

# LS

L A M B A C H E R S C H W E I Z E R

## *Gesamtband 11/12*

Mathematisches Unterrichtswerk  
für das Gymnasium  
Ausgabe Sachsen

erarbeitet von  
Detlef Lind, Wuppertal  
Jens Negwer, Grimma  
Peter Neumann, Markkleeberg

beraten von  
Horst Ocholt, Radeburg

Ernst Klett Verlag  
Stuttgart · Leipzig

---

**Der Band wurde in Teilen auf der Grundlage vorhandener Klett-Bücher erstellt. An diesen waren beteiligt:**

Manfred Baum  
Martin Bellstedt  
Gerhard Bitsch  
Dieter Brandt  
Gerhard Brüstle  
Heidi Buck  
Jürgen Denker  
Günther Dopfer  
Rolf Dürr  
Alfred Franz  
Hans Freudigmann  
Edmund Herd  
Michael Mertins

Rolf Reimer  
Günther Reinelt  
Wolfgang Riemer  
Hartmut Schermuly  
Siegfried Schwehr  
Manfred Schwiehr  
Maximilian Selinka  
Jörg Stark  
Günther Taetz  
Ingo Weidig  
Peter Zimmermann  
Manfred Zinser



1. Auflage

1 5 4 3 2 1 | 2012 2011 2010 2009 2008

Alle Drucke dieser Auflage können im Unterricht nebeneinander benutzt werden, sie sind untereinander unverändert. Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr dieses Druckes.

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 52 a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Internets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Fotomechanische oder andere Wiedergabeverfahren nur mit Genehmigung des Verlags.

© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2008.

Alle Rechte vorbehalten.

Internetadresse: [www.klett.de](http://www.klett.de)

Redaktion: Andreas Marte, Eva Göhner

Zeichnungen: U. Bartl, Weil der Stadt; H. Günthner, Stuttgart; R. Hungreder, Leinfelden.

Bildkonzept Umschlag: SoldanKommunikation, Stuttgart.

Titelbilder: Wasserstrudel: Getty Images (amana images/Takeshi Daigo), München;

Wendeltreppe: Getty Images (Image Bank/Joao Paulo), München.

Softwareentwicklung: Medienwerkstatt, Schorndorf.

Qualitätssicherung der Service-CD: Media-Supervision, Eppelheim/Heidelberg

DTP-Satz: SMP Oehler, Remseck.

Druck: J. P. Himmer, Augsburg. Printed in Germany.

Presswerk: Optimal Mediaproduktion GmbH, Röbel/Müritz.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-12-733140-0

## **I Einführung in die Differenzialrechnung**

- 1 Zur Wiederholung 8
- 2 Grenzwerte von Funktionen 10
- 3 Stetigkeit einer Funktion 15
- 4 Differenzenquotient 18
- 5 Differenzialquotient 20
- 6 Die Ableitungsfunktion 24
- 7 Die Ableitung der Potenzfunktion 27
- 8 Weitere Ableitungsregeln – höhere Ableitungen 29
- 9 Die Ableitung von Exponential- und Logarithmusfunktion 35
- 10 Die Ableitung der Sinusfunktion 38
- 11 Ableitungen mit dem CAS 40
- 12 Vermischte Aufgaben 42
- Rückblick 44
- Aufgaben zum Üben und Wiederholen ohne Hilfsmittel 46
- Aufgaben zum Üben und Wiederholen mit Hilfsmitteln 47

## **II Anwendungen der Differenzialrechnung**

- 1 Zusammensetzen von Funktionen; ganzrationale Funktionen 48
- 2 Gerade und ungerade Funktionen; Symmetrie 51
- 3 Nullstellen ganzrationaler Funktionen 53
- 4 Monotonie 57
- 5 Extremstellen, Extremwerte 60
- 6 Lokale Extrempunkte 62
- 7 Wendepunkte 67
- 8 Kurvenuntersuchungen ganzrationaler Funktionen 71
- 9 Ganzrationale Funktionen mit realem Bezug 74
- 10 Gebrochenrationale Funktionen und ihre Eigenschaften 76
- 11 Funktionsuntersuchungen gebrochenrationaler Funktionen 79
- 12 Extremwertprobleme 81
- 13 Bestimmung ganzrationaler Funktionen 87
- 14 Ganzrationale Funktionen in Sachzusammenhängen 90
- 15 Kurvenuntersuchungen nichtrationaler Funktionen 93
- 16 Regressionsmodelle 96
- 17 Vermischte Aufgaben 100
- Rückblick 102
- Aufgaben zum Üben und Wiederholen ohne Hilfsmittel 104
- Aufgaben zum Üben und Wiederholen mit Hilfsmitteln 105

## **III Vektoren, Geraden und Ebenen**

- 1 Der Begriff des Vektors in der Geometrie 106
- 2 Verknüpfungen von Vektoren 108
- 3 Punkte im Koordinatensystem 112
- 4 Vektoren im Koordinatensystem 115
- \*5 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren 119
- 6 Gleichungen von Geraden 123
- 7 Lagebeziehungen von Geraden 126
- 8 Ebenengleichungen in Parameterform 130
- 9 Koordinatengleichungen von Ebenen 134

