$  définies sur un voisinage ouvert de  $D$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}^n$ . Si pour tout  $z \in S$  on a*

$$\|f(z)\| > \|g(z)\|$$

*alors  $f + g$  a autant de zéros (comptés avec multiplicités) que  $f$  dans  $D$ .*

**Preuve du Théorème 115.** Définissons  $g(x) = f(x) - f(x_0)$ . Notons que  $g(x_0) = 0$ , que  $Dg(x_0) = Df(x_0)$  est un isomorphisme et que  $\gamma(g, x_0) = \gamma(f, x_0)$ . Par le Théorème 114,  $x_0$  est le seul zéro de  $g$  dans la boule ouverte

$$B\left(x_0, \frac{1}{2\gamma(f, x_0)}\right).$$

Notons enfin que, dans cette boule, la série de Taylor de  $g$  est convergente (Proposition 90). Elle est donnée par

$$g(x) = Df(x_0)(x - x_0) + \sum_{k \geq 2} \frac{D^k f(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Nous allons prouver que pour un certain  $r$ ,  $0 < r < 1/2$ , on a

$$\|Df(x_0)^{-1}f(x) - Df(x_0)^{-1}g(x)\| < \|Df(x_0)^{-1}g(x)\|$$

pour tout  $x$  avec

$$\|x - x_0\| = \frac{r}{\gamma(f, x_0)}.$$

Par le théorème de Rouché,  $Df(x_0)^{-1}f(x)$  et  $Df(x_0)^{-1}g(x)$  auront le même nombre de zéros dans cette boule : 1. Notons que

$$\|Df(x_0)^{-1}f(x) - Df(x_0)^{-1}g(x)\| = \|Df(x_0)^{-1}f(x_0)\| = \beta(f, x_0)$$

et que

$$x - x_0 = Df(x_0)^{-1}g(x) - \sum_{k \geq 2} Df(x_0)^{-1} \frac{D^k f(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

de sorte que

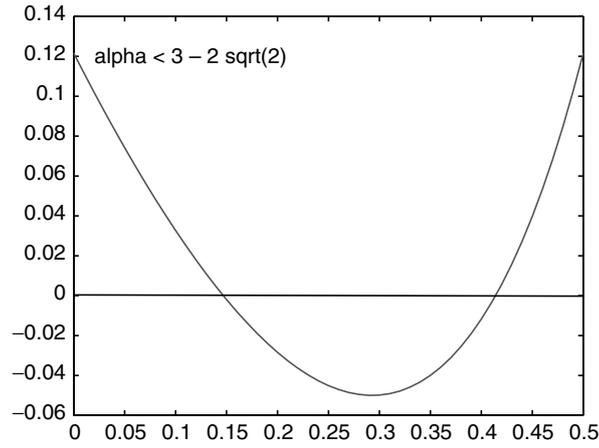
$$\frac{r}{\gamma(f, x_0)} \leq \|Df(x_0)^{-1}g(x)\| + \sum_{k \geq 2} \gamma(f, x_0)^{k-1} \left(\frac{r}{\gamma(f, x_0)}\right)^k$$

c'est à dire

$$\frac{r}{\gamma(f, x_0)} - \frac{1}{\gamma(f, x_0)} \frac{r^2}{1-r} \leq \|Df(x_0)^{-1}g(x)\|.$$

L'hypothèse du théorème de Rouché sera satisfaite si

$$\beta(f, x_0) < \frac{r}{\gamma(f, x_0)} - \frac{1}{\gamma(f, x_0)} \frac{r^2}{1-r}$$



**Fig. 3.1.** La fonction  $h$ .

autrement dit

$$\alpha(f, x_0) < r - \frac{r^2}{1-r}.$$

Supposons que  $0 < \alpha < 3 - 2\sqrt{2}$ . La fonction

$$h(r) = \alpha - r + \frac{r^2}{1-r}$$

est convexe sur l'intervalle  $[0, 1]$ , elle y possède deux zéros qui sont

$$0 < \frac{\alpha + 1 - \sqrt{\alpha^2 - 6\alpha + 1}}{4} < \frac{\alpha + 1 + \sqrt{\alpha^2 - 6\alpha + 1}}{4} < \frac{1}{2}.$$

