ps
psychologie

Markus Bühner
Matthias Ziegler

Statistik für Psychologen und Sozialwissenschaftler

PEARSON
Studium

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

3

ÜBERBLICK

» In diesem Kapitel erfolgt eine Einführung in die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Vermittlung von Kenntnissen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung erscheint vielen Psychologiestudierenden auf den ersten Blick ungewohnt und vielleicht sogar unnötig. Wieso sollte man sich Dinge wie den Additionssatz oder aber das Bayes-Theorem aneignen, wenn man doch „nur“ ein guter Therapeut werden will? Häufig wird die Sachlage auch noch dadurch erschwert, dass die zur Vermittlung gewählten Beispiele einen psychologischen Hintergrund vermissen lassen.

Bei dieser Kritik wird jedoch vergessen, dass niemand eine psychotherapeutische oder pädagogisch-psychologische Intervention einsetzen würde, ohne dass diese ihren Nutzen in einer empirischen Studie gezeigt hat. Das bedeutet, die Evaluation solcher Maßnahmen basiert neben inhaltlichen Gesichtspunkten immer auch auf den Ergebnissen von statistischen Analysen. In diesen Analysen werden jedoch nie ganze Populationen (z. B. alle Depressiven) betrachtet. Vielmehr werden aus den Populationen immer nur Stichproben gezogen. Aus einer Grundgesamtheit wird also, häufig per Zufall, eine Stichprobe gezogen. Die Personen in der Stichprobe werden dann befragt oder verschiedenen Tests unterzogen: Auf jeden Fall wird eine Messung vorgenommen (siehe Kapitel 2). Die Ergebnisse der Messungen aus dieser Stichprobe werden dann jedoch auf die Grundgesamtheit generalisiert, d.h. als allgemein gültig angesehen. Dabei können dem Forscher Fehler unterlaufen. Abstrakt formuliert sind die Werte der Messungen für die Personen in der Grundgesamtheit Elementarereignisse (siehe Abschnitt 3.1.4). Das Ziehen der Stichprobe entspricht der Durchführung eines Zufallsexperiments. Wie beim Lottospielen wird sich die Zusammensetzung der Personen bei verschiedenen Durchführungen unterscheiden. Dies hat nicht nur Konsequenzen für die Schlussfolgerungen, die gezogen werden, sondern beeinflusst auch die Stichprobenplanung. Neben diesen Aspekten wird der Begriff der Wahrscheinlichkeit häufig zur Verdeutlichung von Zusammenhängen in der Psychologie oder Medizin genutzt. So wissen wir alle seit PISA, dass die Wahrscheinlichkeit für gute schulische Leistungen mit dem sozioökonomischen Status der Eltern steigt. Zudem kennt jeder das Ergebnis, dass Rauchen die Wahrscheinlichkeit für Lungenkrebs erhöht. Ein weiterer Grund für die Bedeutung der hier dargestellten Inhalte ist die bessere Beurteilung der Auftretenswahrscheinlichkeit eines bestimmten Merkmals oder einer Diagnose. Wie wahrscheinlich ist eine Anorexia nervosa bei Frauen? Wie wahrscheinlich ist es, einen hochbegabten Menschen in der Population zu finden? Was bedeutet eine Wahrscheinlichkeit von x?

Aus diesen Gründen ist ein grundlegendes Wissen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung nötig. Daher werden in den folgenden Abschnitten die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung erläutert.

Zunächst ist der sichere Umgang mit bestimmten Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung notwendig. Der erste Abschnitt dieses Kapitels beschäftigt sich folgerichtig mit der Erläuterung von Grundbegriffen. Hiernach wird erklärt, auf welche Weise sich Wahrscheinlichkeiten für ein Zufallsereignis eigentlich bestimmen lassen.

Da es in der Forschung oft nicht nur um die Betrachtung einzelner Phänomene geht, wird anschließend dargestellt, wie sich Wahrscheinlichkeiten für mehrere, kombinierte Ereignisse bestimmen lassen. Den Abschluss des Kapitels bildet eine kurze Darstellung verschiedener Kombinatorikregeln, die zum Berechnen von Wahrscheinlichkeiten benötigt werden. «

3.1 Begriffsklärung

Im Folgenden werden einige wichtige Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung eingeführt. Das Verständnis dieser Begriffe ist nicht nur wichtig, um die restlichen Inhalte dieses Kapitels zu verstehen, sondern spielt auch bei anderen wichtigen Themen wie dem Hypothesentesten (siehe Kapitel 4) oder der Latent-State-Trait-Theorie (Steyer & Schmitt, 1990) eine Rolle.

Auch in diesem Abschnitt werden wir versuchen, die Inhalte anhand unserer Beispieluntersuchung, die in Kapitel 2 dargestellt wurde, zu verdeutlichen. In der Untersuchung wurde die Verfälschungsanfälligkeit von drei verschiedenen Methoden zur Erfassung der Leistungsmotivation untersucht (Ziegler, Schmidt-Atzert, Bühner & Krumm, 2007). Dazu wurden insgesamt $N = 119$ Personen zufällig auf drei Bedingungen (Fake-Good, Fake-Bad, Kontrollgruppe) verteilt.

3.1.1 Das Zufallsexperiment

Wie bereits in der Einleitung angedeutet, wird bei vielen Experimenten oder Studien lediglich eine Stichprobe aus der interessierenden Population gezogen. Die Ergebnisse aus dieser Stichprobe werden jedoch auf die Population generalisiert. Jeder kennt die Debatte um die PISA-Ergebnisse, die auf die gesamte Population aller 15jährigen Schüler ausgeweitet werden, obwohl nur eine Stichprobe untersucht wurde. Auch in unserem Beispiel werden auf der Basis einer Stichprobe aus Studierenden Schlussfolgerungen gezogen, die Allgemeingültigkeit haben sollen. Ein wichtiges Kennzeichen beider Beispiele ist, dass der Ausgang, d.h. das Ergebnis der Untersuchung, zu Beginn unklar war. Es bestanden vielleicht Hypothesen (z.B. Personen in der Fake-Good-Bedingung erzielen höhere Werte in Leistungsmotivationstests als Personen in der Kontrollbedingung), aber der genaue Ausgang war ungewiss. Ebenso verhielt es sich bei PISA. Auch hier war das genaue Abschneiden der Schüler in den Tests vor der Untersuchung nicht bekannt. Damit erfüllen beide Beispiele die Anforderung an ein so genanntes Zufallsexperiment.

Definition Zufallsexperimente sind Experimente (Untersuchungen) mit zufälligem (nicht genau vorhersagbarem) Ergebnis (Ausgang).

Ein ganz einfaches Beispiel für ein Zufallsexperiment ist das Würfeln. Jeder weiß, es sind nur Zahlen zwischen eins und sechs erzielbar. Dennoch ist das genaue Ergebnis vor jedem Würfeln ungewiss. Lediglich die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Augenzahl können wir bestimmen. Ebenso ist die Durchführung einer Psychotherapie ein Zufallsexperiment. Es kann nicht mit Gewissheit gesagt werden, ob sie erfolgreich sein wird. Auch hier lässt sich nur eine gewisse Erfolgswahrscheinlichkeit auf der Basis vorheriger Untersuchungen ausdrücken.

Betrachten wir unsere Beispieluntersuchung, können wir auch hier das Prinzip des Zufallsexperiments veranschaulichen. Um die Verfälschungsanfälligkeit zu untersuchen, wurden die Mittelwerte der drei Gruppen (Fake-Good, Fake-Bad, Kontrollgruppe) verglichen. Würden wir die Untersuchung genauso wiederholen, jedoch mit einer anderen Stichprobe, würden sich die Mittelwerte der jeweiligen Gruppen von denen aus der ersten Untersuchungsdurchführung sicher unterscheiden. Das bedeutet, dass aufgrund der zufälligen Zusammensetzung der Stichproben Unterschiede zwischen den Mittelwerten entstehen. Das Prinzip des Zufalls, das beim Würfelbeispiel ganz offensichtlich ist, greift bei der Zusammensetzung der Stichproben und damit auch bei der Ausprägung der Mittelwerte. In beiden Fällen handelt es sich um Zufallsexperimente, da das Ergebnis vorab nicht vorhersagbar ist.

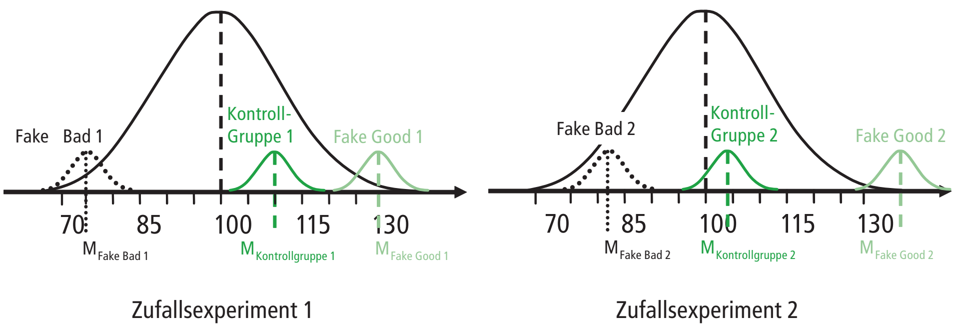


Abbildung 3.1: Zufallsexperimente

Abbildung 3.1 veranschaulicht diese Grundidee noch einmal. Auf der linken Seite ist die erste Durchführung der Untersuchung angedeutet. Die große, schwarze Kurve stellt die Verteilung der Leistungsmotivation in der Population dar. Aus dieser Population werden drei Stichproben gezogen. Jede Stichprobe bearbeitet das gleiche Leistungsmotivationsmessinstrument, jedoch mit verschiedenen Instruktionen. So ergibt sich in jeder Gruppe eine neue Verteilung, die einen bestimmten Mittelwert hat. In der linken Abbildung erzielt die Fake-Bad-Gruppe den kleinsten Wert, gefolgt von der

Kontroll- und der Fake-Good-Gruppe. Auf der rechten Seite der Abbildung ist eine zweite Durchführung des gleichen Experiments dargestellt. Erneut ziehen wir aus der gleichen Grundgesamtheit eine Stichprobe, die wir auf die drei Bedingungen aufteilen. Wir erwarten etwa die gleichen Mittelwerte. Zudem sollte auch die Reihung der Gruppenmittelwerte repliziert werden, wenn unsere Manipulation einen robusten Effekt verursacht hat. Dies ist auch der Fall. Wie wir jedoch sehen, unterscheiden sich die jeweiligen Gruppenmittelwerte zwischen den beiden Durchführungen. Dies beruht darauf, dass sich die beiden Stichproben unterscheiden, insofern sie *zufällig* aus der Population gezogen wurden. Die Bestimmung eines Stichprobenmittelwerts ist also ein Zufallsexperiment, das sich beliebig oft wiederholen lässt – entsprechend dem Werfen eines Würfels. Auf der Basis des ersten Zufallsexperiments ließe sich zwar ein ungefährer Bereich bestimmen, in dem der jeweilige Mittelwert in einer nächsten Untersuchung liegen sollte, aber auch diese Aussage wäre nicht gewiss, sondern mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit verbunden (siehe Standardfehler des Mittelwerts in Kapitel 4). Somit sind Stichprobenmittelwerte Zufallsvariablen.

Verallgemeinernd lässt sich sagen, dass es für jedes mögliche Ergebnis eines Zufallsexperiments eine bestimmte Wahrscheinlichkeit gibt. Diese wird häufig mit einem kleinen p (probability) versehen. So lässt sich zum Beispiel sagen, die Wahrscheinlichkeit, beim Würfeln eine Sechs zu erzielen, beträgt $p = 1/6$. Genauso kann auch die Erfolgswahrscheinlichkeit für eine Psychotherapie ausgedrückt werden (z. B. $p = 0.7$).