- 10 Lagebeziehungen zwischen Ebene und Gerade 138
- \*11 Lagebeziehungen zwischen Ebenen 141
- 12 Vermischte Aufgaben 144
- Rückblick 148
- Aufgaben zum Üben und Wiederholen ohne Hilfsmittel 150
- Aufgaben zum Üben und Wiederholen mit Hilfsmitteln 151

#### **IV Binomialverteilte und normalverteilte Zufallsgrößen**

- 1 Zufallsexperimente und Ereignisse – eine Wiederholung 152
- 2 Wahrscheinlichkeiten 154
- 3 Mehrstufige Zufallsexperimente – Pfadregeln 158
- 4 Urnenmodelle – Abzählverfahren 160
- 5 Simulation von Zufallsexperimenten 164
- \*6 Bedingte Wahrscheinlichkeiten 168
- \*7 Regel von BAYES 171
- 8 BERNOULLI-Ketten, Binomialverteilungen 174
- 9 Der Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße 179
- 10 Varianz und Standardabweichung – Sigmaregeln 181
- \*11 Die Näherungsformel von DE MOIVRE-LAPLACE 184
- \*12 Normalverteilungen 188
- 13 Vermischte Aufgaben 192
- Rückblick 194
- Aufgaben zum Üben und Wiederholen ohne Hilfsmittel 196
- Aufgaben zum Üben und Wiederholen mit Hilfsmitteln 197

#### **V Integralrechnung**

- 1 Stammfunktionen - das unbestimmte Integral 198
- 2 Integration mittels linearer Substitution 202
- 3 Beispiele für Flächeninhalte unter einer Kurve 204
- 4 Bestimmung von Flächeninhalten 207
- 5 Bestimmtes Integral 211
- 6 Integralfunktionen 213
- 7 Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung 215
- 8 Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse 218
- 9 Flächen zwischen zwei Graphen 221
- \*10 Rauminhalte von Rotationskörpern 225
- \*11 Bogenlänge einer Kurve 230
- 12 Vermischte Aufgaben 232
- Rückblick 236
- Aufgaben zum Üben und Wiederholen ohne Hilfsmittel 238
- Aufgaben zum Üben und Wiederholen mit Hilfsmitteln 239

#### **VI Beurteilende Statistik**

- 1 Das Grundproblem der beurteilenden Statistik 240
- 2 Hypothesen testen – Alternativtests 242
- \*3 Hypothesen testen – Signifikanztests 246
- \*4 Fehlerwahrscheinlichkeiten bei Signifikanztests 252
- 5 Vermischte Aufgaben 255
- Rückblick 256
- Aufgaben zum Üben und Wiederholen 257

**VII Abstände und Winkel**

- 1 Skalarprodukt von Vektoren, Größe von Winkeln 258
- 2 Vektorprodukt 262
- 3 Normalenform der Ebenengleichung 265
- 4 Schnittwinkel 268
- 5 Abstand eines Punktes von einer Ebene – \*HESSE'sche Normalenform 273
- \*6 Abstand eines Punktes von einer Geraden 277
- \*7 Abstand windschiefer Geraden 279
- 8 Vermischte Aufgaben 281
- Rückblick 283
- Aufgaben zum Üben und Wiederholen ohne Hilfsmittel 284
- Aufgaben zum Üben und Wiederholen mit Hilfsmitteln 285

**VIII Weitere Anwendungen**

- 1 Extremale Entfernungen und Winkel 286
- 2 Spiegelung eines Punktes an einer Ebene 290
- 3 Inhalte begrenzter und unbegrenzter Flächen 293
- 4 Arbeiten mit Parametern in Analysis und Geometrie 299
- 5 Vermischte Aufgaben 305
- Rückblick 307
- Aufgaben zum Üben und Wiederholen ohne Hilfsmittel 308
- Aufgaben zum Üben und Wiederholen mit Hilfsmitteln 309

**W11 Numerische Verfahren zum Lösen von Gleichungen**

- 1 Lösen von Gleichungen mit grafischen Methoden 310
- 2 Die Bisektionsmethode 312
- 3 Das NEWTON-Verfahren 314
- 4 Das allgemeine Iterationsverfahren 316
- 5 Vermischte Aufgaben 318
- Rückblick 319

**W12 Differenzialgleichungen**

- 1 Begriff der Differenzialgleichung 320
- 2 Die Differenzialgleichung des exponentiellen Wachstums 321
- 3 Die Differenzialgleichung des beschränkten Wachstums 324
- \*4 Die Differenzialgleichung des logistischen Wachstums 327
- 5 Die Differenzialgleichung der gleichmäßig beschleunigten Bewegung 330
- \*6 Die Differenzialgleichung der harmonischen Schwingung 331
- \*7 Die grafische Interpretation der Lösung einer Differenzialgleichung mittels Richtungsfeld 334
- 8 Vermischte Aufgaben 337
- Rückblick 338
- Tabelle der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung 339
- Wesentliche Operatoren bei Nutzung des grafikfähigen Taschenrechners 340
- Lösungen der Aufgaben zum Üben und Wiederholen 341
- Register 353
- Informationen zur Service-CD 355
- Bildquellen 364

Mit Sternchen gekennzeichnete Lerneinheiten sind nur für den Leistungskurs relevant.

