

Le contrôle de l'arc atmosphérique

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème de contrôle optimal d'une navette spatiale en phase de rentrée atmosphérique, où le contrôle est l'angle de gîte, et le coût est le flux thermique total (facteur d'usure de la navette). L'objectif est de déterminer une trajectoire optimale jusqu'à une cible donnée, de stabiliser le système autour de cette trajectoire nominale, en tenant compte du fait que l'engin est de plus soumis à des contraintes sur l'état. Ce problème a été défini et résolu dans une série d'articles [12, 11, 14], en tenant compte des conditions limites du cahier des charges du CNES.

8.1 Modélisation du problème de rentrée atmosphérique

8.1.1 Présentation du projet

Ce projet a été posé par le CNES, et est motivé par l'importance croissante de la théorie du contrôle, et du contrôle optimal, dans les techniques d'aérocapture :

- problèmes de guidage, transferts d'orbites aéroassistés,
- développement de lanceurs de satellites *recupérables* (où l'enjeu financier est très important),
- problèmes de rentrée atmosphérique : c'est l'objet du fameux projet *Mars Sample Return* développé par le CNES, qui consiste à envoyer une navette spatiale habitée vers la planète Mars, dans le but de ramener sur Terre des échantillons martiens.

Le rôle de l'arc atmosphérique est

- de réduire suffisamment l'énergie cinétique, par les forces de frottement dans l'atmosphère,
- d'amener l'engin spatial d'une position initiale précise à une cible donnée,

- de plus, il faut prendre en compte certaines contraintes sur l'état : contrainte sur le flux thermique (non destruction de la navette), sur l'accélération normale (présence humaine dans la navette), et sur la pression dynamique (contrainte structurelle),
- enfin, on cherche de plus à minimiser un critère d'optimisation : le flux thermique total de la navette, représentant un facteur d'usure.

Une trajectoire optimale étant ainsi déterminée, on peut également se poser le problème de *stabiliser* la navette autour de cette trajectoire, de façon à prendre en compte de possibles perturbations.

Le contrôle est la configuration aérodynamique de la navette. La première question qui se pose est la suivante : les forces aérodynamiques peuvent-elles contribuer à freiner la navette de manière adéquate ? En fait si l'altitude est trop élevée (supérieure à 120 km), alors la densité atmosphérique est trop faible, et il est physiquement impossible de générer des forces aérodynamiques suffisamment intenses. Au contraire, si l'altitude est trop basse (moins de 20 km), la densité atmosphérique est trop grande, et le seul emploi des forces aérodynamiques conduirait à un dépassement du seuil autorisé pour le flux thermique ou la pression dynamique. En effet la rentrée atmosphérique s'effectue à des vitesses très élevées. En revanche si l'altitude est comprise entre 20 et 120 km, on peut trouver un compromis. C'est ce qu'on appelle la *phase atmosphérique*.

Durant cette phase atmosphérique, la navette se comporte comme un *planeur*, les moteurs sont coupés : il n'y a pas de force de poussée. L'engin est donc soumis uniquement à la gravité et aux forces aérodynamiques. Le contrôle est l'angle de gîte cinématique qui représente l'angle entre les ailes et un plan perpendiculaire à la vitesse. Enfin, on choisit comme critère d'optimisation le flux thermique total de la navette.

La modélisation précise du problème a été effectuée dans [14]. Nous la rappelons maintenant.

8.1.2 Modélisation du problème

Pour le problème de rentrée, la planète peut être la Terre ou Mars pour le programme d'exploration. Dans les deux cas les équations sont les mêmes sauf pour les paramètres spécifiques à chaque planète (rayon, masse, vitesse de rotation, densité de l'atmosphère, etc). Dans nos calculs on va supposer que la planète est la Terre. Pour modéliser le problème, on utilise les lois de la mécanique classique, un modèle de densité atmosphérique et un modèle pour les forces s'exerçant sur la navette, la force gravitationnelle et la force aérodynamique qui se décompose en une composante dite de *traînée* et une composante dite de *portance*. Le contrôle est la *gîte cinématique* (l'angle d'attaque est fixé).

On donne un modèle général tenant compte de la rotation (uniforme) de la Terre autour de l'axe $K = NS$, à vitesse angulaire de module Ω . On note

$E = (e_1, e_2, e_3)$ un repère galiléen dont l'origine est le centre O de la Terre, $R_1 = (I, J, K)$ un repère d'origine O en rotation à la vitesse Ω autour de l'axe K , et I l'intersection avec le méridien de Greenwich.

Soit R le rayon de la Terre et G le centre de masse de la navette. On note $R'_1 = (e_r, e_l, e_L)$ le repère associé aux coordonnées sphériques de $G = (r, l, L)$, $r \geq R$ étant la distance OG , l la longitude et L la latitude, voir figure 8.1, (i).

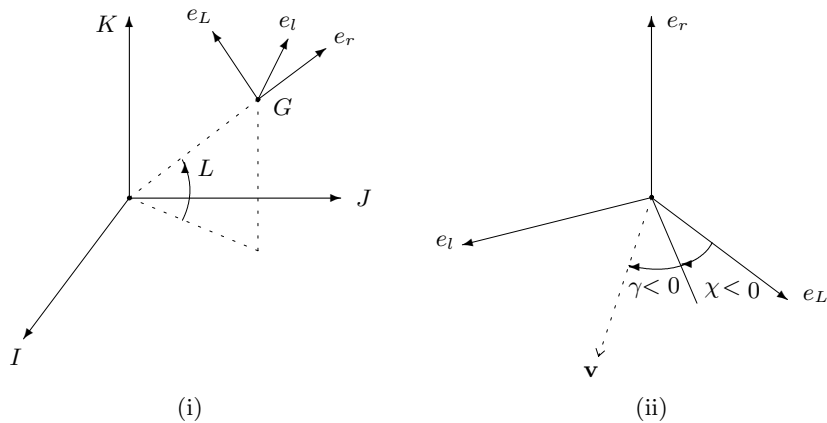


Fig. 8.1.

Le système de coordonnées sphériques présente une singularité au pôle Nord et au pôle Sud. Pour écrire la dynamique sous forme plus simple on introduit le repère mobile $R_2 = (i, j, k)$ dont l'origine est G de la manière suivante. Soit $\zeta : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ la trajectoire de G mesurée dans le repère R_1 et \mathbf{v} la vitesse relative $\mathbf{v} = \dot{x}I + \dot{y}J + \dot{z}K$. Pour définir i on pose : $\mathbf{v} = |v|i$. Le vecteur j est un vecteur unitaire du plan (i, e_r) perpendiculaire à i et orienté par $j \cdot e_r > 0$. On pose $k = i \wedge j$. La direction de la vitesse est paramétrisée dans le repère $R'_1 = (e_r, e_l, e_L)$ par deux angles, voir figure 8.1, (ii) :

- la pente γ , aussi appelée *angle de vol*, qui représente l'angle entre le plan horizontal et un plan contenant le vecteur vitesse,
- l'azimut χ , qui est l'angle entre la projection de \mathbf{v} dans un plan horizontal et le vecteur e_L , voir Fig. 8.1.

L'équation fondamentale de la mécanique, qui est une équation différentielle du second ordre sur \mathbb{R}^3 , se traduit par un système dans les coordonnées $(r, l, L, v, \gamma, \chi)$.

Par ailleurs on fait les hypothèses suivantes, le long de l'arc atmosphérique :

Hypothèse 1 : la navette est un planeur, c'est-à-dire que *la poussée de la navette est nulle*.

Hypothèse 2 : on suppose que la vitesse de l'atmosphère est la vitesse de la Terre. La vitesse relative de la navette par rapport à la Terre est donc la vitesse relative \mathbf{v} .

8.1.3 Les forces

Les forces agissant sur la navette sont de deux types :

- **force de gravité :** pour simplifier on suppose que la Terre est sphérique et que la force de gravité est orientée selon e_r . Dans le repère R_2 elle s'écrit :

$$\mathbf{P} = -mg(i \sin \gamma + j \cos \gamma),$$

où $g = g_0/r^2$.

- **force aérodynamique :** la force fluide due à l'atmosphère est une force \mathbf{F} qui se décompose en :
 - une composante dite de *traînée* opposée à la vitesse de la forme :

$$\mathbf{D} = \left(\frac{1}{2}\rho S C_D v^2\right) i, \quad (8.1)$$

- une force dite de *portance* perpendiculaire à \mathbf{v} donnée par :

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}\rho S C_L v^2 (j \cos \mu + k \sin \mu), \quad (8.2)$$

où μ est l'angle de gîte cinématique, $\rho = \rho(r)$ est la densité de l'atmosphère, et C_D, C_L sont respectivement les coefficients de traînée et de portance.

Hypothèse 3 : les coefficients C_D et C_L dépendent de l'angle d'attaque α qui est l'angle entre l'axe du planeur et le vecteur vitesse. C'est a priori un contrôle mais on suppose que durant l'arc atmosphérique il est fixé.

Notre seul contrôle est donc l'angle de gîte μ dont l'effet est double : modifier l'altitude mais aussi tourner à droite ou à gauche.

On choisit pour la densité atmosphérique un modèle exponentiel :

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-\beta r}, \quad (8.3)$$

et par ailleurs on suppose que

$$g(r) = \frac{g_0}{r^2}. \quad (8.4)$$

Le repère n'étant pas absolu, la navette est également soumise à la force de Coriolis $2m\vec{\Omega} \wedge \dot{q}$ et à la force d'entraînement $m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge q)$.

8.1.4 Les équations du système

Finalement, l'arc atmosphérique est décrit par le système suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= v \sin \gamma \\
\frac{dv}{dt} &= -g \sin \gamma - \frac{1}{2} \rho \frac{SC_D}{m} v^2 + \Omega^2 r \cos L (\sin \gamma \cos L - \cos \gamma \sin L \cos \chi) \\
\frac{d\gamma}{dt} &= \cos \gamma \left(-\frac{g}{v} + \frac{v}{r} \right) + \frac{1}{2} \rho \frac{SC_L}{m} v \cos \mu + 2\Omega \cos L \sin \chi \\
&\quad + \Omega^2 \frac{r}{v} \cos L (\cos \gamma \cos L + \sin \gamma \sin L \cos \chi) \\
\frac{dL}{dt} &= \frac{v}{r} \cos \gamma \cos \chi \\
\frac{dl}{dt} &= \frac{v \cos \gamma \sin \chi}{r \cos L} \\
\frac{d\chi}{dt} &= \frac{1}{2} \rho \frac{SC_L}{m} \frac{v}{\cos \gamma} \sin \mu + \frac{v}{r} \cos \gamma \tan L \sin \chi \\
&\quad + 2\Omega (\sin L - \tan \gamma \cos L \cos \chi) + \Omega^2 \frac{r \sin L \cos L \sin \chi}{v \cos \gamma}
\end{aligned} \tag{8.5}$$

où l'état est $q = (r, v, \gamma, l, L, \chi)$ et le contrôle est l'angle de gîte μ .