Exkurs

An dieser Stelle sei auf den Unterschied zwischen Wahrscheinlichkeit und Likelihood hingewiesen. Der Begriff der Likelihood taucht bei vielen statistischen Analysen auf (z. B. Faktorenanalyse). Fälschlicherweise wird er oft mit Wahrscheinlichkeit übersetzt. Es ist allerdings auch schwierig, eine adäquate deutsche Übersetzung zu finden. Ein Unterschied zwischen Wahrscheinlichkeit und Likelihood liegt im Wertebereich. Während Wahrscheinlichkeiten Werte zwischen null (= kommt nicht vor) und eins (= kommt immer vor) annehmen können, kann eine Likelihood auch größer als eins werden. Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten von distinkten Ereignissen aus einem Ereignisraum eins ergibt. Bei Likelihoods kann diese Summe auch größer als eins werden. Mathematisch lässt sich der Unterschied zwischen Likelihood und Wahrscheinlichkeit am besten so ausdrücken: „Erstere ist eine Funktion irgendwelcher Parameter für gegebene Beobachtungen, während letztere eine Funktion der Beobachtungen für gegebene Parameter ist." (Draxler, 2007, S. 109). Nehmen wir zur Veranschaulichung einen Münzwurf. Als Ergebnis kann entweder Kopf oder Zahl fallen. Die Wahrscheinlichkeit für Kopf oder Zahl ist jeweils 50 Prozent. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt sich aus der Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse, also aus den Wahrscheinlichkeiten für Kopf bzw. Zahl. Das heißt, die Wahrscheinlichkeiten sind fest. Das ist in dem oberen Satz mit gegebenen Parametern gemeint. Kopf oder Zahl sind die möglichen Beobachtungen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist also eine Funktion der möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments für gegebene feste Werte der Wahrscheinlichkeiten für Kopf oder Zahl. Im Gegensatz dazu nehmen wir bei der Betrachtung der Likelihood an, dass die Beobachtungen gegeben sind. Es ist also bereits entweder Kopf oder Zahl gefallen. Die Likelihoodfunktion ist nun eine Funktion der Wahrscheinlichkeit für Kopf (oder Zahl). Das heißt, die Funktionswerte (y-Werte) variieren in Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit für Kopf (oder Zahl).

3.1.2 Die Zufallsvariable

In dem oberen Beispiel wurde dargestellt, dass ein Stichprobenmittelwert eine Zufallsvariable ist. Zufallsvariablen können als Ergebnisse von Zufallsexperimenten verstanden werden.

Definition Die Zufallsvariable X ist eine Funktion, die den Ergebnissen eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zuordnet. Diese Zahlen können diskret (z. B. Augenzahl beim Würfeln) oder stetig sein (z. B. Stichprobenmittelwert).

Während beim Würfeln die Augenzahlen die Zufallsvariablen sind, sind es bei unserer Fakinguntersuchung die Mittelwerte.

In der Einführung haben wir darauf hingewiesen, dass auf Basis der Stichprobenergebnisse auf Populationsverhältnisse geschlossen wird. Damit dieser Schluss möglichst valide, d.h. zutreffend ist, sollte die Stichprobe in vielen Charakteristiken mit der Population übereinstimmen. Solche Charakteristiken können Alter, Geschlecht, Bildungsgrad, sozioökonomischer Status, Wohnort, etc. sein. Allerdings kann auch die Ausprägung des zu untersuchenden Merkmals selbst ein wichtiger Aspekt der Stichprobe sein. Sollen zum Beispiel Aussagen über die Intelligenzstruktur bei Hochbegabten gemacht werden, so sollten die Personen, die in die Stichprobe gezogen werden, einen bestimmten IQ haben. Genauso ließe sich für unser Fakingexperiment überlegen, nur Personen mit einer überdurchschnittlichen Leistungsmotivation zu untersuchen. Aus den Erläuterungen zur Normalverteilung (siehe Kapitel 2) ist bekannt, dass sich Personen aufgrund ihrer Ausprägung in einem Merkmal grob in drei Klassen aufteilen lassen: unterdurchschnittlich, durchschnittlich und überdurchschnittlich. Ziehen wir nun Personen aus der gesamten Breite des Leistungsmotivationsspektrums, so beschreiben diese Klassen die möglichen Ausgänge dieses Zufallsexperiments. Die Person kann entweder unterdurchschnittlich, durchschnittlich oder überdurchschnittlich leistungsmotiviert sein. In diesem Zusammenhang wäre die Klassenzugehörigkeit eine Zufallsvariable, die den möglichen Ausgang beim Ziehen von Personen in die Stichprobe beschreibt.

3.1.3 Der Ereignisraum

Beim Würfeln kann man schon vor dem Wurf alle möglichen Ergebnisse für das Zufallsexperiment benennen, nämlich die sechs Augenzahlen von eins bis sechs. Bei den Stichprobenmittelwerten dagegen ist allenfalls ein Wertebereich zu benennen, in dem die Zufallsvariablen liegen. In beiden Fällen wird dieser Bereich als Ereignisraum bezeichnet.

Nehmen wir die Stichprobenmittelwerte in der Fakinguntersuchung, so gibt es theoretisch unendlich viele mögliche Ausgänge des Zufallsexperiments, da es sich hier um eine stetige Variable handelt. Dennoch gibt es ein theoretisches Minimum sowie Maximum aufgrund der Punkt- bzw. Wertegrenzen des eingesetzten Instruments. Auf jeden Fall begrenzt ist freilich, wie viele Zufallsstichproben von z. B. N = 119 Personen man aus der endlichen Population ziehen kann. Dies kann mithilfe von Formeln (siehe Abschnitt 3.4) berechnet werden.

Abbildung 3.2: Veranschaulichung eines leeren Ereignisraums

Definition Der Ereignisraum Ω (Omega) beschreibt die Menge aller möglichen Ereignisse (Ergebnisse) eines Zufallsexperiments.

So gesehen definiert der Ereignisraum die Grenzen, innerhalb derer sich die möglichen Ausgänge eines Zufallsexperiments bewegen können. Damit stellt der Ereignisraum den Wertebereich für die Zufallsvariablen dar. Dies ist in Abbildung 3.2 dargestellt.

Abbildung 3.3 zeigt die möglichen Ausgänge beim einmaligen Würfeln und den dazugehörigen Ereignisraum.

Die möglichen Ereignisse nach dem einmaligen Werfen mit einem sechsseitigen Würfel sind:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Abbildung 3.3: Ereignisraum

Würden wir aus unserer Stichprobe willkürlich 10 Personen ziehen und das Verhältnis Männer zu Frauen bestimmen, so ist der Ereignisraum $\Omega = \{0{:}10, 1{:}9, 2{:}8, 3{:}7, 4{:}6, 5{:}5, 6{:}4, 7{:}3, 8{:}2, 9{:}1, 10{:}0\}$.

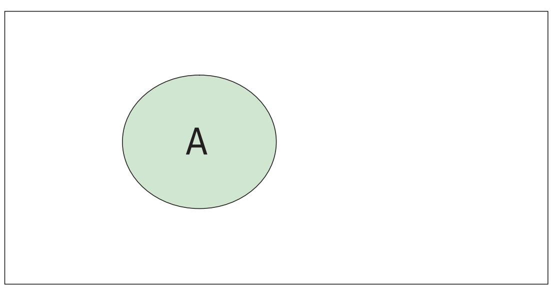
Betrachten wir die Stichprobenmittelwerte als Ergebnisse des Zufallsexperiments, so lässt sich auch hierfür der Ereignisraum bestimmen. Nehmen wir an, bei dem eingesetzten Instrument handelt es sich um das Leistungsmotivationsinventar in der Kurzform (Schuler & Prochaska, 2001). Die Kurzform besteht aus 30 Items mit einer siebenstufigen Antwortskala. Der minimal erreichbare Wert wäre also 30 und das Maximum 210. Demzufolge ist der Ereignisraum $\Omega = \{30, ..., 210\}$. Zwischen diesen Endpunkten ist jede beliebige Zahl als möglicher Stichprobenmittelwert denkbar.

Auch beim Ziehen von Personen in eine Stichprobe lässt sich so ein Ereignisraum bestimmen. Nehmen wir wieder an, wir klassifizieren die Personen aufgrund ihrer Leistungsmotivationsausprägung als unterdurchschnittlich, durchschnittlich oder überdurchschnittlich. Ziehen wir nun eine Person aus der Population, ergibt sich folgender Ereignisraum: $\Omega = \{$unterdurchschnittlich, durchschnittlich, überdurchschnittlich$\}$.

3.1.4 Das Elementarereignis

Offensichtlich beinhaltet der Ereignisraum mehrere mögliche Ausgänge eines Zufallsexperiments. Jedes einzelne Element dieses Ereignisraums wird als Elementarereignis bezeichnet.

Definition Ein Elementarereignis ist einer von mehreren möglichen Ausgängen eines Zufallsexperiments.



Elementarereignis A

Abbildung 3.4: Elementarereignis im Ereignisraum

Aus der Kenntnis des Ereignisraums lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für jedes einzelne Elementarereignis bestimmen (siehe Abschnitt 3.2). Oft ist es von Interesse, nicht nur die Wahrscheinlichkeit für ein einzelnes Elementarereignis, sondern für die Verknüpfung mehrerer Elementarereignisse zu bestimmen. Kombinationen von Elementarereignissen werden als Ereignisse bezeichnet.

Definition Ereignisse können sich aus einer Kombination von mehreren Elementarereignissen zusammensetzen.

Sowohl Elementarereignisse als auch Ereignisse sind also Ausgänge von Zufallsexperimenten und entsprechen den numerischen Werten einer Zufallsvariablen.

Nehmen wir als Beispiel für ein Ereignis zunächst wieder das Würfelspielen. Der Ereignisraum ließe sich auch anders beschreiben. So haben wir drei Zahlen, die größer als drei sind und zwei Zahlen, die kleiner als drei sind. Zudem könnte der Ereignisraum auch nach geraden und ungeraden Zahlen aufgeteilt werden. Nun ließe sich die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „gerade Zahl, die größer als drei ist" bestimmen. In diesem Ereignis sind zwei Charakteristika verknüpft.

Gerade die Kombination von Elementarereignissen ist bei der Stichprobenziehung relevant. So lassen sich Personen nicht nur nach der Ausprägung ihrer Leistungsmotivation klassifizieren, sondern beispielsweise auch nach dem Geschlecht. So ließe sich die Faking-Untersuchung noch weiter einschränken. Es wäre denkbar, nur weibliche Personen, die überdurchschnittlich leistungsmotiviert sind, in die Stichprobe aufzunehmen.

Durch die Kombination von Elementarereignissen zu Ereignissen wird der Ereignisraum sozusagen weiter unterteilt. Es werden innerhalb des Ereignisraums Elementarereignisse zusammengefasst.

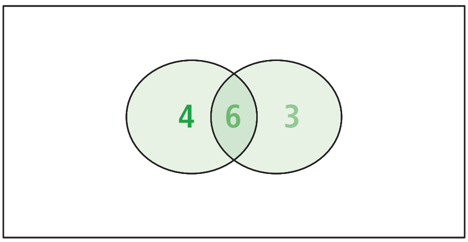
Auch Ereignisse lassen sich so weiter kombinieren. Dabei können zwei Regeln unterschieden werden: das logische UND sowie das logische ODER.