On aura

$$\alpha < r - \frac{r^2}{1-r}$$

pour tout  $r$  dans l'intervalle ouvert défini par ces deux racines. Donc, si  $\alpha(f, x_0) < 3 - 2\sqrt{2}$ , pour tout  $\alpha$  tel que

$$\alpha(f, x_0) < \alpha < 3 - 2\sqrt{2}$$

et pour tout  $r$  avec

$$\frac{\alpha + 1 - \sqrt{\alpha^2 - 6\alpha + 1}}{4} < r < \frac{\alpha + 1 + \sqrt{\alpha^2 - 6\alpha + 1}}{4}$$

$f$  possède un unique zéro  $\zeta$  qui vérifie

$$\|x_0 - \zeta\| < \frac{r}{\gamma(f, x_0)}.$$

On obtient

$$\|x_0 - \zeta\| \leq \frac{\alpha + 1 - \sqrt{\alpha^2 - 6\alpha + 1}}{4\gamma(f, x_0)}$$

pour tout  $\alpha < 3 - 2\sqrt{2}$  d'où, en passant à la limite,

$$\|x_0 - \zeta\| < \frac{2 - \sqrt{2}}{2\gamma(f, x_0)}. \quad \square$$

### 3.4.10 Une version quantitative du théorème des fonctions implicites

Le théorème des fonctions implicites est l'énoncé suivant :

**Théorème 117.** *Soient  $\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}$  trois espaces de Banach et soit  $F : \mathbb{E} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{G}$  une application de classe  $\mathbb{C}^k$ ,  $1 \leq k \leq \infty$ , ou bien analytique. Soient  $x_0 \in \mathbb{E}$  et  $y_0 \in \mathbb{F}$  tels que  $F(x_0, y_0) = 0$  et que  $D_2F(x_0, y_0) : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{G}$  soit un isomorphisme. Il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $x_0$  et une unique fonction  $f : V \rightarrow \mathbb{F}$  de classe  $\mathbb{C}^k$  ou analytique qui satisfasse*

$$f(x_0) = y_0 \quad \text{et} \quad F(x, f(x)) = 0$$

pour tout  $x \in V$ . De plus

$$Df(x_0) = -D_2F(x_0, y_0)^{-1}D_1F(x_0, y_0).$$

La fonction  $f$  est appelée la fonction implicite associée à  $F$  et au point  $(x_0, y_0)$ .

Nous allons voir qu'en utilisant le Corollaire 103 ou bien le Théorème 115 on peut un peu mieux préciser les choses : donner une estimation du voisinage  $V$  dont l'existence est affirmée ci-dessus et décrire un procédé itératif pour calculer la fonction implicite. Plus précisément, avec les notations du théorème précédent, on a :

**Théorème 118.** *Supposons que  $F$  soit analytique. Soient  $x_0 \in \mathbb{E}$  et  $y_0 \in \mathbb{F}$  tels que  $F(x_0, y_0) = 0$  et que  $D_2F(x_0, y_0) : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{G}$  soit un isomorphisme. Notons*

$$\gamma_2(F, x_0, y_0) = \sup_{k \geq 2} \left\| D_2F(x_0, y_0)^{-1} \frac{D^k F(x_0, y_0)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k-1}}.$$

La fonction implicite associée à  $F$  est définie pour tout  $x \in \mathbb{E}$  tel que

$$\|x - x_0\| \leq \frac{3 - 2\sqrt{2}}{(1 + \|D_2F(x_0, y_0)^{-1}D_1F(x_0, y_0)\|^2)^{1/2} \gamma_2(F, x_0, y_0)}.$$

Elle vérifie

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq \frac{2 - \sqrt{2}}{2\gamma_2(F, x_0, y_0)}$$

pour tout  $x$  dans cette boule. De façon plus précise,  $(x, f(x))$  est l'unique solution du système

$$\mathcal{F}(u, y) = \begin{pmatrix} u - x \\ F(u, y) \end{pmatrix} = 0$$

dans la boule fermée

$$\bar{B} \left( (x_0, y_0), \frac{2 - \sqrt{2}}{2\gamma_2(F, x_0, y_0)} \right).$$

De plus, la suite de Newton  $(u_{k+1}, y_{k+1}) = N_{\mathcal{F}}(u_k, y_k)$  avec  $(u_0, y_0) = (x_0, y_0)$  converge vers  $(x, f(x))$ .