Dans la suite on pose $r = r_T + h$, où r_T est le rayon de la Terre, et h est l'altitude de la navette.

8.1.5 Coordonnées Kepleriennes

En supposant la Terre fixe (i.e. $\Omega = 0$) et que le système n'est soumis qu'à la force de gravitation, les trajectoires ont les propriétés suivantes :

Propriété 1 : Elles sont planes.

Propriété 2 : Si l'énergie est strictement négative, ce sont des ellipses dont le centre de la Terre est un foyer.

Ces propriétés sont la conséquence de l'existence d'intégrales premières qui sont :

- le moment cinétique $M = mx \wedge \dot{x}$, où x est la position et \dot{x} la vitesse, la conservation du moment cinétique impliquant que le mouvement est dans un plan normal à M .
- l'énergie totale $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{g_0}{r}$.
- l'intégrale de Laplace, due à la nature spécifique du potentiel, $L = \dot{x} \wedge M - g_0 e_r$.

Le mouvement Keplerien est donc caractérisé par la normale au plan de l'ellipse $\frac{\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{x}}|}$, l'angle ω du péricentre, la longueur du grand axe et l'excentricité de l'ellipse, voir figure 8.2, (i).

La position du satellite sur l'ellipse est caractérisée par un angle θ que l'on remplace en général par l'anomalie excentrique φ , voir figure 8.2, (ii).

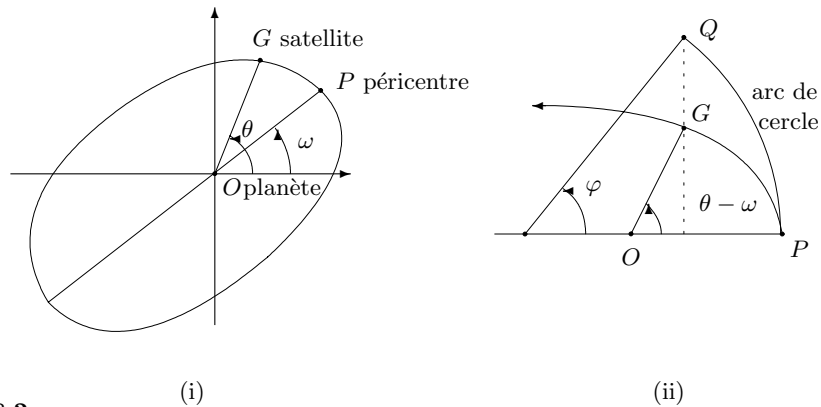


Fig. 8.2.

On rappelle les relations

$$a = \frac{g_0}{2|E|}, \quad e = \sqrt{1 + 2 \frac{EM^2}{mg_0^2}}.$$

L'angle ω caractérisant le péricentre est plus complexe à calculer. Pour un mouvement général dans un champ central l'angle entre deux passages par un péricentre n'est pas en général constant et dans le problème de Kepler on doit pour le caractériser utiliser l'intégrale première de Laplace.

Notons $r_0 = |\vec{OG}_0|$ la position initiale, \mathbf{v}_0 la vitesse initiale, α_0 l'angle entre \vec{OG}_0 et \mathbf{v}_0 , soit $C = r_0 v_0 \sin \alpha_0$, \mathbf{j}_0 vecteur unité perpendiculaire à \vec{OP}_0 dans le plan du mouvement, et \mathbf{H} le vecteur défini par l'égalité

$$\mathbf{v}_0 = -\frac{g_0}{C}(\mathbf{j}_0 + \mathbf{H}).$$

L'angle ω est défini par la propriété que l'angle entre \mathbf{H} et \vec{OP} est égal à $\pi/2$.

L'évolution sur la trajectoire elliptique est donnée par l'équation de Kepler

$$\varphi - e \sin \varphi = \frac{2\pi}{T}(t - t_P),$$

où t_P est l'instant de passage au péricentre, et $T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{g_0}}$ est la période de révolution. Définissons

$$\psi = (\varphi - e \sin \varphi) \frac{T}{2\pi}.$$

Alors $\dot{\psi} = 1$, et on obtient la proposition suivante.

Proposition 80. *Dans les coordonnées $q = \left(\frac{M}{|M|}, a, e, \omega, \psi \right)$, l'équation de Kepler est linéaire, $K = \frac{\partial}{\partial \psi}$.*

La dérive du système décrivant la navette est donc linéarisée dans un tel système de coordonnées. On appelle ellipse *osculatrice* à une trajectoire du système en un point q_1 l'ellipse du système libre passant par q_1 . Le système de coordonnées Keplerien est bien adapté pour étudier l'action de la traînée qui est colinéaire à \mathbf{v} et le plan contenant l'ellipse osculatrice est dans ce cas fixe et coïncide avec le plan osculateur contenant la vitesse et l'accélération. Par contre la force de portance est perpendiculaire à \mathbf{v} . Un choix de coordonnées canoniques pour étudier le système est délicat.

8.1.6 Le problème de contrôle optimal

Le problème est d'amener l'engin spatial d'une variété initiale M_0 à une variété finale M_1 , où le temps terminal t_f est libre, et les conditions aux limites sont données dans le tableau 8.1.

	Conditions initiales	Conditions finales
altitude (h)	119.82 km	15 km
vitesse (v)	7404.95 m/s	445 m/s
angle de vol (γ)	-1.84 deg	libre
latitude (L)	0	10.99 deg
longitude (l)	libre ou fixée à 116.59 deg	166.48 deg
azimut (χ)	libre	libre

Tableau 8.1. Conditions aux limites

La navette est, au cours de la phase de rentrée atmosphérique, soumise à trois contraintes :

- Contrainte sur le *flux thermique*

$$\varphi = C_q \sqrt{\rho} v^3 \leq \varphi^{max}, \quad (8.6)$$

- Contrainte sur l'*accélération normale*

$$\gamma_n = \gamma_{n0}(\alpha) \rho v^2 \leq \gamma_n^{max}, \quad (8.7)$$

- Contrainte sur la *pression dynamique*

$$\frac{1}{2} \rho v^2 \leq P^{max}. \quad (8.8)$$

Elles sont représentées sur la figure 8.3 dans le domaine de vol, en fonction de l'accélération $d = \frac{1}{2} \frac{SC_D}{m} \rho v^2$ et de v .

Le problème de contrôle optimal est de minimiser le flux thermique total

$$C(\mu) = \int_0^{t_f} C_q \sqrt{\rho} v^3 dt. \quad (8.9)$$

Remarque 29. Concernant ce critère d'optimisation, plusieurs choix sont en fait possibles et les critères à prendre en compte sont le facteur d'usure lié à l'intégrale du flux thermique et le confort de vol lié à l'intégrale de l'accélération normale. On choisit le premier critère, le temps final t_f étant libre.

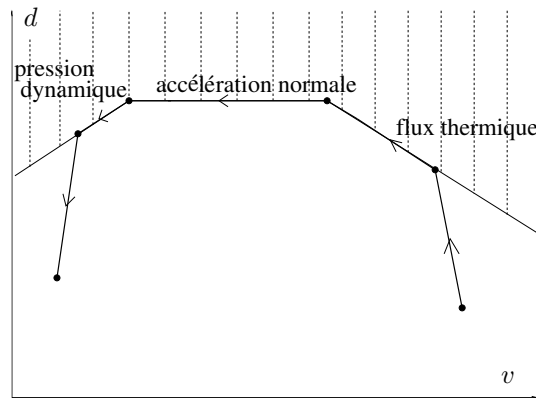


Fig. 8.3. Contraintes sur l'état, et stratégie de Harpold/Graves

8.1.7 Stratégie d'Harpold et Graves

Si on fait l'approximation $\dot{v} \simeq -d$, le coût peut être écrit

$$C(\mu) = K \int_{v_0}^{v_f} \frac{v^2}{\sqrt{d}} dv, \quad K > 0,$$

et la stratégie optimale consiste alors à maximiser l'accélération d pendant toute la durée du vol. C'est la politique décrite dans [33], qui réduit le problème à trouver une trajectoire suivant le bord du domaine d'états autorisés, dans l'ordre suivant : flux thermique maximal, puis accélération normale maximale, puis pression dynamique maximale, voir Fig. 8.3.

Cependant cette méthode *n'est pas optimale* pour notre critère, et notre but est tout d'abord de chercher une trajectoire optimale, puis de la stabiliser.

8.1.8 Données numériques

- Données générales :

Rayon de la Terre : $r_T = 6378139$ m.

Vitesse de rotation de la Terre : $\Omega = 7.292115853608596.10^{-5}$ rad.s⁻¹.

Modèle de gravité : $g(r) = \frac{g_0}{r^2}$ avec $g_0 = 3.9800047.10^{14}$ m³.s⁻².

- Modèle de densité atmosphérique :

$$\rho(r) = \rho_0 \exp\left(-\frac{1}{h_s}(r - r_T)\right)$$

avec $\rho_0 = 1.225$ kg.m⁻³ et $h_s = 7143$ m.

- Modèle de vitesse du son : $v_{\text{son}}(r) = \sum_{i=0}^5 a_i r^i$, avec

$$\begin{aligned} a_5 &= -1.880235969632294.10^{-22}, & a_4 &= 6.074073670669046.10^{-15}, \\ a_3 &= -7.848681398343154.10^{-8}, & a_2 &= 5.070751841994340.10^{-1}, \\ a_1 &= -1.637974278710277.10^6, & a_0 &= 2.116366606415128.10^{12}. \end{aligned}$$

- Nombre de Mach : $Mach(v, r) = v/v_{\text{son}}(r)$.

- Données sur la navette :

Masse: $m = 7169.602$ kg.

Surface de référence : $S = 15.05$ m².

Coefficient de traînée : $k = \frac{1}{2} \frac{SC_D}{m}$.

Coefficient de portance : $k' = \frac{1}{2} \frac{SC_L}{m}$.