3.1.5 Das logische UND

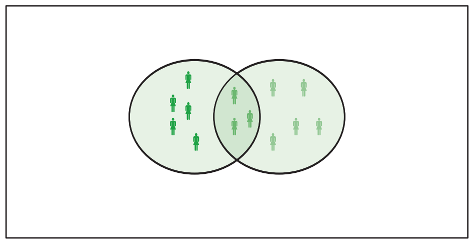
Mögliche Ereignisse beim Würfelspielen wären gerade Zahlen, die auch größer als drei sind (Ereignis A) oder aber auch Zahlen, die durch 1.5 teilbar sind (Ereignis B). Beim Stichprobenziehen sind mögliche Ereignisse überdurchschnittlich leistungsmotivierte Frauen (Ereignis A) oder aber auch Frauen, die älter als zwanzig sind (Ereignis B). In beiden Fällen teilen die Ereignisse bestimmte Elemente. Beim Würfelbeispiel ist das die Zahl Sechs und beim Stichprobenziehen alle überdurchschnittlich leistungsmotivierten Frauen, die älter als zwanzig sind. Abbildung 3.5 stellt beide Beispiele noch einmal dar. Auf der linken Seite ist ein Ausschnitt aus dem Ereignisraum für das Würfelspielen dargestellt. Die Ereignisse A und B sowie ihre Schnittfläche sind abgebildet. In der rechten Hälfte der Abbildung zeigt der rechte Kreis (hellgrüne Figuren) das

Ereignis A, eine überdurchschnittlich leistungsmotivierte Frau, an. Der zweite Kreis (dunkelgrüne Figuren) zeigt das Ereignis B, eine Frau älter als zwanzig, an. Die beiden Kreise überlappen sich. In diesem Überlappungsbereich befinden sich Frauen, die in beide Ereignisse fallen. In diesem Zusammenhang wird auch vom logischen UND gesprochen.

Definition Das logische UND (Konjunktion) beschreibt die Schnittmenge, die durch das gleichzeitige Auftreten zweier Ereignisse entsteht.



Schnittmenge A ∩ B



Schnittmenge A ∩ B

Abbildung 3.5: Das logische UND

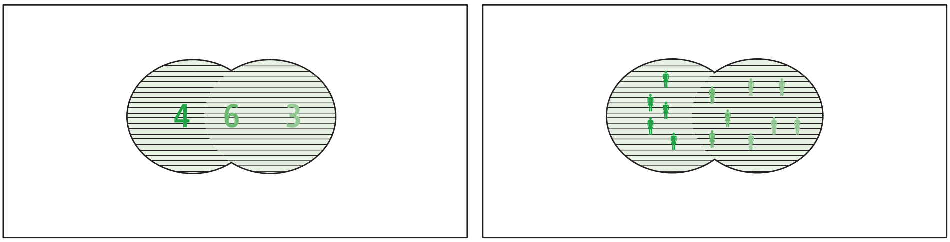
Aus den Beispielen wird deutlich, dass es Zahlen beziehungsweise Personen gibt, die sowohl die Merkmale des einen als auch des anderen Ereignisses besitzen. Erst dadurch entsteht die Schnittmenge zwischen den Ereignissen. Mathematisch wird dies durch das Zeichen ∩ (sprich: ‚geschnitten mit' oder ‚und') ausgedrückt. Wie die Wahrscheinlichkeit bestimmt wird, dass das Ergebnis eines Zufallsexperiments der Schnittmenge aus den beiden Ereignissen entspricht, wird im Abschnitt 3.3.3 dargestellt.

3.1.6 Das logische ODER

Während das logische UND die Schnittmenge von Ereignissen betrachtet, geht es beim logischen ODER um die Vereinigungsmenge.

Definition Das logische ODER (Disjunktion) beschreibt die Vereinigungsmenge, die durch das Auftreten eines von zwei möglichen Ereignissen entsteht.

Für unser Würfelbeispiel lautet die Vereinigungsmenge gerade Zahlen, die größer als drei sind (Ereignis A) **oder** Zahlen, die durch 1,5 teilbar sind (Ereignis B). Auch für das Beispiel der Stichprobenziehung gibt es eine Vereinigungsmenge. Sie lautet überdurchschnittlich leistungsmotivierte Frauen (Ereignis A) **oder** Frauen, die älter als zwanzig sind (Ereignis B). Egal, ob die Augenzahl 3, 4 oder 6 gewürfelt wird, alle diese Zahlen gehören zur Vereinigungsmenge. Ebenso verhält es sich bei den überdurchschnittlich leistungsmotivierten Frauen oder den Frauen älter als zwanzig.



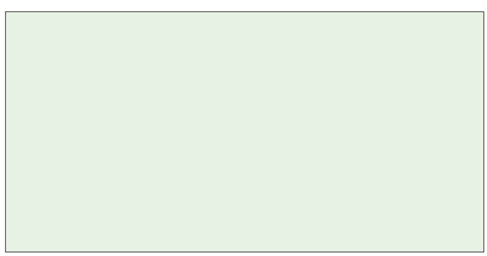
Vereinigungsmenge A ∪ B   Vereinigungsmenge A ∪ B

Abbildung 3.6: Das logische ODER

Dieses Prinzip ist in Abbildung 3.6 noch einmal für beide Beispiele veranschaulicht. Die durchgezogenen Linien deuten an, dass jedes Element innerhalb dieses Bereichs zur Vereinigungsmenge gehört und somit die Bedingungen des logischen ODER erfüllt. Mathematisch wird dies durch das Zeichen ∪ (sprich: ‚oder') ausgedrückt. Wie die Wahrscheinlichkeit bestimmt wird, dass das Ergebnis eines Zufallsexperiments der Vereinigungsmenge aus den beiden Ereignissen entspricht, wird im Abschnitt 3.3.2 dargestellt.

3.1.7 Das sichere Ereignis

Wie die Bezeichnung andeutet, hat das sichere Ereignis eine Auftretenswahrscheinlichkeit von $p(A) = 1$. Somit ist das sichere Ereignis die Kombination aller Elementarereignisse im Ereignisraum und tritt in jedem Fall als Ergebnis eines Zufallsexperiments auf. Dies ist in Abbildung 3.7 durch die hellgrüne Fläche im Ereignisraum angedeutet.



Das sichere Ereignis

Abbildung 3.7: Das sichere Ereignis

Das sichere Ereignis beim Würfeln lautet, eine Augenzahl zwischen eins und sechs zu erzielen. Bei unseren Stichprobenbeispielen wäre es eine Frau oder einen Mann bzw.

eine Person, die unterdurchschnittlich, durchschnittlich oder überdurchschnittlich leistungsmotiviert ist.

3.1.8 Das unmögliche Ereignis

Genauso wie es ein sicheres Ereignis gibt, gibt es auch ein unmögliches Ereignis. Das unmögliche Ereignis tritt nie auf und hat damit eine Wahrscheinlichkeit von $p(A) = 0$. So lässt sich beim Würfeln keine Zahl erzielen, die kleiner als drei und durch vier teilbar ist, genauso wenig kann eine Zahl größer als sechs erzielt werden. Bei unserem Stichprobenbeispiel ist die Veranschaulichung nicht ganz so leicht. Aber nehmen wir an, wir müssten aus der Schnittmenge der überdurchschnittlich leistungsmotivierten Frauen, die älter als zwanzig sind, erneut eine Stichprobe ziehen. Jetzt ist es unmöglich, einen Mann zu ziehen oder eine durchschnittlich leistungsmotivierte Frau oder eine Frau, die jünger als zwanzig ist. Das Beispiel mag weit hergeholt erscheinen, dennoch kann es vorkommen, dass bei der Stichprobenziehung nach unmöglichen Ereignissen gesucht wird. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn man versucht, aus einer Population von 120 Psychologiestudenten des ersten Semesters 80 Hochbegabte zu rekrutieren. Das unmögliche Ereignis wird noch einmal in Abbildung 3.8 veranschaulicht.

Abbildung 3.8: Das unmögliche Ereignis

Wie aus der Abbildung deutlich wird, hat das unmögliche Ereignis einen leeren Ereignisraum.

3.1.9 Komplementärereignis

Das sichere und das unmögliche Ereignis können auch als Gegenstücke verstanden werden. Das Auftreten des einen Ereignisses schließt das Auftreten des anderen Ereignisses aus. Zusammengenommen ergeben sie den gesamten Ereignisraum. Hierfür wird auch der Begriff Komplementärereignis genutzt.

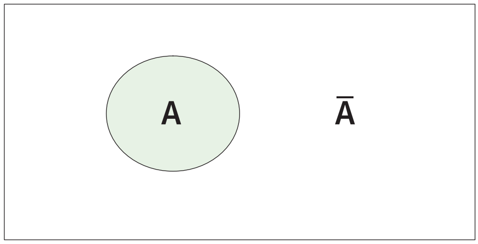


Abbildung 3.9: Komplementärereignisse

Abbildung 3.9 verdeutlicht das Prinzip von Komplementärereignissen. Der Kreis stellt das Ereignis A dar. Alle Elementarereignisse, die nicht dem Ereignis A zugeordnet werden können, bilden das Komplementärereignis $\bar{A}$. Somit beschreiben beide Komplementärereignisse den kompletten Ereignisraum, schließen sich aber gegenseitig aus. Sie können also nie gleichzeitig auftreten und haben demnach auch keine Schnittmenge bzw. eine gemeinsame leere Menge.

Zusammen haben beide Komplementärereignisse eine Wahrscheinlichkeit von eins. Komplementärereignisse müssen demnach nicht immer mit den Wahrscheinlichkeiten eins beziehungsweise null versehen sein. Wichtig ist lediglich, dass die Summe der beiden Einzelwahrscheinlichkeiten eins ergibt. Eine Verknüpfung durch das logische ODER ergibt somit das sichere Ereignis.

Mathematisch lässt sich dies folgendermaßen ausdrücken:

$$p(A) = 1 - p(\bar{A})$$
$$bzw.$$
$$p = 1 - q$$

p(A) = Wahrscheinlichkeit für Ereignis A

$p(\bar{A})$ = Wahrscheinlichkeit für das Komplementärereignis von A

p = Wahrscheinlichkeit für Ereignis A

q = Wahrscheinlichkeit für das Komplementärereignis von A

Dabei drückt p die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A und q die Wahrscheinlichkeit für das Komplementärereignis $\bar{A}$ aus.

3.1.10 Disjunkte Ereignisse

Komplementärereignisse schließen sich also gegenseitig aus und haben demnach keine Schnittmenge. Es lassen sich allerdings auch Ereignisse finden, die keine Schnittmenge haben, ohne dass sie Komplementärereignisse sind. In diesem Fall spricht man von disjunkten Ereignissen.

Definition Zwei Ereignisse A und B werden disjunkt genannt, wenn sie einander ausschließen. Somit können die Ereignisse A und B nicht gleichzeitig auftreten und haben keine Schnittmenge.

Der Unterschied zwischen Komplementärereignissen und disjunkten Ereignissen ist, dass die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten bei disjunkten Ereignissen nicht zwingend eins betragen muss und es somit auch mehrere disjunkte Ereignisse geben kann, während es immer nur Komplementärereignispaare gibt. Komplementärereignisse sind somit ein Spezialfall für disjunkte Ereignisse. Das Prinzip von disjunkten Ereignissen ist noch einmal in Abbildung 3.10 dargestellt.

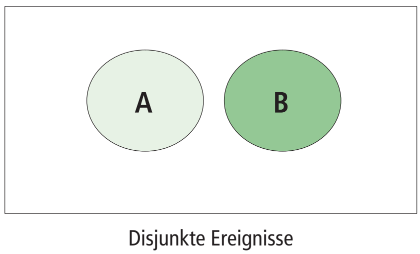


Abbildung 3.10: Disjunkte Ereignisse

3.1.11 Nicht-disjunkte Ereignisse

Teilen zwei Ereignisse eine Schnittmenge, lassen sich also sinnvoll mit einem logischen UND verknüpfen, dann spricht man von nicht-disjunkten Ereignissen.

Definition Zwei Ereignisse A und B sind nicht-disjunkt, wenn die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Auftreten dieser Ereignisse größer als null ist.

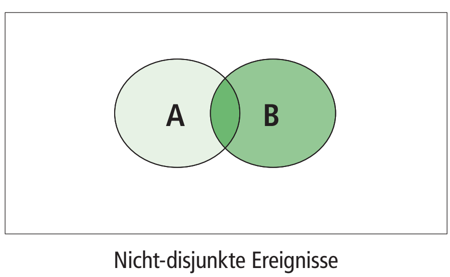


Abbildung 3.11: Nicht-disjunkte Ereignisse

Diese Definition wird noch einmal in Abbildung 3.11 verdeutlicht. Die Beispiele für die Kombination von Ereignissen mit dem logischen UND demonstrieren ebenfalls das Prinzip von nicht-disjunkten Ereignissen.