**Preuve** Notons que  $\mathcal{F}(u, y) = 0$  si et seulement si  $u = x$  et  $F(x, y) = 0$ . L'existence d'une telle solution est donnée par le Corollaire 103 et, pour ce faire, nous calculons les invariants  $\alpha(\mathcal{F}, u, y)$ ,  $\beta(\mathcal{F}, u, y)$  et  $\gamma(\mathcal{F}, u, y)$ . Nous avons

$$D\mathcal{F}(u, y) = \begin{pmatrix} \text{id}_{\mathbb{E}} & 0 \\ D_1F(u, y) & D_2F(u, y) \end{pmatrix}$$

et

$$D\mathcal{F}(u, y)^{-1} = \begin{pmatrix} \text{id}_{\mathbb{E}} & 0 \\ -D_2F(u, y)^{-1}D_1F(u, y) & D_2F(u, y)^{-1} \end{pmatrix}$$

si  $D_2F(u, y)$  est inversible. On en déduit l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \beta(\mathcal{F}, x_0, y_0) &= \|D\mathcal{F}(x_0, y_0)^{-1}\mathcal{F}(x_0, y_0)\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} x_0 - x \\ -D_2F(x_0, y_0)^{-1}D_1F(x_0, y_0)(x_0 - x) \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left( \|x - x_0\|^2 + \|D_2F(x_0, y_0)^{-1}D_1F(x_0, y_0)(x - x_0)\|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left( 1 + \|D_2F(x_0, y_0)^{-1}D_1F(x_0, y_0)\|^2 \right)^{1/2} \|x - x_0\|. \end{aligned}$$

De plus, pour tout  $k \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} &D\mathcal{F}(u, y)^{-1}D^k\mathcal{F}(u, y) \\ &= \begin{pmatrix} \text{id}_{\mathbb{E}} & 0 \\ -D_2F(u, y)^{-1}D_1F(u, y) & D_2F(u, y)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ D^kF(u, y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de sorte que

$$\gamma(\mathcal{F}, x_0, y_0) = \sup_{k \geq 2} \left\| D_2 F(x_0, y_0)^{-1} \frac{D^k F(x_0, y_0)}{k!} \right\|^{1/k-1} = \gamma_2(F, x_0, y_0).$$

La condition  $\alpha(\mathcal{F}, x_0, y_0) \leq 3 - 2\sqrt{2}$ , qui assure l'existence d'un unique zéro pour  $\mathcal{F}$  proche de  $(x_0, y_0)$ , est satisfaite dès que

$$\|x - x_0\| \left(1 + \|D_2 F(x_0, y_0)^{-1} D_1 F(x_0, y_0)\|^2\right)^{1/2} \gamma_2(F, x_0, y_0) \leq 3 - 2\sqrt{2}$$

qui est précisément l'hypothèse du théorème. Nous savons, par le Corollaire 103, qu'il existe alors un unique zéro du système  $\mathcal{F}(u, y) = 0$ . Par unicité, ce zéro est  $(x, f(x))$  et il vérifie

$$\|(x, f(x)) - (x_0, y_0)\| \leq \frac{2 - \sqrt{2}}{2\gamma(\mathcal{F}, x_0, y_0)} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2\gamma_2(F, x_0, y_0)}.$$

Par ce même corollaire, la suite de Newton associée au système  $\mathcal{F}(u, y) = 0$  et initialisée en  $(x_0, y_0)$  converge vers  $(x, f(x))$ .  $\square$