- Coefficients aérodynamiques :

Table de $C_D(Mach, incidence)$

	0.00	10.00	15.00	20.00	25.00	30.00	35.00	40.00	45.00	50.00	55.00 deg
0.00	0.231	0.231	0.269	0.326	0.404	0.500	0.613	0.738	0.868	0.994	1.245
2.00	0.231	0.231	0.269	0.326	0.404	0.500	0.613	0.738	0.868	0.994	1.245
2.30	0.199	0.199	0.236	0.292	0.366	0.458	0.566	0.688	0.818	0.948	1.220
2.96	0.159	0.159	0.195	0.248	0.318	0.405	0.509	0.628	0.757	0.892	1.019
3.95	0.133	0.133	0.169	0.220	0.288	0.373	0.475	0.592	0.721	0.857	0.990
4.62	0.125	0.125	0.160	0.211	0.279	0.363	0.465	0.581	0.710	0.846	0.981
10.00	0.105	0.105	0.148	0.200	0.269	0.355	0.458	0.576	0.704	0.838	0.968
20.00	0.101	0.101	0.144	0.205	0.275	0.363	0.467	0.586	0.714	0.846	0.970
30.00	0.101	0.101	0.144	0.208	0.278	0.367	0.472	0.591	0.719	0.849	0.972
50.00	0.101	0.101	0.144	0.208	0.278	0.367	0.472	0.591	0.719	0.849	0.972
Mach											

Table de $C_L(Mach, incidence)$

	0.00	10.00	15.00	20.00	25.00	30.00	35.00	40.00	45.00	50.00	55.00 deg
0.00	0.000	0.185	0.291	0.394	0.491	0.578	0.649	0.700	0.729	0.734	0.756
2.00	0.000	0.185	0.291	0.394	0.491	0.578	0.649	0.700	0.729	0.734	0.756
2.30	0.000	0.172	0.269	0.363	0.454	0.535	0.604	0.657	0.689	0.698	0.723
2.96	0.000	0.154	0.238	0.322	0.404	0.481	0.549	0.603	0.639	0.655	0.649
3.95	0.000	0.139	0.215	0.292	0.370	0.445	0.513	0.569	0.609	0.628	0.626
4.62	0.000	0.133	0.206	0.281	0.358	0.433	0.502	0.559	0.600	0.620	0.618
10.00	0.000	0.103	0.184	0.259	0.337	0.414	0.487	0.547	0.591	0.612	0.609
20.00	0.000	0.091	0.172	0.257	0.336	0.416	0.490	0.552	0.596	0.616	0.612
30.00	0.000	0.087	0.169	0.258	0.338	0.418	0.493	0.555	0.598	0.619	0.613
50.00	0.000	0.087	0.169	0.258	0.338	0.418	0.493	0.555	0.598	0.619	0.613
Mach											

- Profil d'incidence imposé : Si le nombre de Mach est plus grand que 10 alors l'incidence est égale à 40. Si le nombre de Mach est compris entre 2 et

10 alors l'incidence est une fonction linéaire du nombre de Mach, entre les valeurs 12 et 40. Si le nombre de Mach est plus petit que 2 alors l'incidence est égale à 12 (voir figure 8.4).

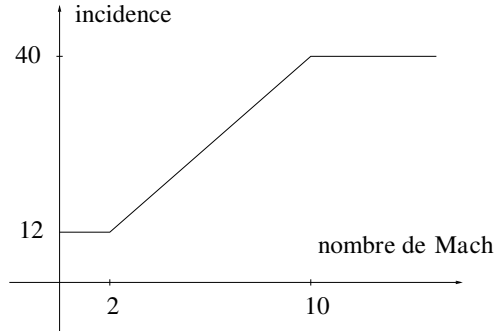


Fig. 8.4. Profil d'incidence imposé en fonction du nombre de Mach

- Contraintes sur l'état :

Contrainte sur le flux thermique $\varphi = C_q \sqrt{\rho} v^3 \leq \varphi^{\max}$, où

$$C_q = 1.705 \cdot 10^{-4} \text{ S.I.} \quad \text{et} \quad \varphi^{\max} = 717300 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Contrainte sur l'accélération normale

$$\gamma_n = \frac{S}{2m} \rho v^2 C_D \sqrt{1 + \left(\frac{C_L}{C_D}\right)^2} \leq \gamma_n^{\max} = 29.34 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Contrainte sur la pression dynamique $P = \frac{1}{2} \rho v^2 \leq P^{\max} = 25000 \text{ kPa}$.

- Conditions initiale et terminale : voir tableau 8.1.

8.1.9 La notion de trajectoire équilibrée

C'est un concept important dans la littérature spatiale que l'on peut traduire ainsi. Considérons l'équation d'évolution de la pente, où le terme en Ω est négligé,

$$\frac{d\gamma}{dt} = \cos \gamma \left(-\frac{g}{v} + \frac{v}{r} \right) + \frac{1}{2} \rho \frac{S C_L}{m} v \cos \mu.$$

Le domaine de vol équilibré est l'ensemble des conditions initiales tel que $0 \in [\dot{\gamma}_{u_1=-1}, \dot{\gamma}_{u_1=+1}]$ avec $u_1 = \cos \mu$. Avec $\cos \gamma \sim 1$ et en négligeant le terme en $\frac{v}{r}$ on obtient la condition

$$\frac{1}{2} \rho \frac{S C_L}{m} > \frac{g}{v^2} \quad (8.10)$$

(voir figure 8.5).

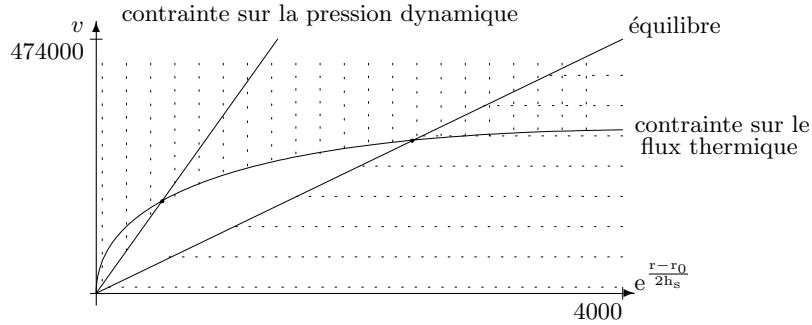


Fig. 8.5.

Cette condition n'est pas toujours réalisée, en particulier en début de trajectoire, car il faut que la vitesse soit assez petite pour que la trajectoire soit elliptique : $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{g_0}{r} < 0$. Par ailleurs le domaine de vol équilibré dépend de la densité de l'atmosphère (faible en début de trajectoire) et inversement proportionnelle à la masse. C'est une condition de contrôlabilité cruciale qui signifie que la portance peut équilibrer le terme de gravité.

On peut observer que pour $\mu = k\pi$ la portance est contenue dans le plan de l'ellipse osculatrice et le mouvement est plan.

8.1.10 Réduction du problème, modèle simplifié en dimension trois

Remarquons que le système (8.5) décrivant l'arc atmosphérique est de la forme

$$\dot{q} = X(q) + u_1 Y_1(q) + u_2 Y_2(q),$$

avec $u_1 = \cos \mu$, $u_2 = \sin \mu$ et $q = (r, v, \gamma, L, l, \chi)$. Posons $q_1 = (r, v, \gamma)$ et $q_2 = (L, l, \chi)$. Alors on peut décomposer le système de la manière suivante :

$$\dot{q}_1 = f_1(q_1, u_1) + O(\Omega), \quad \dot{q}_2 = f_2(q_2, u_2).$$

Plus précisément, le premier sous-système, qui représente le *mouvement longitudinal* de la navette, s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v \sin \gamma, \\ \dot{v} &= -g \sin \gamma - k\rho v^2 + o(\Omega), \\ \dot{\gamma} &= \cos \gamma \left(-\frac{g}{v} + \frac{v}{r} \right) + k'\rho v u_1 + O(\Omega), \end{aligned} \tag{8.11}$$

et le second sous-système, qui représente le *mouvement latéral*, est

$$\begin{aligned}
\dot{L} &= \frac{v}{r} \cos \gamma \cos \chi, \\
\dot{i} &= \frac{v \cos \gamma \sin \chi}{r \cos L}, \\
\dot{\chi} &= \frac{k' \rho v}{\cos \gamma} u_2 + \frac{v}{r} \cos \gamma \tan L \sin \chi + O(\Omega),
\end{aligned} \tag{8.12}$$

avec

$$k = \frac{1}{2} \frac{SC_D}{m}, \quad k' = \frac{1}{2} \frac{SC_L}{m}.$$

De plus, pour le contrôle de l'arc atmosphérique, le problème majeur au cours du vol est de respecter la contrainte sur le flux thermique, et ceci requiert une analyse fine du mouvement longitudinal de l'engin.

Ces remarques nous amènent à construire un modèle simplifié en dimension 3 du problème de rentrée atmosphérique. En effet, en négligeant la vitesse de rotation de la planète, ou bien en supposant la force de Coriolis constante, le système décrivant l'évolution de la navette se décompose en

$$\dot{q}_1 = f_1(q_1, u_1), \quad \dot{q}_2 = f_2(q, u_2).$$

Dans les coordonnées $q_1 = (r, v, \gamma)$, où le contrôle est $u_1 = \cos \mu$, et où on suppose la force de Coriolis constante, ce modèle simplifié s'écrit

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= v \sin \gamma, \\
\dot{v} &= -g \sin \gamma - k \rho v^2, \\
\dot{\gamma} &= \cos \gamma \left(-\frac{g}{v} + \frac{v}{r} \right) + k' \rho v u_1 + 2\Omega,
\end{aligned} \tag{8.13}$$

où le contrôle u_1 vérifie la contrainte $|u_1| \leq 1$. Pour ce modèle simplifié, on ne prend en compte que la contrainte sur le flux thermique

$$\varphi = C_q \sqrt{\rho} v^3 \leq \varphi^{max}.$$

Dans la section suivante, nous analysons en détails ce sous-problème.

8.2 Contrôle optimal et stabilisation sur le modèle simplifié en dimension trois

Dans cette section on résout théoriquement puis numériquement le problème de contrôle optimal pour le système simplifié en dimension trois, d'abord en ne tenant pas compte de la contrainte sur le flux thermique, puis en la prenant en compte.

8.2.1 Le problème sans contrainte

Rappels sur le principe du maximum

Rappelons un énoncé de ce théorème fondamental adapté à notre problème.

Théorème 50. *Considérons le système de contrôle dans \mathbb{R}^n*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad (8.14)$$

où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 et où les contrôles sont des applications mesurables et bornées définies sur des intervalles $[0, t(u)]$ de \mathbb{R}^+ et à valeurs dans $U \subset \mathbb{R}^m$. Soient M_0 et M_1 deux sous-ensembles de \mathbb{R}^n . On note \mathcal{U} l'ensemble des contrôles admissibles dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final de M_1 . Pour un tel contrôle on définit le coût

$$C(u) = \int_0^{t(u)} f^0(x(t), u(t)) dt,$$

où $f^0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ est lisse et $x(\cdot)$ est la trajectoire solution de (8.14) associée au contrôle u (problème de contrôle optimal à temps final non fixé).