Nach der Einführung der wichtigsten Grundbegriffe stellt sich nun die Frage, wie sich Wahrscheinlichkeiten eigentlich bestimmen lassen. Dies wird in den folgenden zwei Abschnitten geklärt. Dabei wird noch unterschieden, ob lediglich die Wahrscheinlichkeit für ein einzelnes Zufallsereignis (3.2) oder aber für mehrere Zufallsereignisse (3.3) bestimmt werden soll.

3.2 Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis

Wie wahrscheinlich ist es, beim Würfeln eine Sechs zu werfen? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Stichprobenziehung eine überdurchschnittlich leistungsmotivierte Person gezogen wird? Die Antworten auf diese Fragen erfordern die Bestimmung einer konkreten Wahrscheinlichkeit p. Bei der Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeit p für ein einzelnes Ereignis werden zwei Wege unterschieden, die jeweils den Namen ihres Entwicklers tragen. Dies sind die Wahrscheinlichkeit nach Laplace und die Wahrscheinlichkeit nach Bernoulli. Beide Wege sowie die Unterschiede werden im Folgenden erläutert.

3.2.1 Wahrscheinlichkeit nach Laplace

Die Laplace-Wahrscheinlichkeit wird auch als „a priori"-Wahrscheinlichkeit bezeichnet. Dies bezieht sich darauf, dass die Laplace-Wahrscheinlichkeit bereits vor der Durchführung eines Zufallsexperiments berechenbar ist. Das Grundprinzip der Laplace-Wahrscheinlichkeit lautet:

$$p(A) = \frac{n_A}{N_{Gesamt}} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ereignisse}}$$

p(A) = Wahrscheinlichkeit für Ereignis A

n_A = Anzahl der günstigen Ereignisse

N_{Gesamt} = Anzahl der möglichen Ereignisse

Wie aus der Formel ersichtlich wird, muss bereits vor der Durchführung des Zufallsexperiments jedes Elementarereignis bekannt sein. Das bedeutet, jeder mögliche Ausgang des Zufallsexperiments (N_{Gesamt}) ist „a priori" feststellbar. Beim Würfeln lassen sich z.B. lediglich Augenzahlen zwischen eins und sechs erzielen. Damit ist auch jedes Elementarereignis bekannt. Vorausgesetzt wird zudem, dass die Wahrscheinlichkeiten für jedes Elementarereignis gleich sind. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, eine Sechs zu werfen, beträgt also $p(\text{Augenzahl} = 6) = 1/6$, da dies nur ein günstiges (n_A) unter den sechs möglichen Ereignissen ist. Die Formel lässt sich aber auch auf die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen, also der Kombination von Elementarereignissen anwenden. Soll die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl zu werfen, bestimmt werden, so befinden sich im Ereignisraum immer noch sechs mögliche Ereignisse. Davon sind jedoch nur drei Ereignisse (Augenzahlen Zwei, Vier, Sechs) günstig, da sie gerade Zahlen sind. Die Wahrscheinlichkeit beträgt also p(gerade Zahl) = 3/6 oder p(gerade Zahl) = ½.

Andere beliebte Beispiele für die Erläuterung der Laplace-Wahrscheinlichkeit sind Münzwerfen, Lotto oder Kartenspielen. Ein einfaches psychologisches Beispiel lässt sich auch wieder in der Stichprobenziehung finden. In unserem Beispieldatensatz befinden sich $N = 119$ Personen, von denen $n = 35$ Männer sind. Angenommen aus diesem Personenpool soll nun per Zufall eine Person gezogen werden. Wie wahrscheinlich ist es, dass es sich um einen Mann handelt? Die Anzahl der günstigen Ereignisse ist fünfunddreißig. Insgesamt sind einhundertneunzehn verschiedene Ereignisse möglich. Somit ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von p(Mann) = 35/119 ≈ 0.29.

Die Laplace-Wahrscheinlichkeit entspricht also im Prinzip der relativen Häufigkeit, mit der ein Ereignis im Ereignisraum vorhanden ist.

All diese Beispiele haben ein paar Gemeinsamkeiten, die verdeutlichen, welche Voraussetzungen gegeben sein müssen, um die Wahrscheinlichkeit nach Laplace anwenden zu können. So ist die Menge der möglichen Ereignisse immer bereits vor Durchführung des Zufallsexperiments bestimmbar. Mit anderen Worten: Die einzelnen Elemente des Ereignisraums lassen sich „a priori“ abzählen. Betrachtet man lediglich die einzelnen Elementarereignisse im Ereignisraum, so haben diese identische Auftretenswahrscheinlichkeiten. Beim Würfeln ist die Wahrscheinlichkeit für jede Augenzahl gleich groß. Auch in unserem Stichprobenbeispiel lässt sich das verdeutlichen. Egal, um welchen Mann es sich in der Stichprobe handelt, die Wahrscheinlichkeit, dass er zufällig gezogen wird, ist für jeden Mann gleich. Als letzte Gemeinsamkeit ist hervorzuheben, dass sich der Wertebereich für eine Wahrscheinlichkeit immer zwischen null und eins bewegt.

Aus dieser Zusammenfassung wird klar, dass sich die Laplace-Wahrscheinlichkeit auf viele Untersuchungen, Experimente und Fragestellungen nur schwer anwenden lässt. Das Hauptproblem besteht darin, dass es selten möglich ist, jedes mögliche Ergebnis des Zufallsexperiments „a priori“ zu kennen. Dadurch lässt sich die Größe des Ereignisraums und somit die Anzahl der möglichen Ereignisse nicht festlegen. Genauso problematisch kann es dann sein, die Anzahl der günstigen Ereignisse zu bestimmen. In diesen Fällen ist die Verwendung der Wahrscheinlichkeit nach Bernoulli angemessen.

3.2.2 Wahrscheinlichkeit nach Bernoulli

Nehmen wir an, es soll die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, aus einer bestimmten Population eine überdurchschnittlich leistungsmotivierte Person, gemessen am LMI-K, zu ziehen. Für die Verwendung der Wahrscheinlichkeit nach Laplace besteht das erste Problem in der genauen Spezifikation der Population. Mit der Antwort auf diese Frage wird auch die Anzahl der möglichen Ereignisse definiert. Sagen wir, es soll eine überdurchschnittlich leistungsmotivierte Person aus unserer Kontrollgruppe mit der Größe von $N = 41$ Personen gezogen werden. Durch diese klare Definition der Population ist die Anzahl der möglichen Ereignisse bekannt. Wie sieht es nun mit der Anzahl der günstigen Ereignisse aus? Diese lässt sich erst bestimmen, nachdem das Zufallsexperiment durchgeführt wurde und die Ergebnisse vorliegen. Die Anzahl der günstigen Ereignisse in unserem Beispiel lässt sich erst bestimmen, wenn wir uns die Ergebnisse der Personen im LMI-K anschauen. Die Personen mit einem Standardwert größer als 110 (siehe Kapitel 2) gelten als überdurchschnittlich. In unserer Kontrollgruppe haben fünfunddreißig Personen einen solchen Wert erzielt. Erst jetzt lässt sich die Wahrscheinlichkeit nach Laplace bestimmen.

In der Regel ist es aber eher selten möglich, die Population so genau einzugrenzen. Noch limitierender ist jedoch die Tatsache, dass die Merkmalsausprägungen der Personen vor der Durchführung des Zufallsexperiments selten bekannt sind, insofern sie oft erst durch die Durchführung bestimmt werden. Dies ist jedoch gerade bei der Stichprobenplanung problematisch. Wie viele Personen muss ich untersuchen, um $N = 100$ überdurchschnittliche Personen zu erhalten? Häufig werden zur Beantwortung solcher Fragen Annahmen über die Verteilungsform des Merkmals in der Population gemacht. Aufgrund der Kenntnis der Verteilungseigenschaften lassen sich dann wiederum Aussagen zur Stichprobenplanung machen. Geht man zum Beispiel von einer Normalverteilung aus, so sind lediglich sechzehn Prozent der Personen überdurchschnittlich. Es würden also 625 Personen benötigt, um 100 Personen mit überdurchschnittlicher Merkmalsausprägung zu erhalten. Dies könnten aber je nach Ziehungsglück auch mehr oder weniger sein. Was macht man aber, wenn keine Verteilungsannahmen gemacht werden können beziehungsweise die Anzahl der möglichen Elementarereignisse nicht „a priori“ bestimmbar ist? In diesem Fall wird die Bernoulli-Wahrscheinlichkeit genutzt.

Die Bernoulli-Wahrscheinlichkeit wird auch als „a posteriori“-Wahrscheinlichkeit bezeichnet. Das bedeutet, diese Wahrscheinlichkeit lässt sich erst nach der Durchführung eines Zufallsexperiments bestimmen. Der Grund dafür ist, dass sich erst dann der Ereignisraum bestimmen beziehungsweise abschätzen lässt. Der Bernoulli-Wahrscheinlichkeit liegt folgendes Theorem zugrunde:

$$\pi(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{n_A}{N}$$

$\pi(A)$ = Wahrscheinlichkeit für Ereignis A in der Population

n_A = Anzahl der günstigen Ausgänge

N = Häufigkeit, mit der ein bestimmtes Zufallsexperiment durchgeführt wird

lim = Grenzwert der Wahrscheinlichkeit, wenn N gegen unendlich strebt

Der erste Unterschied zur Wahrscheinlichkeit nach Laplace ist, dass hier der griechische Buchstabe π statt dem *p* als Parameter für die Wahrscheinlichkeit verwendet wird. Dies liegt daran, dass bei der Bernoulli-Wahrscheinlichkeit der Wert für die Population bestimmt wird. Ebenso wie bei den deskriptiven Statistiken, als wir Mittelwert und Varianz in der Population mit μ und σ^2 bezeichnet haben, wird dies durch die Verwendung eines griechischen Buchstabens verdeutlicht. Auch bei der Bernoulli-Wahrscheinlichkeit wird eine relative Häufigkeit berechnet. Im Nenner des Bruchs steht die Häufigkeit, mit der ein bestimmtes Zufallsexperiment durchgeführt wurde (N). Im Zähler wiederum befindet sich die Anzahl der Ausgänge, die günstig im Sinne der Fragestellung waren (n_A). Auf den ersten Blick ähnelt dies der relativen Häufigkeit bei der Laplace-Wahrscheinlichkeit. Dort wird jedoch die Anzahl der günstigen Ereignisse an der Anzahl der insgesamt möglichen relativiert. Diese Anzahl ist jetzt aber unbekannt. Als Lösung wird im Prinzip geschaut, wie häufig ein Zufallsexperiment zum Wunschergebnis führt. Die Idee dabei ist, dass diese relative Wahrscheinlichkeit sich der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses in der Population annähert, je größer die Anzahl der durchgeführten Zufallsexperimente ist. Würde das Zufallsexperiment unendlich oft durchgeführt werden, ließe sich die genaue Wahrscheinlichkeit bestimmen, da nun wieder jedes Element bekannt wäre. Dieser Sachverhalt wird durch den mathematischen Term Limes (lim) ausgedrückt. Der Limes ist der Grenzwert. Bei der Bernoulli-Wahrscheinlichkeit bedeutet das, dass der Grenzwert der angegebenen relativen Häufigkeit die „wahre" relative Häufigkeit (π) in der Population ist. Ein Beispiel soll dieses Prinzip verdeutlichen.

In der Forschung wird häufig die Frage gestellt, wie wahrscheinlich das Auftreten eines bestimmten Merkmals beziehungsweise einer bestimmten Merkmalsausprägung ist. Nehmen wir an, es soll die Wahrscheinlichkeit für eine überdurchschnittliche Leistungsmotivation (Standardwert > 110) bei Männern bestimmt werden, ohne dass bekannt ist, wie sich das Merkmal in der Population verteilt. Hierzu müssen per Zufall Männer aus der Population gezogen und untersucht werden. Nehmen wir weiterhin an, dass in einem ersten Schritt zwanzig Männer untersucht werden, von denen bei einem Mann die Diagnose gestellt werden kann. Die Bernoulli-Wahrscheinlichkeit beträgt demnach:

$$\pi(LM > 110) = \frac{1}{20} \rightarrow 5\%$$

Auf Basis dieser kleinen Stichprobe würden wir die Wahrscheinlichkeit für einen überdurchschnittlich leistungsmotivierten Mann auf lediglich fünf Prozent schätzen. In einem nächsten Schritt werden nun weitere 100 Männer untersucht. Die Testergebnisse zeigen, dass elf dieser Männer eine überdurchschnittliche Leitungsmotivation haben. Die Gesamtstichprobe umfasst nun 120 Männer, von denen zwölf überdurchschnittlich leistungsmotiviert sind. Die Bernoulli-Wahrscheinlichkeit ist nun:

$$\pi(LM > 110) = \frac{12}{120} \rightarrow 10\%$$

Nun wird versucht, das Ergebnis gut abzusichern, und es werden weitere achthundertundachtzig Männer untersucht. In dieser Stichprobenerweiterung sind zusätzlich einhundertsechsundvierzig Männer überdurchschnittlich leistungsmotiviert. Die Bernoulli-Wahrscheinlichkeit ist jetzt:

$$\pi(LM > 110) = \frac{158}{1000} \rightarrow 15.8\%$$

Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit, einen überdurchschnittlich leistungsmotivierten Mann aus der Population zu ziehen, ungefähr sechzehn Prozent. Das entspricht dem Anteil, der bei Normalverteilung des Merkmals zu erwarten wäre.

Das Beispiel soll verdeutlichen, dass die „tatsächliche" Wahrscheinlichkeit immer besser geschätzt wird, je größer die Stichprobe ist. Jede Person in der Stichprobe stellt ein Zufallsexperiment dar. Die möglichen Ausgänge sind: Überdurchschnittliche Leistungsmotivation liegt vor oder liegt nicht vor. Je öfter dieses Zufallsexperiment durchgeführt wird, desto genauer reflektiert die Bernoulli-Wahrscheinlichkeit die Verhältnisse in der Population. Es ist an dieser Stelle jedoch wichtig darauf hinzuweisen, dass dies nur gilt, wenn es sich tatsächlich um Zufallsexperimente handelt. Das bedeutet: Lediglich, wenn die Personen tatsächlich zufällig aus der Population gezogen werden, ist diese Bedingung erfüllt. Gerade bei der Schätzung der Auftretenswahrscheinlichkeit eines Merkmals ist also nicht nur auf die Größe der Stichprobe, die zur Schätzung verwendet wurde, zu achten. Daneben ist es auch wichtig, unter welchen Umständen die Stichprobe gezogen wurde.

Die Prinzipien der Laplace- und der Bernoulli-Wahrscheinlichkeit werden noch einmal in der folgenden Tabelle gegenübergestellt.

	Laplace-Wahrscheinlichkeit	**Bernoulli-Wahrscheinlichkeit**
Anzahl der möglichen Ereignisse	a priori bekannt	entspricht Anzahl der durchgeführten Zufallsexperimente
Anzahl der günstigen Ereignisse	kann a priori abgezählt werden	wird auf Basis der Ergebnisse der durchgeführten Zufallsexperimente a posteriori bestimmt
Wahrscheinlichkeit der Elementarereignisse	gleich groß	variiert in Abhängigkeit der Größe der Zufallsstichprobe sowie des Ausmaßes an Zufall bei der Ziehung der Ereignisse
Wertebereich	null bis eins	null bis eins

Tabelle 3.1: Laplace- und Bernoulli-Wahrscheinlichkeit im Vergleich

In vielen Fällen soll nicht nur die Wahrscheinlichkeit für ein einzelnes Ereignis bestimmt werden. Stattdessen werden bestimmte Zusammenhänge zwischen den Ereignissen beziehungsweise Verknüpfungen angenommen. Auch hierfür lassen sich Wahrscheinlichkeiten bestimmen. Das Vorgehen wird im folgenden Abschnitt beschrieben.

3.3 Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für das Eintreten mehrerer Zufallsereignisse

Die nächsten Ausführungen beziehen sich auf drei Fragen. Das Gemeinsame ist, dass in allen drei Fragen Ereignisse verknüpft werden. So geht es (1) zunächst darum, dass ein bestimmtes Ereignis nur dann eintritt, wenn ein anderes Ereignis vorausgegangen ist. Dies ist die Frage nach der bedingten Wahrscheinlichkeit. Ein anderes Problem (2) beschäftigt sich damit, wie wahrscheinlich es ist, dass mindestens ein Ereignis von mehreren alternativ möglichen eintritt. Hierfür wird der Additionssatz benötigt. Schließlich wird der Multiplikationssatz genutzt, um zu klären, wie wahrscheinlich es ist, dass mehrere Ereignisse gleichzeitig (3) auftreten.

3.3.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Stellen wir uns zur Veranschaulichung vor, dass die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden soll, mit der eine Person aus der Fake-Good-Gruppe ein überdurchschnittliches Ergebnis im Leistungsmotivationstest (LM > 110) erzielt. Die Frage ist also, wie wahrscheinlich es ist, dass eine Person als überdurchschnittlich leistungsmotiviert klassifiziert wird, **wenn** sie zur Fake-Good-Gruppe gehört. Das „Wenn" in diesem Satz verdeutlicht, dass als Bedingung für das Eintreten des Ereignisses ein anderes Ereignis vorgeschaltet wird. Es wird also die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis gesucht unter der Bedingung, dass ein weiteres Ereignis bereits eingetreten ist oder mit Sicherheit auftreten wird.

Die Formel für die Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit ist:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

$$bzw.$$

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

$p(A|B)$ = Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A gegeben Ereignis B

$p(A \cap B)$ = Schnittmenge von Ereignis A und Ereignis B

$p(B)$ = Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B

$p(B|A)$ = Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B gegeben Ereignis A

$p(A \cap B)$ = Schnittmenge von Ereignis A und Ereignis B

$p(A)$ = Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A, gegeben (in der Formel als | dargestellt) das Ereignis B [$p(A|B)$], ergibt sich also aus der Wahrscheinlichkeit für die Schnittmenge der beiden Ereignisse [$p(A \cap B)$], die an der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis

B relativiert wird. Es wird zudem deutlich, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit „A gegeben B“ nicht der Wahrscheinlichkeit „B gegeben A“ entspricht. Es wird jeweils an der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Bedingung relativiert.

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{günstig}{möglich}$$

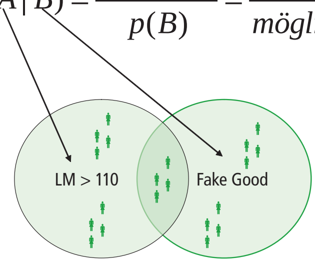


Abbildung 3.12: Veranschaulichung einer bedingten Wahrscheinlichkeit

Das Prinzip der bedingten Wahrscheinlichkeit ist noch einmal in Abbildung 3.12 dargestellt. Die Ereignisse A (Personen mit einem Leistungsmotivationswert größer als 110) und das Ereignis B (Personen in der Fake-Good-Gruppe) überlappen sich. Es handelt sich also um nicht-disjunkte Ereignisse. Alle Personen in der Überlappungsfläche haben eine Merkmalskombination, die günstig im Sinne der Fragestellung ist. Diese Personen haben einen Leistungsmotivationswert größer als 110 und erfüllen die Bedingung, zur Fake-Good-Gruppe zu gehören. Wie bei der Bestimmung der Laplace-Wahrscheinlichkeit wird die Anzahl der günstigen Ereignisse nun an der Anzahl der möglichen Ereignisse relativiert. Dabei werden nun nicht alle Personen mit einer überdurchschnittlichen Leistungsmotivation als mögliche Ereignisse betrachtet. Vielmehr müssen die möglichen Ereignisse zusätzlich die aufgestellte Bedingung, nämlich zur Fake-Good-Gruppe zu gehören, erfüllen. Die Bedingung stellt also die Begrenzung für die prinzipiell möglichen Ereignisse auf. Deswegen wird an der Wahrscheinlichkeit der Bedingung relativiert. In unserem Beispiel befinden sich insgesamt $N = 119$ Personen im Ereignisraum. Davon wurden $n = 37$ Personen der Fake-Good-Gruppe zugeteilt. Aus der Fake-Good-Gruppe können fünfundzwanzig Personen als überdurchschnittlich leistungsmotiviert klassifiziert werden. Diese Informationen können übersichtlich in einer Kreuztabelle angeordnet werden, die auch zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten sehr geeignet ist.

	LM>110	LM<110	Σ
Fake Good	25	12	37
Fake Bad+Kontrollgruppe	12	70	82
Σ	37	82	119

Tabelle 3.2: Kreuztabelle für die Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit

Die Spalten der Tabelle enthalten die beiden möglichen Ausgänge bezüglich der Ausprägung der Leistungsmotivation. In den Zeilen ist die Bedingung abgetragen. Aus der Kreuzung von beiden ergeben sich vier Zellen. Die für die Fragestellung interessante Zelle der Tabelle enthält den Wert 25. Schließlich sind noch die Randsummen angegeben.

Es ergeben sich also folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$p(LM > 110 \cap Fake\ Good) = \frac{25}{119}$$

$$p(Fake\ Good) = \frac{37}{119}$$

$$p(LM > 110 | Fake\ Good) = \frac{p(LM > 110 \cap Fake\ Good)}{p(Fake\ Good)} = \frac{\frac{25}{119}}{\frac{37}{119}} \approx .68$$

Die Wahrscheinlichkeit, eine überdurchschnittlich leistungsmotivierte Person aus der Fake-Good-Gruppe zu ziehen, beträgt also circa 68 Prozent.

Um die bedingte Wahrscheinlichkeit bestimmen zu können, benötigt man demnach die Wahrscheinlichkeit der Schnittmenge sowie die Wahrscheinlichkeit des bedingenden Ereignisses. Die Wahrscheinlichkeit der Schnittmenge ist jedoch nicht immer bekannt. Um dennoch die bedingte Wahrscheinlichkeit zu berechnen, kann das Bayes-Theorem genutzt werden:

$$p(A \mid B) = \left(\frac{p(A) \cdot p(B|A)}{p(B)} \right)$$

$p(A \mid B)$ = Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A gegeben Ereignis B

$p(B)$ = Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B

$p(B \mid A)$ = Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B gegeben Ereignis A

$p(A)$ = Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A

Hier benötigen wir zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A unter der Bedingung des Ereignisses B die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A, die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B sowie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B unter der Bedingung des Ereignisses A. Eine Arbeit von Schmidt (1988) soll dies verdeutlichen.

Schmidt wollte berechnen, wie wahrscheinlich es ist, dass eine Person männlich ist unter der Bedingung, dass sie auch alkoholabhängig ist. Er fand folgende Wahrscheinlichkeiten in der Population:

- p(männlich) ≈ .50
- p(alkoholabhängig) ≈ .10
- p(abhängig | männlich) ≈ .15

Die Schnittmenge aus beiden Ereignissen war zwar unbekannt, jedoch war die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „alkoholabhängig unter der Bedingung Mann“ bekannt. Nach dem Bayes-Theorem ergibt sich nun folgende bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$p = (männlich \mid abhängig) = \left(\frac{p(männlich) \cdot p(abhängig \mid männlich)}{p(abhängig)} \right) = \frac{.50 \cdot .15}{.10} = .75$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person männlich ist, wenn sie abhängig ist, beträgt also 75 Prozent.

Bei der bedingten Wahrscheinlichkeit besteht die Verknüpfung der beiden Ereignisse also darin, dass das Auftreten des einen Ereignisses an das Auftreten des anderen Ereignisses gebunden wird. Vereinfacht lässt sich dies auf die Formel „Wie wahrscheinlich ist A, wenn B vorliegt?“ bringen.