Si le contrôle $u \in \mathcal{U}$ est optimal sur $[0, t_*]$, alors il existe une application non triviale $(p(\cdot), p^0) : [0, t_*] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ absolument continue appelée vecteur adjoint, où p^0 est une constante négative ou nulle, telle que la trajectoire optimale x associée au contrôle u vérifie presque partout sur $[0, t_*]$ le système

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p, p^0, u), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p, p^0, u), \quad (8.15)$$

où $H(x, p, p^0, u) = \langle p, f(x, u) \rangle + p^0 f^0(x, u)$ est le Hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur $[0, t_*]$

$$H(x(t), p(t), p^0, u(t)) = M(x(t), p(t), p^0) \quad (8.16)$$

où $M(x(t), p(t), p^0) = \max_{u \in \mathcal{U}} H(x(t), p(t), p^0, u)$. De plus on a, pour tout $t \in [0, t_*]$,

$$M(x(t), p(t), p^0, u(t)) = 0. \quad (8.17)$$

Si M_0 et M_1 (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de \mathbb{R}^n ayant des espaces tangents en $x(0) \in M_0$ et $x(t_*) \in M_1$, alors le vecteur adjoint peut être choisi de manière à satisfaire les conditions de transversalité aux deux extrémités

$$p(0) \perp T_{x(0)} M_0 \quad \text{et} \quad p(t_*) \perp T_{x(t_*)} M_1.$$

Remarque 30. L'application du principe du maximum permet de ramener un problème de contrôle optimal à un problème aux valeurs limites, qui se résout ensuite numériquement avec une méthode de tir (cf [66]), ce que nous ferons plus loin.

Application au problème de la navette

Le système simplifié (8.13) en dimension trois peut s'écrire comme un *système de contrôle affine mono-entrée*

$$\dot{x}(t) = X(x(t)) + u(t)Y(x(t)), \quad |u(t)| \leq 1, \quad (8.18)$$

où $x = (r, v, \gamma)$, et

$$\begin{aligned} X &= v \sin \gamma \frac{\partial}{\partial r} - (g \sin \gamma + k\rho v^2) \frac{\partial}{\partial v} + \cos \gamma \left(-\frac{g}{v} + \frac{v}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \gamma}, \\ Y &= k' \rho v \frac{\partial}{\partial \gamma}, \end{aligned}$$

Le coût est le flux thermique total

$$C(u) = \int_0^{t_f} \varphi dt,$$

avec $\varphi = C_q \sqrt{\rho(r)} v^3$. On suppose de plus que g est constant.

Proposition 81. *Toute trajectoire optimale est bang-bang, i.e. est une succession d'arcs associés au contrôle $u = \pm 1$.*

Preuve. Dans notre cas le Hamiltonien s'écrit

$$H(x, p, p^0, u) = \langle p, X(x) + uY(x) \rangle + p^0 \varphi(x),$$

et la condition de maximisation implique que $u = \text{signe}(\langle p, Y \rangle)$ si $\langle p, Y \rangle \neq 0$. Il suffit donc de montrer que la fonction $t \mapsto \langle p(t), Y(x(t)) \rangle$, appelée *fonction de commutation*, ne s'annule sur aucun sous-intervalle, le long d'une extrémale. Supposons le contraire, i.e.

$$\langle p(t), Y(x(t)) \rangle = 0,$$

sur un intervalle I . En dérivant deux fois par rapport à t il vient

$$\begin{aligned} \langle p(t), [X, Y](x(t)) \rangle &= 0, \\ \langle p(t), [X, [X, Y]](x(t)) \rangle + u(t) \langle p(t), [Y, [X, Y]](x(t)) \rangle &= 0, \end{aligned}$$

où $[.,.]$ est le crochet de Lie de champs de vecteurs. Par conséquent sur l'intervalle I le vecteur $p(t)$ est orthogonal aux vecteurs $Y(x(t))$, $[X, Y](x(t))$, et $[X, [X, Y]](x(t)) + u(t)[Y, [X, Y]](x(t))$. Or on a le lemme suivant.

Lemme 56. *Pour tout u tel que $|u| \leq 1$, on a*

$$\det(Y(x), [X, Y](x), [X, [X, Y]](x) + u[Y, [X, Y]](x)) \neq 0.$$

Preuve (Preuve du lemme.). Le calcul donne

$$\begin{aligned} [X, Y] &= v \cos \gamma \frac{\partial}{\partial r} - g \cos \gamma \frac{\partial}{\partial v} \\ [Y, [X, Y]] &= v \sin \gamma \frac{\partial}{\partial r} - g \sin \gamma \frac{\partial}{\partial v} \end{aligned}$$

et donc $[Y, [X, Y]] \in \text{Vect}(Y, [X, Y])$. Par ailleurs, $\det(Y, [X, Y], [X, [X, Y]])$ n'est jamais nul dans le domaine de vol (où $\cos \gamma \neq 0$).

Il s'ensuit que $p(t) = 0$ sur I . Par ailleurs le Hamiltonien est identiquement nul le long de l'extrémale, et par conséquent, $p^0 \varphi(x(t)) = 0$ sur I . Comme $\varphi \neq 0$, on en déduit $p^0 = 0$. Donc le couple $(p(\cdot), p^0)$ est nul sur I , ce qui est exclu par le principe du maximum.

Le contrôle optimal $u(t)$ est donc *bang-bang*, i.e. c'est une succession d'arcs $u = \pm 1$. Nous avons le résultat suivant, qui découle d'une étude géométrique détaillée dans [11, 14].

Proposition 82. *La trajectoire optimale satisfaisant les conditions initiale et finale (voir tableau 8.1) est constituée des deux arcs consécutifs $u = -1$ puis $u = +1$.*

Pour expliquer ce résultat suffit d'appliquer la proposition 78 du Chap. 7, qui décrit la synthèse temps-minimale locale en dimension 3. Pour cela il faut reparamétriser notre système par le flux, de manière à se ramener à un problème de temps minimal.

On introduit un nouveau paramétrage s du système (8.18) en posant

$$ds = \varphi(q(t))dt. \quad (8.19)$$

En notant $'$ la dérivée par rapport à s , le système (8.18) s'écrit

$$x' = \bar{X}(x) + u\bar{x}(q), \quad |u| \leq 1 \quad (8.20)$$

où $\bar{X} = \psi X$, $\bar{Y} = \psi Y$, et $\psi = \frac{1}{\varphi}$. Le problème de contrôle optimal équivaut alors à un problème de *temps minimal*. On établit le lemme suivant à l'aide de Maple.

Lemme 57. *Dans le domaine de vol où $\cos \gamma \neq 0$, on a :*

1. $\bar{X}, \bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}]$ sont linéairement indépendants.
2. $[\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}]] \in \text{Vect}\{\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}]\}$.
3. $[\bar{X}, [\bar{X}, \bar{Y}]](x) = a(x)\bar{X}(x) + b(x)\bar{Y}(x) + c(x)[\bar{X}, \bar{Y}](x)$ avec $a < 0$.

Avec les résultats du Chap. 8, la proposition s'ensuit.

Simulations numériques

La trajectoire optimale est donc de la forme $\gamma_- \gamma_+$, où γ_- (resp. γ_+) représente un arc solution du système (8.13) associé au contrôle $u = -1$ (resp. $u = +1$). Il s'agit donc de déterminer numériquement le temps de commutation t_c , i.e. le temps auquel le contrôle $u(t)$ passe de la valeur -1 à la valeur $+1$. Pour cela, on peut procéder par *dichotomie*, de la manière suivante. Etant donné un temps de commutation t_c , on intègre le système en (r, v, γ) , jusqu'à ce que la vitesse v atteigne la valeur requise, soit 445 m/s. On effectue alors une dichotomie sur t_c de manière à ajuster l'altitude finale $r(t_f) = r_T + h(t_f)$ à la valeur souhaitée, soit 15 km.

Remarque 31. Il s'agit d'un cas particulier de méthode de tir, qui se ramène ici pour le problème simplifié à une dichotomie. Dans le cas général traité plus loin, la mise en oeuvre d'une méthode de tir (multiple) est nécessaire.

Les résultats obtenus sont tracés sur les figures 8.6 et 8.7. On se rend compte que cette stratégie ne permet pas de respecter la contrainte sur le flux thermique, et n'est donc pas adaptée au problème. La prise en compte de cette contrainte sur l'état est donc bien indispensable.

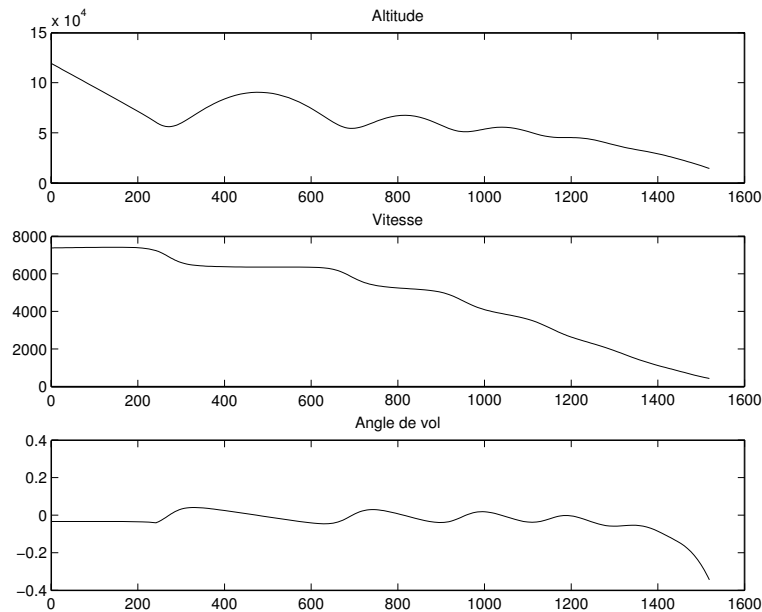


Fig. 8.6. Coordonnées d'état pour le problème sans contrainte

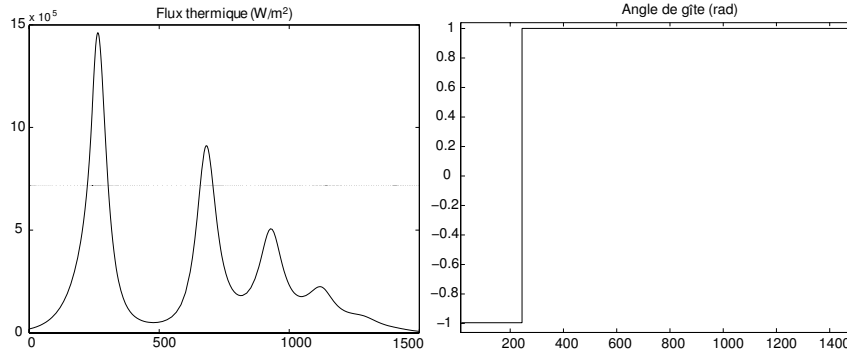


Fig. 8.7. Flux thermique, et angle de gîte (contrôle), pour le problème sans contrainte

8.2.2 Le problème avec contrainte sur l'état

On tient maintenant compte de la contrainte sur le flux thermique.

Lemme 58. *En supposant que C_D et C_L sont constants, la contrainte sur le flux thermique est d'ordre deux, et l'hypothèse C_1 , à savoir "YXc ne s'annule pas sur la frontière" (voir Chap. 8), est satisfaite dans le domaine de vol.*

Dans la partie du domaine de vol où l'arc frontière est admissible et non saturant (hypothèse C_3), l'arc γ_- viole la contrainte au voisinage de la frontière. On déduit donc du théorème 49 du Chap. 7 le résultat suivant.