Im nächsten Abschnitt geht es nun um die Frage: „Wie wahrscheinlich ist es, dass Ereignis A oder B eintreffen?“

3.3.2 Additionssatz

Der Additionssatz wird genutzt, um die Wahrscheinlichkeit für die Vereinigungsmenge zweier Ereignisse zu berechnen. Somit müssen die Ereignisse durch ein logisches ODER verknüpft sein. Für unseren Beispieldatensatz ließe sich also berechnen, wie wahrscheinlich es ist, aus dem Datensatz eine Person zu ziehen, die entweder der Fake-Good- oder der Fake-Bad-Gruppe angehört. Das Vorgehen hierbei erscheint zunächst sehr einfach. Wie der Name Additionssatz bereits impliziert, sollte sich die Wahrscheinlichkeit für die Vereinigungsmenge zweier Ereignisse durch das Summieren der einzelnen Wahrscheinlichkeiten ergeben.

Bevor wir die konkrete Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit betrachten, müssen wir noch einmal auf den Unterschied zwischen disjunkten und nicht-disjunkten Ereignissen (siehe Abschnitte 3.1.10 und 3.1.11) eingehen.

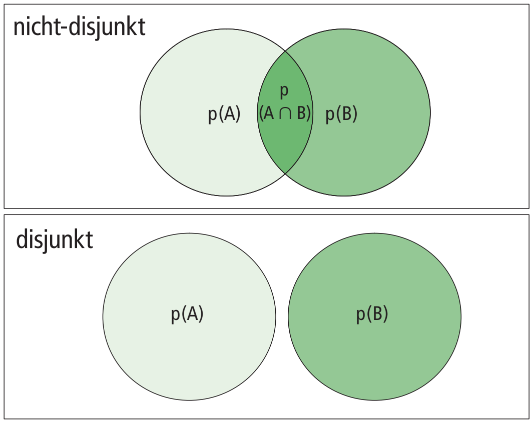


Abbildung 3.13: Wiederholung disjunkte und nicht-disjunkte Ereignisse

Wie bereits erläutert und in Abbildung 3.13 noch einmal veranschaulicht, besteht der Unterschied zwischen disjunkten und nicht-disjunkten Ereignissen darin, dass es bei nicht-disjunkten Ereignissen eine Schnittmenge gibt. Wenn wir nun die Wahrscheinlichkeit der Vereinigungsmenge durch Addition der beiden einzelnen Wahrscheinlichkeiten bestimmen wollen, würde dies bei nicht-disjunkten Ereignissen dazu führen, dass die Elementarereignisse in der Schnittmenge der beiden Ereignisse doppelt gezählt werden würden. Die Summe würde die tatsächliche Wahrscheinlichkeit der Vereinigungsmenge überschätzen. Um dies zu vermeiden, darf die Schnittmenge nur einmal gezählt werden. Dies wird erreicht, indem von der Summe der beiden einzelnen Wahrscheinlichkeiten die Wahrscheinlichkeit der Schnittmenge wieder abgezogen wird. Es ergibt sich also folgende Formel für das Auftreten des Ereignis A **oder** B bei nicht-disjunkten Ereignissen:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$p(A \cup B)$ = Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ereignis A oder Ereignis B

$p(A)$ = Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A

$p(B)$ = Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B

$p(A \cap B)$ = Schnittmenge von Ereignis A und Ereignis B

Die Berücksichtigung der Schnittmenge ist bei disjunkten Ereignissen nicht notwendig, da $p(A \cap B) = 0$ ist und somit der letzte Term der Formel entfällt:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

$p(A \cup B)$ = Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ereignis A oder Ereignis B

$p(A)$ = Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A

$p(B)$ = Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B

Soll die Wahrscheinlichkeit für die Vereinigungsmenge von k disjunkten Ereignissen bestimmt werden, gilt folgende Formel:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_k = \sum_{i=1}^{k} p_i$$

p = Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von k disjunkten Ereignissen

p_1 = Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ereignis 1

k = Anzahl der Ereignisse

i = Index der Ereignisse i = 1 bis k

In unserem Beispiel beträgt die Wahrscheinlichkeit, eine Person aus der Fake-Good-Bedingung zu ziehen, 37/119. Für eine Person aus der Fake-Bad-Bedingung ergibt sich ein Wert von 41/119. Da eine Person nicht in beiden Bedingungen gewesen sein kann, sind die beiden Ereignisse disjunkt und die Wahrscheinlichkeit der Vereinigungsmenge ergibt sich als einfache Summe. Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, eine Person aus der Fake-Bad- oder Fake-Good-Gruppe zu ziehen, (41+37)/119 oder circa 0.66.

Soll jedoch die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, eine Person aus der Fake-Good-Gruppe **oder** eine überdurchschnittlich leistungsmotivierte Person zu ziehen, liegen nicht-disjunkte Ereignisse vor und die Schnittmenge muss berücksichtigt werden. Zur Verdeutlichung nutzen wir wieder die Tabelle 3.2. Es ergeben sich folgende Berechnungen:

$$p(\mathit{Fake\ Good} \cup LM > 110) = p(\mathit{Fake\ Good}) + p(LM > 110) - p(\mathit{Fake\ Good} \cap LM > 110)$$

$$p(\mathit{Fake\ Good}) = \frac{37}{119}$$

$$p(LM > 110) = \frac{37}{119}$$

$$p(\mathit{Fake\ Good} \cap LM > 110) = \frac{25}{119}$$

$$p(\mathit{Fake\ Good} \cup LM > 110) = \frac{37 + 37 - 25}{119} = \frac{49}{119} \approx .41$$

Die Wahrscheinlichkeit für die Vereinigungsmenge des Ereignisses, zur Fake-Good-Bedingung zu gehören, und des Ereignisses, überdurchschnittlich leistungsmotiviert zu sein, beträgt also circa 0.41.

Beim Additionssatz geht es also um eine Entweder-oder-Verknüpfung. Dabei ist es egal, ob ein Ereignis im Zufallsexperiment auftritt, welches beiden Ereignisdefinitionen gerecht wird. Es kann jedoch von Interesse sein, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass beide Ereignisse A und B eintreffen. Hierfür wird der Multiplikationssatz benötigt.

3.3.3 Multiplikationssatz

Während beim Additionssatz berücksichtigt werden musste, ob die Ereignisse disjunkt sind oder nicht, muss beim Multiplikationssatz darauf geachtet werden, ob die Ereignisse stochastisch unabhängig sind oder nicht. Der Begriff der stochastischen Unabhängigkeit von Ereignissen ist vor allem in der Testtheorie wichtig. Dennoch soll hier kurz der Grundgedanke erläutert werden, um das Prinzip des Multiplikationssatzes zu verdeutlichen.

Zwei Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, wenn das Eintreffen oder Nichteintreffen eines Ereignisses B die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A nicht beeinflusst.

Formal lässt sich dies so ausdrücken:

$$p(A) = p(A|B)$$

$p(A)$ = Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A

$p(A|B)$ = Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A gegeben Ereignis B

Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit für Ereignis A entspricht der bedingten Wahrscheinlichkeit A unter der Bedingung B. Mit anderen Worten, es spielt für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A keine Rolle, ob Ereignis B auch eingetreten ist oder nicht. Dieses Prinzip lässt sich am Beispiel von zwei Mathematikaufgaben veranschaulichen. Wenn es für das Lösen der Aufgabe A egal ist, ob auch Aufgabe B gelöst wurde, dann beeinflussen sich die beiden Ereignisse nicht. In diesem Fall liegt stochastische Unabhängigkeit vor. Wird zum Lösen der Aufgabe A jedoch die Lösung der Aufgabe B benötigt (Folgeaufgabe), dann ist eine Lösung nur unter der Bedingung möglich, dass bereits die Aufgabe B gelöst wurde. Offensichtlich beeinflusst das Lösen der Aufgabe B das Lösen der Aufgabe A. In diesem Fall liegt keine stochastische Unabhängigkeit vor.

Durch Substituieren der bedingten Wahrscheinlichkeit durch die entsprechende Formel ergibt sich Folgendes:

$$p(A) = p(A|B)$$

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

$$\downarrow$$

$$p(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \rightarrow p(A) \cdot p(B) = p(A \cap B)$$

$p(A)$ = Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A

$p(A|B)$ = Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A gegeben Ereignis B

$p(A \cap B)$ = Schnittmenge von Ereignis A und Ereignis B

$p(B)$ = Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B

Stochastische Unabhängigkeit bedeutet also, dass die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Auftreten zweier Ereignisse dem Produkt aus den Einzelwahrscheinlichkeiten entspricht. Dies entspricht dem Multiplikationssatz bei stochastisch unabhängigen Ereignissen:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

$p(A \cap B)$ = Schnittmenge von Ereignis A und Ereignis B

$p(A)$ = Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A

$p(B)$ = Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B

Die allgemeinere Formel für k stochastisch unabhängige Ereignisse lautet:

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k = \prod_{i=1}^{k} p_i$$

p = Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von k stochastisch unabhängigen Ereignissen

p_1 = Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ereignis 1

k = Anzahl der Ereignisse

i = Index der Ereignisse i = 1 bis k

Aus den einzelnen Wahrscheinlichkeiten wird also die Produktsumme Π gebildet.

Nehmen wir zur Verdeutlichung wieder unseren Beispieldatensatz. Jede Person in der Untersuchung hat drei verschiedene Leistungsmotivationstests bearbeitet. Unter anderem das Leistungsmotivationsinventar in der Kurzform LMI-K (Schuler & Prochaska, 2001) und den Objektiven Leistungsmotivationstest OLMT (Schmidt-Atzert, 2004). Ist es für das Abschneiden im LMI-K egal, wie gut die Leistung im OLMT war? Anhand der hier aufgestellten Bedingung, dass sich die Schnittmenge aus dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten ergibt, lässt sich dies prüfen. Vorher ist noch die Erläuterung eines weiteren Begriffs notwendig, des Erwartungswerts.

Erwartungswerte sind Mittelwerte einer Variablen aus einer theoretischen Verteilung. Dabei können verschiedene Annahmen, wie zum Beispiel stochastische Unabhängigkeit, getroffen werden. Das folgende Beispiel soll sowohl dies als auch die Verwendung des Multiplikationssatzes zur Prüfung der stochastischen Unabhängigkeit verdeutlichen.

Jede Person in unserer Stichprobe mit N = 119 Personen wurde anhand ihrer Testergebnisse im OLMT und im LMI-K in jedem Test den Kategorien überdurchschnittlich und nicht überdurchschnittlich zugeteilt. Ein Standardwert von mehr als 110 entspricht dabei jeweils einer Klassifikation als überdurchschnittlich. Es ergibt sich diese Kreuztabelle:

	OLMT > 110	OLMT < 110	$\sum$
LMI > 110	7	28	35
LMI < 110	8	76	84
$\sum$	15	104	119

Tabelle 3.3: Kreuztabelle zur Prüfung der stochastischen Unabhängigkeit mit dem Multiplikationssatz

Nehmen wir nun stochastische Unabhängigkeit an, ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, in beiden Tests überdurchschnittlich abzuschneiden:

$$p(LMI > 110 \cap OLMT > 110) = p(LMI > 110) \cdot p(OLMT > 110) = \frac{35}{119} \cdot \frac{15}{119} \approx .037$$

Die Wahrscheinlichkeit, eine Person zu finden, die in beiden Tests überdurchschnittlich abschneidet, liegt also bei 0.037. Wie kann diese Information nun genutzt werden, um zu prüfen, ob die Testleistungen tatsächlich stochastisch unabhängig sind? Dazu müssen wir den Erwartungswert für die entsprechende Zelle in der Kreuztabelle bestimmen. Wir wissen bereits, dass die Wahrscheinlichkeit, dieser Klasse anzugehören, $p = 0.037$ beträgt. In unserer Stichprobe befinden sich $N = 119$ Personen. Die Klassifikation jeder Person in eine der vier Klassen kann als Zufallsexperiment aufgefasst werden. Bei jedem dieser Experimente ist die Wahrscheinlichkeit, in unsere Wunschklasse zu gelangen, $p = 0.037$. Das Zufallsexperiment wird 119mal wiederholt und nur in 3.7 Prozent der Fälle erwarten wir die entsprechenden Ergebnisse. Diese Wahrscheinlichkeit p kann nun genutzt werden, um zu schätzen, wie häufig beide Ereignisse gemeinsam in der Stichprobe auftreten sollten:

$$E = p \cdot N$$
$$E = 119 \cdot .037 \approx 4$$

E = Erwartungswert

p = Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses

N = Anzahl der durchgeführten Zufallsexperimente

Angenommen die beiden Testleistungen sind stochastisch unabhängig, dann dürften nur ungefähr 4 Personen in beiden Tests überdurchschnittlich abschneiden. Dies ist darin begründet, dass wir den Multiplikationssatz für stochastisch unabhängige Ereignisse zur Berechnung dieses Wertes benutzt haben. Ein Blick in die Kreuztabelle zeigt jedoch, dass es 7 Personen und damit fast doppelt so viele geschafft haben. Dies entspricht einer Wahrscheinlichkeit von $p = 7/119 = 0.06$. Somit ist es sehr unwahrscheinlich, dass die beiden Testleistungen stochastisch unabhängig sind.