Proposition 83. [12, 11] *La trajectoire optimale satisfaisant les conditions initiale et finale requises est de la forme $\gamma_- \gamma_+^T \gamma_b \gamma_+^T$, i.e. elle est constituée des quatre arcs consécutifs : $u = -1$, $u = +1$, un arc frontière correspondant à un flux thermique maximal, puis $u = +1$.*

Comme pour le problème sans contrainte, on a trois temps de commutation à calculer numériquement :

- le temps de commutation t_1 de -1 à $+1$,
- le temps de commutation t_2 de $+1$ à u_s , où u_s est l'expression du contrôle permettant un flux thermique maximal,
- le temps de commutation t_3 de u_s à $+1$.

Calcul du contrôle iso-flux u_s

Le long d'un arc frontière restant à flux thermique maximal, on doit avoir $\dot{\varphi} = \varphi^{max}$. Par dérivation, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \varphi \left(-\frac{1}{2} \frac{v}{h_s} \sin \gamma - \frac{3g_0}{r^2 v} \sin \gamma - 3k\rho v \right), \\ \ddot{\varphi} &= A + Bu, \end{aligned}$$

où les coefficients A et B sont calculés à l'aide de Maple. Le long de l'arc frontière iso-flux, on doit avoir

$$\varphi(t) = \varphi^{max}, \quad \dot{\varphi}(t) = \ddot{\varphi}(t) = 0,$$

d'où l'on déduit

$$u_s(t) = -\frac{A(t)}{B(t)}.$$

L'expression obtenue pour $u_s(t)$ est

$$\begin{aligned} u_s = & \left(g_0 r^2 v^2 + 7k\rho v^4 r^4 \sin\gamma - r^3 v^4 \cos^2\gamma - 2\Omega r^4 v^3 \cos\gamma \right. \\ & - 18g_0 h_s r v^2 \cos^2\gamma - 6g_0^2 h_s + 12g_0^2 h_s \cos^2\gamma + 12g_0 h_s r v^2 \\ & \left. - 12\Omega g_0 h_s r^2 v \cos\gamma + 6k^2 h_s \rho^2 r^4 v^4 \right) \\ & / (k' r^2 v^2 \rho (r^2 v^2 + 6g_0 h_s) \cos\gamma). \end{aligned}$$

Remarque 32. Les simulations à venir nous permettront de vérifier *a posteriori* que ce contrôle u_s est bien admissible, i.e. vérifie la contrainte $|u_s| \leq 1$, pendant la phase iso-flux.

Simulations numériques

Le temps de commutation t_1 est calculé de la manière suivante. On intègre le système (8.13) jusqu'à ce que $\dot{\varphi} = 0$. On calcule alors t_1 par dichotomie de façon à ajuster φ à sa valeur maximale φ^{max} en ce temps d'arrêt. On détermine ainsi numériquement le premier temps de commutation $t_1 = 153.5$. Le temps de sortie de la phase iso-flux est déterminé de manière complètement analogue. Finalement, on arrive aux résultats représentés sur les figures 8.8 et 8.9.

On a donc ainsi déterminé numériquement une trajectoire optimale satisfaisant les conditions aux limites souhaitées, et respectant la contrainte sur le flux thermique.

Remarque 33. Pour le modèle non simplifié en dimension 6, ce n'est pas le cas : les contraintes sur le facteur de charge et sur la pression dynamique ne sont pas respectées, et il faut envisager une phase iso-accélération normale, voir section suivante.

8.2.3 Stabilisation autour de la trajectoire nominale

On se propose maintenant de stabiliser le système simplifié autour de la trajectoire construite dans le paragraphe précédent, de façon à prendre en compte d'éventuelles perturbations, dues aux erreurs de modèles, aux perturbations atmosphériques, etc. Pour cela, on utilise la *théorie linéaire-quadratique*, qui permet d'exprimer le contrôle sous forme de boucle fermée, au voisinage de la trajectoire nominale, de façon à la rendre stable.

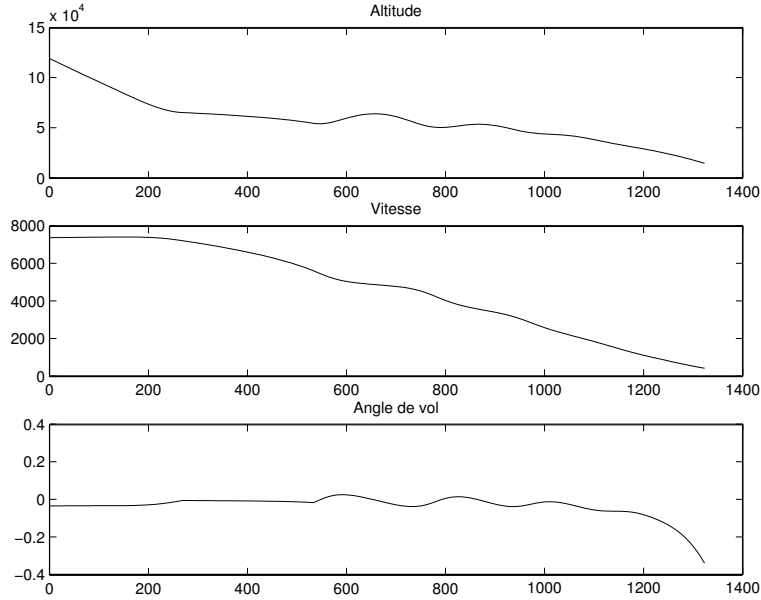


Fig. 8.8. Coordonnées d'état pour le problème avec contrainte

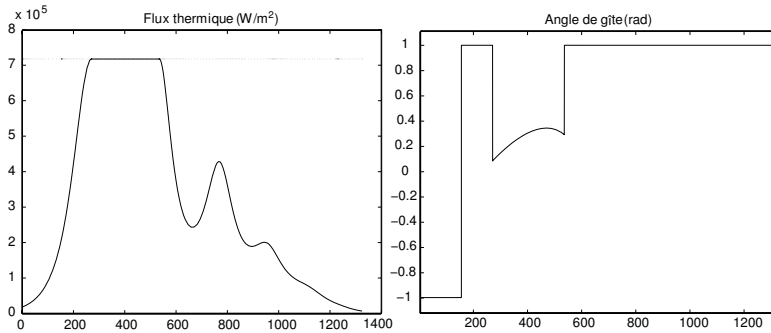


Fig. 8.9. Flux thermique, et angle de gîte (contrôle), pour le problème avec contrainte

Rappels sur l'équation de Riccati et sur les problèmes de régulateurs

Soit $T > 0$ fixé, et soit $x \in \mathbb{R}^n$. Considérons le problème LQ de trouver une trajectoire solution de

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x, \tag{8.21}$$

minimisant le coût quadratique

$$C_T(u) = {}^t x(T)Qx(T) + \int_0^T ({}^t x(t)W(t)x(t) + {}^t u(t)U(t)u(t)) dt, \tag{8.22}$$

où, pour tout $t \in [0, T]$, $U(t) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive, $W(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive, et $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique positive. On suppose que la dépendance en t de A , B , W et U est L^∞ sur $[0, T]$. Par ailleurs le coût étant quadratique, l'espace naturel des contrôles est $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$.

La fonction valeur S_T au point x est la borne inférieure des coûts pour le problème LQ. Autrement dit,

$$S_T(x) = \inf\{C_T(u) \mid x_u(0) = x\}.$$

On fait l'hypothèse suivante sur U :

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m) \quad \int_0^T {}^t u(t)U(t)u(t)dt \geq \alpha \int_0^T {}^t u(t)u(t)dt. \quad (8.23)$$

Par exemple cette hypothèse est satisfaite si l'application $t \mapsto U(t)$ est continue sur $[0, T]$ et $T < +\infty$, ou encore s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $t \in [0, T]$ et pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^m$ on ait ${}^t vU(t)v \geq c {}^t v v$.

Théorème 51. *Sous l'hypothèse (8.23), pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ il existe une unique trajectoire optimale x associée au contrôle u pour le problème (8.21), (8.22). Le contrôle optimal se met sous forme de boucle fermée*

$$u(t) = U(t)^{-1} {}^t B(t)E(t)x(t), \quad (8.24)$$

où $E(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est solution sur $[0, T]$ de l'équation matricielle de Riccati

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= W(t) - {}^t A(t)E(t) - E(t)A(t) - E(t)B(t)U(t)^{-1} {}^t B(t)E(t), \\ E(T) &= -Q. \end{aligned} \quad (8.25)$$

De plus pour tout $t \in [0, T]$ la matrice $E(t)$ est symétrique, et

$$S_T(x) = -{}^t x E(0)x. \quad (8.26)$$

Remarque 34. En particulier le théorème affirme que le contrôle optimal u se met sous forme de boucle fermée

$$u(t) = K(t)x(t),$$

où $K(t) = U(t)^{-1} {}^t B(t)E(t)$. Cette forme se prête bien aux problèmes de stabilisation, comme nous le verrons plus loin.

Remarque 35. Il est clair d'après l'expression (8.26) du coût minimal que la matrice $E(0)$ est symétrique négative. Si la matrice Q est symétrique définie positive, ou bien si pour tout $t \in [0, T]$ la matrice $W(t)$ est symétrique définie positive, on montre que la matrice $E(0)$ est de plus symétrique définie négative.

Remarque 36. Pour l'implémentation numérique de l'équation de Riccati, on utilise une représentation linéaire de cette équation de Riccati, voir par exemple [43].

Appliquons maintenant la théorie LQ précédente au problème du régulateur d'état (ou "problème d'asservissement", ou "problème de poursuite", en anglais "tracking problem"). Considérons le système de contrôle linéaire perturbé

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad x(0) = x_0, \quad (8.27)$$

et soit $\xi(t)$ une certaine trajectoire de \mathbb{R}^n sur $[0, T]$, partant d'un point ξ_0 (et qui n'est pas forcément solution du système (8.27)). Le but est de déterminer un contrôle tel que la trajectoire associée, solution de (8.27), suive le mieux possible la trajectoire de référence $\xi(t)$. La théorie LQ permet d'établir le résultat suivant.

Proposition 84. *Soit ξ une trajectoire de \mathbb{R}^n sur $[0, T]$, et considérons le problème de poursuite pour le système de contrôle*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad x(0) = x_0,$$

où l'on veut minimiser le coût

$$C(u) = {}^t(x(T) - \xi(T))Q(x(T) - \xi(T)) + \int_0^T ({}^t x(t) - \xi(t))W(t)(x(t) - \xi(t)) + {}^t u(t)U(t)u(t) \, dt.$$

Alors il existe un unique contrôle optimal, qui s'écrit

$$u(t) = U(t)^{-1} {}^t B(t)E(t)(x(t) - \xi(t)) + U(t)^{-1} {}^t B(t)h(t),$$

où $E(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $h(t) \in \mathbb{R}^n$ sont solutions sur $[0, T]$ de

$$\begin{aligned} \dot{E} &= W - {}^t A E - E A - E B U^{-1} {}^t B E, & E(T) &= -Q, \\ \dot{h} &= -{}^t A h - E(A\xi - \dot{\xi} + r) - E B U^{-1} {}^t B h, & h(T) &= 0, \end{aligned}$$

et de plus $E(t)$ est symétrique. Par ailleurs le coût minimal est alors égal à

$$\begin{aligned} & - {}^t(x(0) - \xi(0))E(0)(x(0) - \xi(0)) - 2 {}^t h(0)(x(0) - \xi(0)) \\ & - \int_0^T \left(2 {}^t(A(t)\xi(t) - \dot{\xi}(t) + r(t))h(t) + {}^t h(t)B(t)U(t)^{-1} {}^t B(t)h(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Remarque 37. Notons que le contrôle optimal s'écrit bien sous forme de boucle fermée

$$u(t) = K(t)(x(t) - \xi(t)) + H(t).$$

Considérons maintenant le système de contrôle non linéaire dans \mathbb{R}^n

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),$$

où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est C^1 , et les contrôles admissibles u sont à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Soit $(x_e(\cdot), u_e(\cdot))$ une trajectoire solution sur $[0, T]$, telle que pour tout $t \in [0, T]$ on ait $u(t) \in \overset{\circ}{\Omega}$.

Supposons maintenant que le système soit légèrement perturbé, ou bien que l'on parte d'une condition initiale proche de $x_e(0)$, et que l'on veuille suivre le plus possible la trajectoire nominale $x_e(\cdot)$. Posons alors $y(\cdot) = x(\cdot) - x_e(\cdot)$ et $v(\cdot) = u(\cdot) - u_e(\cdot)$. Au premier ordre, $y(\cdot)$ est solution du système linéarisé

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)v(t),$$

où

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e(t), u_e(t)), \quad B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(x_e(t), u_e(t)).$$

Le but est alors de rendre l'erreur $y(\cdot)$ la plus petite possible, ce qui nous amène à considérer, pour ce système linéaire, un coût quadratique du type précédent, où les matrices de pondération Q, W, U sont à choisir en fonction des données du problème. Il s'agit, au premier ordre, d'un problème de poursuite avec $\xi = x_e$. En particulier on a $h = 0$ pour ce problème.

C'est cette stratégie que l'on adopte pour stabiliser la navette vers sa trajectoire de référence.

Application au problème de stabilisation de la navette

Pour tenir compte de la contrainte sur le contrôle, il faut d'abord modifier la trajectoire nominale $x_e(\cdot)$ obtenue précédemment de façon à ce qu'elle respecte la nouvelle contrainte sur le contrôle $|u_e| \leq 1 - \varepsilon$, où ε est un petit paramètre. On choisit par exemple $\varepsilon = 0.05$. On trouve alors de nouveaux temps de commutation, qui sont

$$t_1 = 143.59, \quad t_2 = 272.05, \quad t_3 = 613.37.$$

Les simulations sont effectuées en prenant des conditions initiales proches, mais différentes, de celles du tableau 8.1. Le choix des *poids* est important. On obtient des poids adaptés par tâtonnements, et en tenant compte de l'ordre respectif des variables du système. Ici on a pris

$$W = \begin{pmatrix} 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = 10^{10}.$$

Bien entendu d'autres choix sont possibles. Ici notre choix de Q force l'altitude finale à être proche de l'altitude souhaitée. En revanche on laisse plus de liberté à la vitesse finale et à l'angle de vol final.

La trajectoire $x(\cdot)$ part d'un point $x(0)$ différent de $x_e(0)$. On a pris les données numériques suivantes :

- écart sur l'altitude initiale : 1500 m,
- écart sur la vitesse initiale : 40 m/s,
- écart sur l'angle de vol initial : -0.004 rad, soit -0.2292 deg.

Les résultats numériques obtenus sont assez satisfaisants : l'altitude finale obtenue est 15359 km, et la vitesse finale est 458 m/s. L'écart par rapport aux données souhaitées (altitude 15 km, vitesse 440 m/s) est donc assez faible.

Notons que l'écart sur l'angle de vol initial que nous avons pris ici est assez important. Cette pente initiale est en effet un paramètre très sensible dans les équations : si à l'entrée de la phase atmosphérique l'angle de vol est trop faible, alors la navette va rebondir sur l'atmosphère (phénomène bien connu, dit de rebond), et si au contraire il est trop important il sera impossible de redresser l'engin, qui va s'écraser au sol.

Les figures suivantes sont le résultat des simulations numériques. La figure 8.10 représente l'écart entre l'état nominal et l'état réel, et la figure 8.11 l'écart entre le contrôle nominal et le contrôle réel (contrôle bouclé, ou contrôle feedback). La figure 8.12 représente l'état, et la figure 8.13 le flux thermique. On constate que la contrainte sur le flux thermique est à peu près respectée. On peut conclure que la procédure de stabilisation ainsi réalisée est satisfaisante.

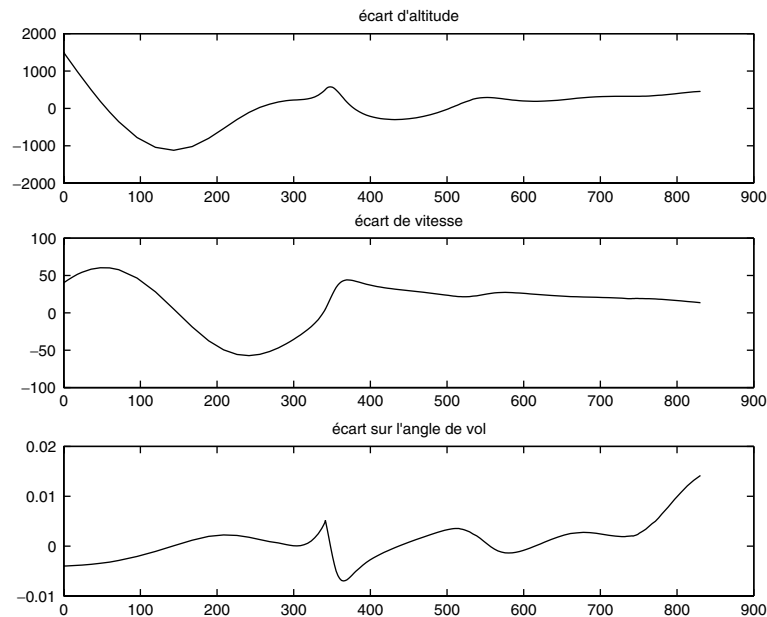


Fig. 8.10. Ecart entre l'état nominal et l'état réel

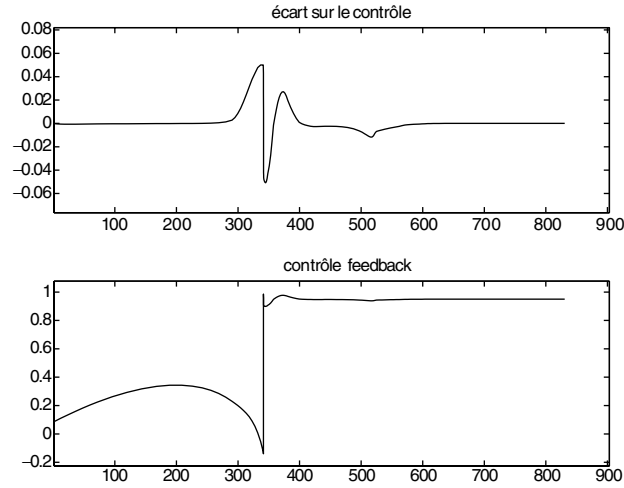


Fig. 8.11. Contrôle bouclé, et correction par rapport au contrôle nominal

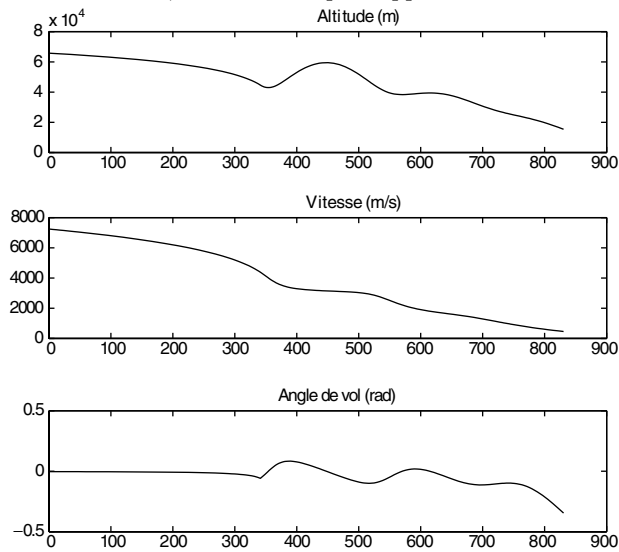


Fig. 8.12. Etat avec le contrôle feedback

8.3 Contrôle optimal du problème complet

Dans cette section nous effectuons le contrôle optimal de l'arc atmosphérique du système complet (8.5), en dimension six, soumis aux trois contraintes sur l'état : flux thermique, accélération normale, et pression dynamique.

8.3.1 Extrémales du problème non contraint

Considérons tout d'abord le problème sans contrainte sur l'état. Le Hamiltonien du système s'écrit

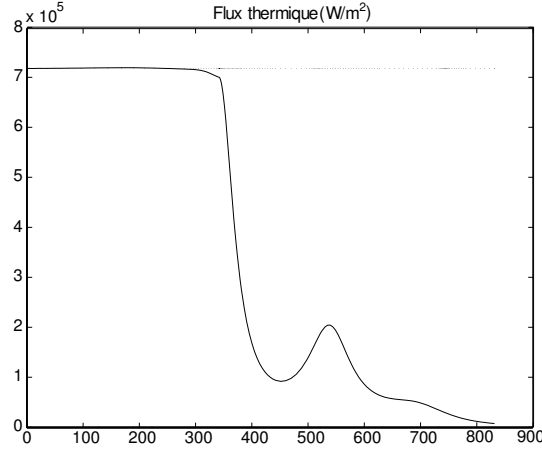


Fig. 8.13. Flux thermique avec le contrôle feedback

$$H(q, p, u) = \langle p, X(q) \rangle + u_1 \langle p, Y_1(q) \rangle + u_2 \langle p, Y_2(q) \rangle + p^0 \varphi,$$

où $u = (u_1, u_2)$, $u_1 = \cos \mu$, $u_2 = \sin \mu$ et $p = (p_r, p_v, p_\gamma, p_L, p_l, p_\chi)$ est le vecteur adjoint.