Auch für den Fall der stochastischen Abhängigkeit lässt sich die Wahrscheinlichkeit des gemeinsamen Auftretens mehrerer Ereignisse bestimmen. In diesem Fall beeinflusst das Auftreten des Ereignisses A also die Wahrscheinlichkeit für Ereignis B. In diesem

Sinne bedingen sich die beiden Ereignisse. Die Wahrscheinlichkeit für das gemeinsame Auftreten zweier Ereignisse ergibt sich dann auch durch einfaches Umstellen der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit. Der Multiplikationssatz lautet dann:

$$p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B)$$
$$p(A \cap B) = p(B|A) \cdot p(A)$$

$p(A \cap B)$ = Schnittmenge von Ereignis A und Ereignis B

$p(A \mid B)$ = Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A gegeben Ereignis B

$p(B)$ = Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B

$p(B \mid A)$ = Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B gegeben Ereignis A

$p(A)$ = Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A

Für unser Beispiel ergibt sich dann folgendes Ergebnis:

$$p(LMI > 110 \cap OLMT > 110) = p(LMI > 110 | OLMT > 110) \cdot p(OLMT > 110)$$
$$p(LMI > 110 | OLMT > 110) = \frac{7}{15}$$
$$p(OLMT > 110) = \frac{15}{119}$$
$$p(LMI > 110 \cap OLMT > 110) = p(LMI > 110 | OLMT > 110) \cdot p(OLMT > 110)$$
$$p(LMI > 110 \cap OLMT > 110) = \frac{7}{15} \cdot \frac{15}{119} \approx .0588$$
$$E_{N=119} = .0588 \cdot 119 = 7$$

Der Multiplikationssatz für stochastisch abhängige Ereignisse ergibt also eine Auftretenswahrscheinlichkeit für die Schnittmenge von ungefähr 0.0588. Zudem wurde der Erwartungswert berechnet und es zeigt sich, dass sich diesmal genau die richtige Zellbesetzung ergibt.

Die Kenntnis der Wahrscheinlichkeit, mit der zwei Ereignisse, stochastisch unabhängig oder nicht, gemeinsam auftreten, kann wiederum bei der Stichprobenplanung genutzt werden. So lässt sich leicht ausrechnen, wie groß eine Stichprobe sein muss, damit 200 Personen mit überdurchschnittlichen Ergebnissen in beiden Tests enthalten sind:

$$E = p \cdot N \rightarrow N = \frac{E}{p}$$
$$N = \frac{200}{.0588} \approx 3400$$

E = Erwartungswert

p = Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses

N = Anzahl der durchgeführten Zufallsexperimente

Unter der Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit für das gemeinsame Auftreten akkurat ist, müssten also mindestes 3400 Personen untersucht werden, um 200 Personen mit überdurchschnittlichen Leistungen in beiden Tests zu finden.

Eine gute Variante, um sich den Unterschied zwischen Additions- und Multiplikationssatz noch einmal zu verdeutlichen, ist der Wahrscheinlichkeitsbaum.

3.3.4 Der Wahrscheinlichkeitsbaum

Der Wahrscheinlichkeitsbaum stellt die unterschiedlichen Verknüpfungen grafisch dar. Nehmen wir wieder unsere Stichprobe und die beiden Tests LMI-K und OLMT. Diesmal klassifizieren wir die Probanden in jedem Test entweder als unterdurchschnittlich (Klasse 3: SW < 90), durchschnittlich (Klasse 2: 90 < SW < 110) oder überdurchschnittlich (Klasse 1: SW > 110). Dabei nutzen wir die Einteilung der Standardwerte aus Kapitel 2. Diese Klassifikation ergibt folgende Kreuztabelle:

	OLMT Klasse 1	OLMT Klasse 2	OLMT Klasse 3	Σ
LMI Klasse 1	7	26	2	35
LMI Klasse 2	8	38	9	55
LMI Klasse 3	0	10	19	29
Σ	15	74	30	119

Tabelle 3.4: Kreuztabelle zur Erstellung eines Wahrscheinlichkeitsbaums

Aus den Angaben lässt sich nun unter Nutzung der Randsummen ein Wahrscheinlichkeitsbaum unter der Unabhängigkeitsannahme zeichnen:

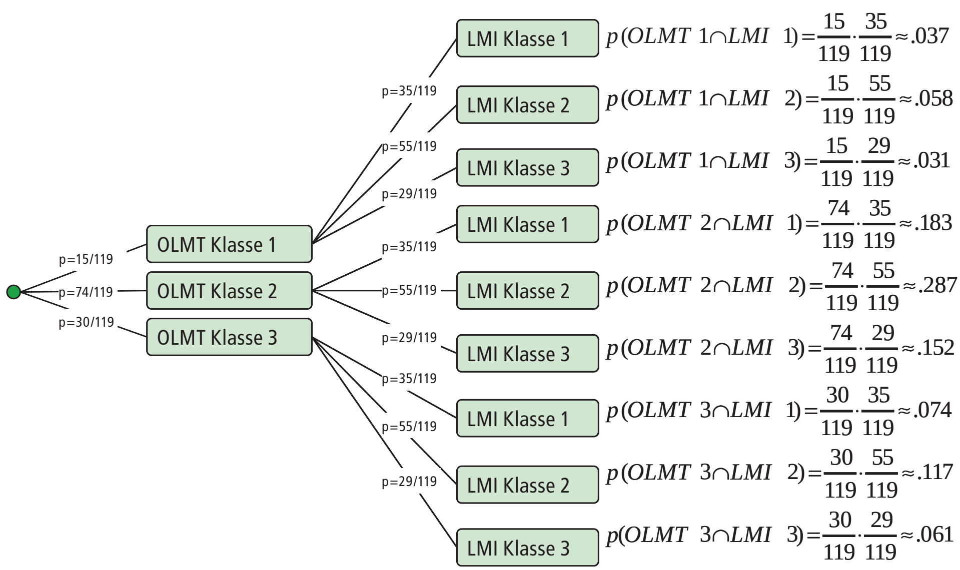


Abbildung 3.14: Wahrscheinlichkeitsbaum

Der Startpunkt des Baums ist die erste Klassifikation der Probanden. Jeder Proband wird aufgrund des OLMT-Ergebnisses einer der drei Klassen zugeordnet. Entsprechend den Randsummen aus Tabelle 3.4 lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Klassen berechnen. Diese sind auf den drei Ästen, die zu den drei Klassen führen, eingetragen. Nach dieser Klassifikation werden die Probanden erneut einer Klasse zugeordnet, diesmal aufgrund ihrer Ergebnisse im LMI. Grundsätzlich besteht für jede Person, egal in welcher Klasse sie aufgrund des OLMT-Ergebnisses ist, die Möglichkeit, zu jeder der drei LMI-Klassen zu gehören. Somit ergeben sich von jeder OLMT-Klasse drei Äste zu den drei LMI-Klassen. Erneut lassen sich aufgrund der Randsummen die Wahrscheinlichkeiten für jeden Ast berechnen. Wenn nun die Wahrscheinlichkeit für die Verknüpfung der Ereignisse berechnet wird, gehen wir sozusagen den Ästen und ihren Verzweigungen nach. Es ergeben sich 9 (3x3) mögliche Ergebnisse. Da wir die Äste entlang gehen, ergeben sich immer Ereignisse, in denen die OLMT-Klasse eine Bedingung darstellt. Wir suchen also immer eine bedingte Wahrscheinlichkeit, sodass folglich eine Verknüpfung mit einem logischen UND vorliegt. Demzufolge muss der Multiplikationssatz genutzt werden. Entlang der Äste werden die Wahrscheinlichkeiten also immer multipliziert, wenn stochastische Unabhängigkeit gegeben ist.

Betrachten wir die Enden der neun Zweige, dann lassen sich beliebige Verknüpfungen der neun Ereignisse vornehmen (z. B. alle Ereignisse mit der OLMT-Klasse 3). Da alle neun Ereignisse disjunkt sind, lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für diese Verknüpfungen einfach durch Addition bestimmen. Schließlich wird hier nicht nach der Schnittmenge gesucht, sondern vielmehr nach der Vereinigungsmenge. Demzufolge muss der Additionssatz angewandt werden. Über die Pfade hinweg wird also addiert.

Der Wahrscheinlichkeitsbaum ist eine gute Alternative zur Kreuztabelle, um sich die Verknüpfungen und die damit verbundenen Rechenvorschriften besser visuell vorstellen zu können.

3.4 Kombinatorik

Zur Berechnung einer Wahrscheinlichkeit nach Laplace wird die Anzahl der möglichen Ereignisse benötigt. In den bisherigen Beispielen ließ sich diese Anzahl oft durch bloßes Abzählen feststellen. Es gibt jedoch auch Sachverhalte, bei denen sich die Bestimmung der Anzahl der möglichen Ereignisse komplizierter gestaltet. In diesen Fällen ist die Kombinatorik notwendig. Zur Bestimmung der Anzahl möglicher Ereignisse stellt die Kombinatorik Rechenregeln zur Verfügung. Dieselben Rechenregeln können oft auch genutzt werden, um die Anzahl der günstigen Ereignisse zu bestimmen.

Um sich für eine der Rechenregeln entscheiden zu können, müssen zunächst drei Fragen beantwortet werden:

- Welche Informationen liegen eigentlich vor?
- Spielt die Reihenfolge der Ereignisse eine Rolle?
- Stehen bei einer erneuten Durchführung des Zufallsexperiments alle Ereignisse wieder zur Verfügung? (Werden die Ereignisse also „zurückgelegt in den Ereignisraum“ oder nicht?)

Bei der Frage nach der Information werden drei Informationsstücke unterschieden. Zum einen kann lediglich bekannt sein, wie viele Ereignisse n sich insgesamt im Ereignisraum befinden. So wissen wir, dass es beim Würfeln nur sechs mögliche Elementarereignisse gibt. Ebenso haben wir in unserer Stichprobe $N = 119$ Personen. Neben dieser Information kann auch bekannt sein, wie oft ein Zufallsexperiment durchgeführt werden soll oder wurde. Hierfür wird der Parameter k verwendet. Wie oft soll also gewürfelt werden bzw. wie groß soll die Substichprobe sein, die aus unserer Stichprobe gezogen wird? Schließlich ist es noch möglich, dass die Ergebnisse mehrerer Zufallsexperimente a kombiniert werden sollen. Zum Beispiel werden die Ergebnisse beim Würfeln mit dem Ergebnis beim Ziehen einer Karte aus einem Skatblatt kombiniert. Ein anderes Beispiel wäre, dass die drei Bedingungen in unserem Beispiel als unabhängige Stichproben angesehen werden. Jetzt ließe sich aus allen Gruppen zufällig eine Person ziehen. Während wir bei der Fake-Good-Gruppe auf unterdurchschnittliche Personen abzielen, suchen wir in den beiden anderen Gruppen nach überdurchschnittlichen Personen. Nach jedem Ziehen in den Gruppen liegen Ergebnisse unabhängiger Zufallsexperimente vor, die kombiniert werden können.

Bei einigen der Rechenregeln gibt es noch zusätzliche Detailfragen:

- Sind die Untergruppen gleich groß?
- Wird eine Ziehung vollständig oder nur teilweise durchgeführt?
- Sind Teilereignisse relevant?

Die möglichen Antworten auf diese Fragen ergeben folgende Übersicht:

- Permutationsregel
- 1. Variationsregel (1 Zufallsexperiment)
- 2. Variationsregel (mehr als 1 Zufallsexperiment)
- 1. Kombinationsregel
- 2. Kombinationsregel

Dies ist noch einmal in Tabelle 3.5 zusammengefasst.

gegeben:	Reihenfolge?	zurücklegen?	Bezeichnung:	Formel:
n	ja	nein	Permutationsregel	$n!$
n, k	ja	ja	1.Variationsregel 1 Experiment	n^k
a_1, a_2, a_3, …	/	/	2.Variationsregel > 1 Experiment	$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots$
n, k	ja	nein	1. Kombinationsregel	$\frac{n!}{(n-k)!}$
n, k	nein	nein	2. Kombinationsregel	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

Tabelle 3.5: Übersicht über verschiedene Kombinatorikregeln

n = Anzahl der möglichen Ereignisse

k = Anzahl der Zufallsexperimente

a = Ergebnis mehrerer unabhängiger Zufallsexperimente

Es folgen nun zu jeder Regel zwei kurze Beispiele.

Permutationsregel. Beim Würfeln sind sechs verschiedene Augenzahlen möglich. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese aneinander zu reihen, ohne dass eine Zahl mehr als einmal vorkommt? Die Reihenfolge spielt hierbei offensichtlich eine Rolle. Aber bei jeder neuen Kombination stehen zu Beginn alle Zahlen zur Verfügung. Laut Permutationsregel gibt es n! (sprich ‚n Fakultät') mögliche Kombinationen. Das ist eine Anzahl von 720 Ergebnissen, die sich daraus ergibt, dass man beim ersten Wurf sechs Möglichkeiten hat, beim zweiten Wurf nur noch fünf, da die eine Zahl schon aus dem ersten Wurf „verbraucht" ist, beim dritten Wurf nur noch vier usw.: 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 720.

Bei einer Testdurchführung sollen die Probanden zufällig auf die Testtermine verteilt werden. Bei N = 119 Personen ergeben sich so $5.57 * 10^{196}$ Möglichkeiten der Anordnung.

1. Variationsregel. Bleiben wir bei dem Würfelbeispiel, nehmen aber eine weitere Information hinzu. Es soll sechsmal gewürfelt werden. Wie viele Kombinationen der Augenzahlen sind beim sechsmaligen Würfeln insgesamt möglich? Um zwischen den verschiedenen Kombinationen unterscheiden zu können, muss die Reihenfolge beachtet werden. Außerdem stehen vor jedem Würfeln wieder alle sechs Augenzahlen zur Verfügung. Wir kennen die Anzahl der möglichen Ereignisse $n = 6$ und die Anzahl der Durchführungen $k = 6$. Somit ergibt sich eine Anzahl an möglichen Ereignissen von 6^6 und damit 46656.

Die 119 Versuchspersonen müssen auf drei Bedingungen verteilt werden. Wie viele verschiedene Kombinationen gibt es? Jetzt entsprechen die Personen der Anzahl der Zufallsexperimente (k = 119) und die Gruppenarten (n = 3) den möglichen Ausgängen. Dabei spielt die Reihenfolge, in der die Personen zugeteilt werden, eine Rolle. Zudem stehen bei jeder Person wieder alle drei möglichen Gruppen zur Verfügung. Es ergeben sich also 3^{119} mögliche Kombinationen.

2. Variationsregel. Hier werden die Ergebnisse mehrerer unabhängiger Zufallsexperimente kombiniert. Nehmen wir an, wir möchten wissen, wie viele Möglichkeiten es gibt, bei sechsmaligem Würfeln alle Augenzahlen zu würfeln (6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 720 günstige Kombinationen) und aus einem Skatblatt beim zweimaligen Ziehen zweimal die Farbe Rot zu ziehen (2^{16} = 256 günstige Kombinationen). Die Betrachtung der Reihenfolge und die Frage des Zurücklegens ist jetzt lediglich relevant für das Berechnen der möglichen Kombinationen innerhalb eines jeden Zufallsexperiments. Laut der 2. Variationsregel müssen die Kombinationen dann multipliziert werden. Es ergeben sich also 720 * 256 = 184320 Kombinationen.

Ein anderes Beispiel wäre die Anzahl möglicher Kombinationen, wenn wir aus den drei Bedingungen (Fake-Good, Fake-Bad, KG) jeweils vier Personen (k) ziehen und die Kombination aus überdurchschnittlich und nicht-überdurchschnittlich n betrachten. In jeder Gruppe ergeben sich so 2^4 = 16 mögliche Kombinationen und insgesamt 16 * 16 * 16 = 4096.

1. Kombinationsregel. Erneut kennen wir die Anzahl der Zufallsexperimente und die möglichen Ausgänge. Die Reihenfolge ist auch wieder wichtig, allerdings stehen zu Beginn eines Zufallsexperiments die Ergebnisse der vorherigen Experimente nicht mehr zur Verfügung. Ein Zahlenschloss ist hier ein Beispiel. Es gibt n = 10 verschiedene Zahlen (von 0 bis 9) und nehmen wir an, es gibt k = 4 Zahlenräder. Dabei darf keine Zahl, die bereits auf einem Rad benutzt wurde, erneut verwendet werden. Es ergeben sich $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{10!}{6!} = 5040$ Kombinationen, insofern für die erste Ziffer 10 Zahlen möglich sind, für die zweite nur noch 9, für die dritte 8 und die vierte 7, d.h.: 10 x 9 x 8 x 7 = 5040. In der Formel bleiben also im Zähler nur 10 x 9 x 8 x 7 stehen, da 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 durch den Nenner weggekürzt wird.

Aus unserer Stichprobe sollen k = 2 Personen aus unterschiedlichen Klassen gezogen werden. Nach dem Ziehen werden die Personennummern nicht wieder zurückgelegt. Jede Person wird dem Testergebnis entsprechend einer der n = 3 OLMT-Klassen zugewiesen und die Reihenfolge notiert. Es ergeben sich $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{3!}{1!} = 6$ Möglichkeiten, zwei Personen aus der Stichprobe zu ziehen und den drei Klassen zuzuordnen.

2. Kombinationsregel. Diesmal spielt weder die Reihenfolge eine Rolle, noch wird zurückgelegt. Ein beliebtes Beispiel ist hier das Lottospiel. Es gibt n = 49 Ereignisse und k = 6 Durchgänge. Die Zahlen werden nicht zurückgelegt, und die Reihenfolge, in der sie gezogen werden, ist irrelevant. Es ergeben sich 13983816 Kombinationsmöglichkeiten, um 6 Zahlen aus 49 zu ziehen.

Wieder ziehen wir $k = 2$ Personen aus unterschiedlichen OLMT-Klassen und klassifizieren sie in $n = 3$ Klassen. Wir legen die Versuchspersonen nicht zurück, die Reihenfolge wird aber ignoriert. Es ergeben sich 3 Möglichkeiten.

In der folgenden Abbildung ist anhand eines Entscheidungsbaums der Ablauf beim Finden der Rechenregeln noch einmal zusammengefasst.

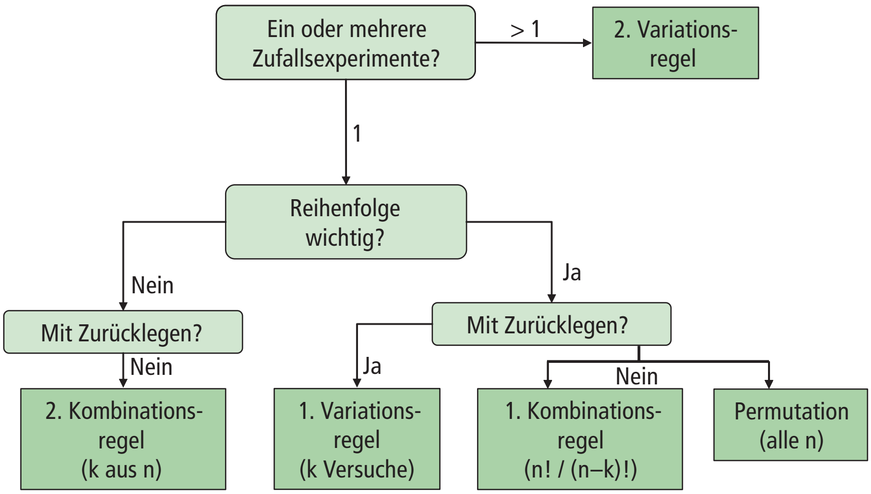


Abbildung 3.15: Entscheidungsbaum für die Rechenregeln der Kombinatorik

Übungen

1. Worin besteht der Unterschied zwischen der Laplace-Wahrscheinlichkeit und der Bernoulli-Wahrscheinlichkeit?
2. Was muss man bei der Berechnung der Vereinigungsmenge zweier Ereignisse A und B beachten, wenn es eine Schnittmenge dieser Ereignisse gibt?
3. Wann sind zwei Ereignisse A und B voneinander unabhängig? Was folgt daraus für die Berechnung der Schnittmenge dieser beiden Ereignisse?
4. Wann kommt das Theorem von Bayes zur Anwendung?
5. Die Wahrscheinlichkeit, die Statistik-Klausur zu bestehen, sei $p = 0.7$. Wenn Professor Erklärdirnix die Vorlesung hält, sei die Wahrscheinlichkeit des Bestehens $p = 0.3$. Jedes vierte Semester hält Professor Erklärdirnix die Vorlesung.

a) Sind die beiden Ereignisse „Professor Erklärdirnix hält die Vorlesung" und „Bestehen der Klausur" voneinander unabhängig?

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, die Klausur nicht zu bestehen, wenn Professor Erklärdirnix die Vorlesung hält?

c) Wie wahrscheinlich ist es, dass Professor Erklärdirnix die Vorlesung hält, wenn man die Klausur besteht? Verwenden Sie zur Berechnung das Theorem von Bayes.

Lösungen zu den Übungsaufgaben finden sich in Anhang A. SPSS-Datenfiles zum Nachvollziehen der Beispiele und weitere Informationen zu diesem Buchkapitel finden Sie auf der Companion Website zum Buch unter http://www.pearson-studium.de.

Literatur

Draxler, C. (2007). *Sequentielle Tests für das Rasch Modell*. Berlin: Logos Verlag.

Schmidt-Atzert, L. (2004). *OLMT. Objektiver Leistungsmotivationstest. [Objective Achievement Motivation Test]*: Moedling: Schuhfried.

Schmidt, L. (1988). *Alkoholkrankheit und Alkoholmissbrauch; Definition, Ursachen, Folgen, Behandlung, Prävention* (2 ed.). Stuttgart: Kohlhammer.

Schuler, H., & Prochaska, M. (2001). *LMI. Leistungsmotivationsinventar*: Göttingen: Hogrefe.

Steyer, R., & Schmitt, M. J. (1990). The effects of aggregation across and within occasions on consistency, specificity and reliability. *Methodika, 4,* 58-94.

Ziegler, M., Schmidt-Atzert, L., Bühner, M., & Krumm, S. (2007). Fakability of Different Measurement Methods for Achievement Motivation: Questionnaire, Semi-projective, and Objective. *Psychology Science, 49*, 291-307.

Weiterführende Literatur

Gigerenzer, G. (2004). *Das Einmaleins der Skepsis: Über den richtigen Umgang mit Zahlen und Risiken.* Berlin: Berliner Taschenbuch Verlag.