En paramétrisant les trajectoires par $ds = \varphi(q)dt$, on se ramène à un problème de temps minimal. Les contrôles vérifient la contrainte non convexe $u_1^2 + u_2^2 = 1$, que l'on convexifie selon $u_1^2 + u_2^2 \leq 1$ de manière à assurer l'existence de solutions optimales. D'après le principe du maximum, les contrôles extrémaux sont donnés, en dehors de la surface $\Sigma : \langle p, Y_1 \rangle = \langle p, Y_2 \rangle = 0$, par

$$\begin{aligned} u_1 = \cos \mu &= \frac{\langle p, Y_1 \rangle}{\sqrt{\langle p, Y_1 \rangle^2 + \langle p, Y_2 \rangle^2}} = \frac{\cos \gamma p_\gamma}{\sqrt{\cos^2 \gamma p_\gamma^2 + p_\chi^2}}, \\ u_2 = \sin \mu &= \frac{\langle p, Y_2 \rangle}{\sqrt{\langle p, Y_1 \rangle^2 + \langle p, Y_2 \rangle^2}} = \frac{p_\chi}{\sqrt{\cos^2 \gamma p_\gamma^2 + p_\chi^2}} \end{aligned} \quad (8.28)$$

Les extrémales correspondantes sont dites *régulières*, et celles qui sont contenues dans la surface Σ sont dites *singulières*.

Remarque 38. Supposons que Ω soit négligeable. Si on impose $u_2 = 0$, on obtient un système de contrôle affine mono-entrée étudié dont la projection sur l'espace (r, v, γ) a été étudiée dans la section précédente. Dans ce cas, la force de portance est tangente au plan de la trajectoire du système libre, et l'algèbre de Lie engendrée par X, Y_1 est de dimension ≤ 4 . Les relations

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{v}{r} \cos \gamma \sin \chi \tan L, \quad \frac{dL}{dt} = \frac{v}{r} \cos \gamma \cos \chi,$$

conduisent à la réduction cruciale

$$\frac{d\chi}{dL} = \tan \chi \tan L,$$

et la relation

$$\int_{\chi(0)}^{\chi} \frac{d\chi}{\tan \chi} = \int_{L(0)}^L \tan L \, dL.$$

En particulier l'évolution $L \mapsto \chi(L)$ ne dépend pas du contrôle.

Calcul des extrémales singulières

Calculons les extrémales contenues dans la surface Σ , i.e. telles que $p_\gamma = p_\chi = 0$. Elles se projettent sur les trajectoires singulières du système affine $\dot{q} = X(q) + u_1 Y_1(q) + u_2 Y_2(q)$. Les trajectoires singulières (singularités de l'application entrée-sortie) étant feedback invariantes (voir [10]), on peut remplacer Y_1 par le champ de vecteurs constant $\partial/\partial\gamma$, et Y_2 par $\partial/\partial\chi$. Dans ce cas, $[Y_1, Y_2] = 0$, et on peut considérer γ et χ comme des contrôles. Des calculs formels sur les crochets de Lie conduisent au résultat suivant (pour plus de détails, voir [14]).

Lemme 59. *Les trajectoires singulières du système bi-entrée $\dot{q} = X(q) + u_1 Y_1(q) + u_2 Y_2(q)$ vérifient $\chi = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.*

Les simulations numériques montrent que cette situation n'arrive jamais, en fait on verra que $\chi(t) \in]0, \pi/2[$ dans le domaine de vol.

Calcul des extrémales régulières

Les contrôles extrémaux sont alors donnés par les formules (8.28). Le calcul du système extrémal est compliqué en raison du nombre de termes, et a été réalisé avec Maple. Le Hamiltonien est $H = \langle p, X + u_1 Y_1 + u_2 Y_2 \rangle + p^0 \varphi$ où $p^0 \leq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= v \sin \gamma \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{g_0 \sin \gamma}{r^2} - k \rho v^2 + \Omega^2 r \cos L (\sin \gamma \cos L - \cos \gamma \sin L \cos \chi) \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \left(-\frac{g_0}{r^2 v} + \frac{v}{r} \right) \cos \gamma + k' \rho v \cos \mu + 2 \Omega \cos L \sin \chi \\ &\quad + \frac{\Omega^2 r}{v} \cos L (\cos \gamma \cos L + \sin \gamma \sin L \cos \chi) \\ \frac{dL}{dt} &= \frac{v}{r} \cos \gamma \cos \chi \\ \frac{d\ell}{dt} &= \frac{v \cos \gamma \sin \chi}{r \cos L} \\ \frac{d\chi}{dt} &= \frac{k' \rho v}{\cos \gamma} \sin \mu + \frac{v}{r} \cos \gamma \tan L \sin \chi + 2 \Omega (\sin L - \tan \gamma \cos L \cos \chi) \\ &\quad + \Omega^2 \frac{r \sin L \cos L \sin \chi}{v \cos \gamma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dp_r}{dt} = & -p_v \left(2 \frac{g_0 \sin \gamma}{r^3} + \frac{k \rho v^2}{h_s} + \Omega^2 \cos L (\sin \gamma \cos L \right. \\
& \left. - \cos \gamma \sin L \cos \chi) \right) \\
& - p_\gamma \left(\left(2 \frac{g_0}{r^3 v} - \frac{v}{r^2} \right) \cos \gamma - \frac{k' \rho v}{h_s} \cos \mu \right. \\
& \left. + \frac{\Omega^2}{v} \cos L (\cos \gamma \cos L + \sin \gamma \sin L \cos \chi) \right) \\
& + p_L \frac{v}{r^2} \cos \gamma \cos \chi + p_l \frac{v}{r^2} \frac{\cos \gamma \sin \chi}{\cos L} \\
& - p_\chi \left(- \frac{k' \rho v}{h_s \cos \gamma} \sin \mu - \frac{v}{r^2} \cos \gamma \tan L \sin \chi \right. \\
& \left. + \frac{\Omega^2}{v} \frac{\sin L \cos L \sin \chi}{\cos \gamma} \right) \\
& + p^0 \frac{C_q \sqrt{\rho} v^3}{2h_s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dp_v}{dt} = & -p_r \sin \gamma + 2 p_v k \rho v - p_\gamma \left(\left(\frac{g_0}{r^2 v^2} + \frac{1}{r} \right) \cos \gamma + k' \rho \cos \mu \right. \\
& \left. - \frac{\Omega^2 r}{v^2} \cos L (\cos \gamma \cos L + \sin \gamma \sin L \cos \chi) \right) - p_L \frac{\cos \gamma \cos \chi}{r} \\
& - p_l \frac{\cos \gamma \sin \chi}{r \cos L} \\
& - p_\chi \left(\frac{k' \rho}{\cos \gamma} \sin \mu + \frac{\cos \gamma \tan L \sin \chi}{r} - \frac{\Omega^2 r}{v^2} \frac{\sin L \cos L \sin \chi}{\cos \gamma} \right) \\
& - 3 p^0 C_q \sqrt{\rho} v^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dp_\gamma}{dt} = & -p_r v \cos \gamma - p_v \left(- \frac{g_0}{r^2} \cos \gamma + \Omega^2 r \cos L (\cos \gamma \cos L \right. \\
& \left. + \sin \gamma \sin L \cos \chi) \right) \\
& - p_\gamma \left(\left(\frac{g_0}{r^2 v} - \frac{v}{r} \right) \sin \gamma + \frac{\Omega^2 r}{v} \cos L (- \sin \gamma \cos L \right. \\
& \left. + \cos \gamma \sin L \cos \chi) \right) \\
& + p_L \frac{v}{r} \sin \gamma \cos \chi + p_l \frac{v}{r} \frac{\sin \gamma \sin \chi}{\cos L} \\
& - p_\chi \left(k' \rho v \frac{\sin \gamma}{\cos^2 \gamma} \sin \mu - \frac{v}{r} \sin \gamma \tan L \sin \chi \right. \\
& \left. - 2 \Omega (1 + \tan^2 \gamma) \cos L \cos \chi + \frac{\Omega^2 r}{v} \frac{\sin L \cos L \sin \chi \sin \gamma}{\cos^2 \gamma} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dp_L}{dt} = & -p_v \left(-\Omega^2 r \sin L (\sin \gamma \cos L - \cos \gamma \sin L \cos \chi) \right. \\
& \left. + \Omega^2 r \cos L (-\sin \gamma \sin L - \cos \gamma \cos L \cos \chi) \right) \\
& - p_\gamma \left(-2\Omega \sin L \sin \chi - \frac{\Omega^2 r}{v} \sin L (\cos \gamma \cos L \right. \\
& \left. + \sin \gamma \sin L \cos \chi) \right. \\
& \left. + \frac{\Omega^2 r}{v} \cos L (-\cos \gamma \sin L + \sin \gamma \cos L \cos \chi) \right) \\
& - p_l \frac{v \cos \gamma \sin \chi \sin L}{r \cos^2 L} \\
& - p_\chi \left(\frac{v}{r} \cos \gamma (1 + \tan^2 L) \sin \chi + 2\Omega (\cos L + \tan \gamma \sin L \cos \chi) \right. \\
& \left. + \frac{\Omega^2 r \cos^2 L \sin \chi}{v \cos \gamma} - \frac{\Omega^2 r \sin^2 L \sin \chi}{v \cos \gamma} \right)
\end{aligned}$$

$$\frac{dp_l}{dt} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{dp_\chi}{dt} = & -p_v \Omega^2 r \cos L \cos \gamma \sin L \sin \chi \\
& - p_\gamma \left(2\Omega \cos L \cos \chi - \frac{\Omega^2 r}{v} \cos L \sin L \sin \gamma \sin \chi \right) \\
& + p_L \frac{v}{r} \cos \gamma \sin \chi - p_l \frac{v \cos \gamma \cos \chi}{r \cos L} \\
& - p_\chi \left(\frac{v}{r} \cos \gamma \tan L \cos \chi + 2\Omega \tan \gamma \cos L \sin \chi \right. \\
& \left. + \frac{\Omega^2 r \sin L \cos L \cos \chi}{v \cos \gamma} \right)
\end{aligned}$$

Remarque 39. L'analyse du flot extrémal, initialisée dans [14], est complexe. Ceci est dû d'une part aux singularités méromorphes en $p_\gamma = p_\chi = 0$, d'autre part à l'existence d'extrémales singulières. Heureusement, dans notre problème, on n'a pas besoin de connaître une classification des extrémales, car les conditions limites conduisent via les conditions de transversalité à des simplifications et réductions notables.

8.3.2 Construction d'une trajectoire quasi-optimale

On prend maintenant en compte les trois contraintes sur l'état. Les simulations numériques montrent que la contrainte sur le flux thermique concerne les vitesses élevées, celle sur l'accélération normale concerne les vitesses moyennes, et celle sur la pression dynamique concerne les basses vitesses. Donc, si la trajectoire contient des arcs frontières, cela doit être dans l'ordre

suisant : flux thermique, accélération normale, pression dynamique. Par ailleurs l'étude faite sur le système simplifié en dimension trois montre qu'un arc frontière iso-flux est inévitable ; en fait cet arc représente le moment stratégique du vol, et aussi le plus dangereux.

Début de la trajectoire

Pour construire le début de la trajectoire, faisons deux remarques préliminaires.

1. *Observation numérique : la force de Coriolis.* Selon les données numériques du tableau 8.1, les valeurs initiale et finale $r(0)$, $v(0)$, $\gamma(0)$, $L(0)$, $r(t_f)$, $v(t_f)$, $L(t_f)$, $l(t_f)$ sont fixées, et par ailleurs $l(0)$ est libre ou fixée, et $\chi(0)$, $\gamma(t_f)$, $\chi(t_f)$ sont libres.

Numériquement on observe le phénomène suivant. Si $\Omega = 0$, alors pour tout contrôle $\mu(t)$, la trajectoire associée partant de $(r(0), v(0), \gamma(0))$ viole la contrainte sur le flux thermique en un temps t_f tel que $r(t_f) \leq r_T + 40000$.

Par conséquent, la force de Coriolis ne peut pas être négligée au début de la trajectoire. Elle est en fait utilisée pour permettre à la navette de joindre un arc frontière iso-flux. Cela peut se comprendre en analysant l'équation

$$\dot{\gamma} = \left(-\frac{g}{v} + \frac{v}{r}\right) \cos \gamma + k' \rho v \cos \mu + F_c + F_e,$$

où

$$F_c = 2\Omega \cos L \sin \chi$$

est la composante de Coriolis, et

$$F_e = \Omega^2 \frac{r}{v} \cos L (\cos \gamma \cos L + \sin \gamma \sin L \cos \chi)$$

est la composante centripète. Au début de la phase de rentrée atmosphérique, la force de portance est très peu intense, et F_c compense le terme gravitationnel $-g/v$. En particulier, au début de la trajectoire il faut que $F_c + F_e > 0$. Concrètement, la force de Coriolis aide la navette à se redresser de manière à respecter la contrainte sur le flux thermique. Par ailleurs il est facile de voir que F_c est maximale lorsque $L = 0$ et $\chi = \pi/2$. Ceci est confirmé par les simulations numériques, qui montrent que les trajectoires respectant la contrainte sur le flux thermique doivent être telles que $\chi(0)$ est proche de $\pi/2$ (notons par ailleurs que la donnée $L(0) = 0$ est imposée).

2. *Une extrémale particulière.* Sans avoir à négliger Ω , on observe que les trajectoires telles que $\chi(0) = \pm\pi/2$ et $L(0) = 0$, associées à un contrôle tel que $\sin \mu = 0$, vérifient $\chi(t) = \pm\pi/2$ et $L(t) = 0$ pour tout t . En fait on peut montrer que ces trajectoires sont des projections d'extrémales pour le problème (auxiliaire) de maximiser la longitude finale (voir [12]).

Ces deux remarques préliminaires montrent que, au début de la phase atmosphérique, on peut considérer avec une bonne approximation que la trajectoire se projette sur la trajectoire optimale du système simplifié en dimension

trois, étudié à la section précédente. On est donc amené à choisir le contrôle $\mu = \pi$, puis $\mu = 0$, l'instant de commutation étant un paramètre permettant de régler l'entrée dans l'arc iso-flux.

Seconde partie de la trajectoire

En fait la rotation de la Terre n'est non-négligeable qu'au début de la trajectoire, mais à partir du moment où on a rejoint la phase iso-flux on constate numériquement que les forces de Coriolis et centripète sont négligeables par rapport aux forces de frottement et de gravitation. On peut donc désormais supposer que $\Omega = 0$. L'avantage est que le sous-système longitudinal étudié précédemment est autonome.

Concernant les contraintes sur l'état, on vérifie numériquement que les deux contraintes sur le flux thermique et sur l'accélération normale sont actives, mais que si on cherche à saturer la contrainte sur la pression dynamique alors le point final désiré n'est plus accessible. Ainsi, les conditions aux limites impliquent que la contrainte sur la pression dynamique n'est pas active au cours du vol.

Par ailleurs, d'après la proposition 79 du Chap. 7 on a le résultat suivant.

Lemme 60. *Considérons le système $\dot{x} = X + uY$, où $x \in \mathbb{R}^3$ et $|u| \leq 1$ décrivant le mouvement longitudinal soumis aux deux contraintes $c_i(x) \leq 0, i = 1, 2$, sur le flux thermique et l'accélération normale. Soit x_0 un point tel que $c_1(x_0) = c_2(x_0) = 0$. Alors, dans un voisinage de x_0 , la politique optimale est de la forme $\gamma_- \gamma_+^T \gamma_{flux} \gamma_+^B \gamma_{acc} \gamma_+^T \gamma_-$, où $\gamma_{flux}, \gamma_{acc}$ sont des arcs frontières, et γ_+^B est le seul arc intermédiaire entre les deux contraintes, tangent aux deux surfaces $c_1 = 0$ et $c_2 = 0$.*

A ce point de l'étude, il faut distinguer deux problèmes, car dans les conditions limites la longitude initiale peut être fixée ou non.

Problème 1 : longitude initiale libre

Dans ce cas, la longitude l n'apparaissant pas dans le second membre du système, on se ramène à un système de dimension 5. Le lemme précédent décrit la politique optimale locale du sous-système cinématique (mouvement longitudinal) pour des conditions aux limites *fixées* sur (r, v, γ) . L'angle final $\gamma(t_f)$ étant libre, on en déduit (condition de transversalité) $p_\gamma(t_f) = 0$, et il faut retirer une commutation dans la politique précédente. Autrement dit, la politique optimale locale est dans ce cas de la forme $\gamma_- \gamma_+^T \gamma_{flux} \gamma_+^B \gamma_{acc} \gamma_+^T$. Ceci est en fait valable pour le système entier puisque d'après la remarque 38, le paramètre $\chi(0)$ (proche de $\pi/2$) permet d'ajuster la valeur finale $L(t_f)$ de la latitude. De plus ce résultat est global, car on vérifie numériquement que cette extrémale ainsi construite est la seule à satisfaire les conditions aux limites désirées.

Problème 2 : longitude initiale fixée

Remarquons tout d'abord que, dans le problème 1, on obtient numériquement $l(t_f) - l(0) \simeq 40$ deg. Pour le problème 2 où la longitude initiale est imposée, cette différence doit être de l'ordre de 50 deg. Par conséquent la stratégie consiste, par rapport au problème précédent, à augmenter la longitude dont l'évolution est décrite par

$$\dot{l} = \frac{v \cos \gamma \sin \chi}{r \cos L},$$

avec L proche de 0. On peut alors vérifier que $l(t)$ est forcément, pour ces conditions aux limites, une fonction strictement croissante (cela est dû au fait que $\chi(t) \in]0, \pi/2[$ au cours du vol). On peut donc reparamétriser le système par la longitude :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dl} &= r \frac{\tan \gamma \cos L}{\sin \chi} \\ \frac{dv}{dl} &= -k\rho r \frac{v \cos L}{\cos \gamma \sin \chi} - \frac{gr \cos L \tan \gamma}{v \sin \chi} \\ \frac{dL}{dl} &= \frac{\cos L}{\tan \chi} \\ \frac{d\chi}{dl} &= \frac{k' \rho r \cos L}{\cos^2 \gamma \sin \chi} \sin \mu + \sin L \end{aligned}$$

On a de plus déjà remarqué que si $\sin \mu = 0$ alors $\tan \chi \tan L dL = d\chi$. Par conséquent on s'est ramené au problème d'atteindre de manière optimale le point $(r(l_f), v(l_f), L(l_f))$, où l_f est fixé. Comme précédemment, $\chi(0)$ permet de régler $L(l_f)$. Un arc final γ_- est donc requis pour atteindre le point terminal.

Par ailleurs numériquement on constate que dans ce cas la contrainte sur l'accélération normale n'est plus active. On en déduit que dans ce cas la politique optimale est donnée, en approximation, par $\gamma_- \gamma_+^T \gamma_{flux} \gamma_+^T \gamma_-$.

Résumons ces résultats dans une proposition.

Proposition 85. *La trajectoire optimale de l'arc atmosphérique satisfaisant les conditions aux limites du tableau 8.1 est, en approximation, de la forme :*

- $\gamma_- \gamma_+ \gamma_{flux} \gamma_+ \gamma_{acc} \gamma_+^T$ pour le problème 1 (longitude initiale libre),
- $\gamma_- \gamma_+ \gamma_{flux} \gamma_+ \gamma_-$ pour le problème 2 (longitude initiale fixée),

où γ_+ (resp. γ_-) est un arc associé au contrôle $\mu = 0$ (resp. $\mu = \pi$), et γ_{flux} (resp. γ_{acc}) est un arc frontière pour la contrainte sur le flux thermique (resp. sur l'accélération normale), voir figures 8.14 et 8.15.

Ce résultat est une approximation qui consiste à écrire $\sin \mu \approx 0$ en dehors des arcs frontières. Or, une simulation numérique du flot extrémal complet

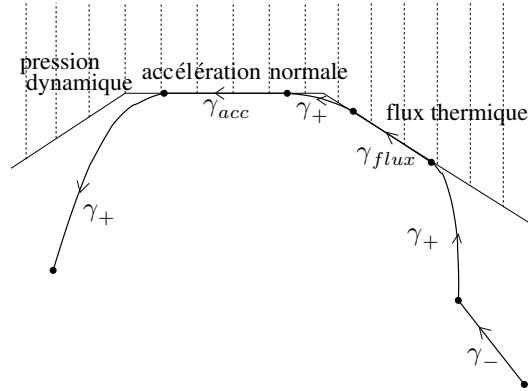


Fig. 8.14. Trajectoire quasi-optimale du problème 1

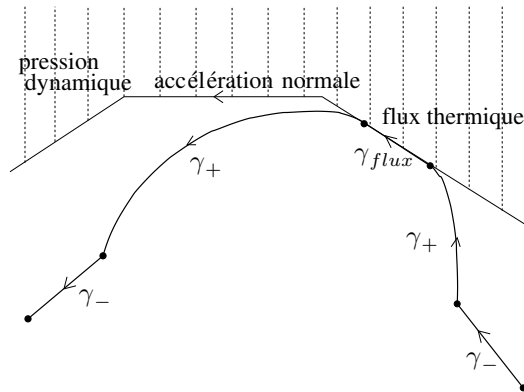


Fig. 8.15. Trajectoire quasi-optimale du problème 2

montre que cette approximation est très bonne, car $|p_x/p_\gamma|$ reste très petit (de l'ordre de 10^{-3}) sauf pendant des temps très courts (lorsque p_γ s'annule).

L'expression des contrôles frontières est calculée, comme dans la section précédente, à l'aide de Maple (pour le détail des calculs, voir [12]). Les simulations numériques sont effectuées dans le chapitre suivant, à l'aide d'une méthode de *tir multiple*.

8.4 Notes et sources

Pour le modèle, voir [24]. Les résultats de nos recherches sont présentés dans [14, 11, 12].