# Zum Aufbau des Buches

---

Jedes Kapitel umfasst

- mehrere Lerneinheiten,
- Kapitelrückblick,
- Aufgaben zum Üben und Wiederholen ohne Hilfsmittel,
- Aufgaben zum Üben und Wiederholen mit Hilfsmitteln.

Zu jedem Kapitel befinden sich auf der CD

- Exkursionen und Referatsthemen,
- weitere Aufgaben für den Einsatz des Computer Algebra Systems (CAS).

- Zu Beginn jeder Lerneinheit stehen **hinführende Aufgaben**. Sie bereiten den Gedankengang der Lerneinheit vor. Sie sollen die Schülerinnen und Schüler zum Nachdenken anregen. Da sie als Angebot gedacht sind, nehmen sie keine Information zum jeweiligen Lerninhalt vorweg und bieten somit den Unterrichtenden die methodische Freiheit.

Der anschließende **Informationstext** (Lehrtext) beschreibt den mathematischen Inhalt der Lerneinheit. Vielfach werden auch ergänzende Informationen gegeben.

Im Kasten wird das wesentliche **Ergebnis** (z. B. in Form einer Definition oder eines Satzes) festgehalten.

In den anschließenden vollständig bearbeiteten **Beispielen** werden Begriffsbildungen erläutert und wichtige mathematische Verfahren bzw. grundlegende Aufgabentypen der Lerneinheit vorgestellt. Diese Beispiele bieten den Schülerinnen und Schülern besondere Hilfen für das selbstständige Lösen von Aufgaben. Wo es sinnvoll erscheint, werden Aufgaben mit CAS vorgerechnet.

Der **Aufgabenteil** bietet ein reichhaltiges Auswahlangebot. Die Aufgaben reichen von Routineaufgaben zum Einüben von Fertigkeiten und Darstellungsweisen über zahlreiche Aufgaben im mittleren Schwierigkeitsbereich bis zu schwierigen Aufgaben, die besondere Leistungen verlangen. Zahlreiche Aufgaben zu Sachsituationen helfen, Beziehungen zwischen der Mathematik und ihren Anwendungen aufzuzeigen. Insbesondere bei diesen Aufgaben ist es oft hilfreich, das CAS oder den grafikfähigen Taschenrechner (GTR) zu verwenden.

Wo es aufgrund der besseren Übersicht oder im Sinne eines schnelleren Zugriffs sinnvoll erscheint, werden die Aufgaben durch Zwischenüberschriften gegliedert.

Aufgaben mit roter Aufgabenziffer sollten ohne CAS oder GTR bearbeitet werden.

- In den Aufgaben zum **Üben und Wiederholen ohne Hilfsmittel** finden Sie Aufgaben, die ohne Hilfsmittel wie CAS und GTR gelöst werden können. Die Lösungen dieser Aufgaben stehen am Ende des Buches.
- In den Aufgaben zum **Üben und Wiederholen mit Hilfsmitteln** finden Sie Aufgaben, die mit dem CAS oder GTR gelöst werden sollen. Die Lösungen dieser Aufgaben stehen am Ende des Buches.

## Zur Konzeption des Buches

---

Der vorliegende Band des Lehrwerks Lambacher-Schweizer umfasst den Stoff der Analysis, der analytischen Geometrie und der Stochastik für die Klassen 11 und 12. Er deckt sowohl die Inhalte für Grundkurse als auch für Leistungskurse ab. Inhalte auf Leistungskursniveau werden durch einen Balken am Rand gekennzeichnet. Lerneinheiten, die ausschließlich für Leistungskurse relevant sind, sind im Inhaltsverzeichnis mit einem Stern gekennzeichnet.

Die Abfolge der Inhalte im vorliegenden Band entspricht der Reihenfolge der Lernbereiche im gültigen Lehrplan. Von den im Lehrplan vorgesehenen alternativen Wahlpflichtthemen wird für jede Jahrgangsstufe je eines nach den verpflichtenden Lernbereichen behandelt.

Der sächsische Lehrplan sieht den Einsatz von Taschenrechnern mit Grafikdisplay (GTR) und von Computer-Algebra-Systemen (CAS) vor. GTR und CAS werden an geeigneten Stellen als Hilfsmittel eingesetzt. Der Einsatz von CAS wird in vielen Beispielen ausführlich erläutert. Die Verwendung von CAS ist aber nicht zwingend, alle wesentlichen Inhalte können auch ohne Verwendung von CAS erarbeitet werden. Aufgaben mit roter Aufgabennummer sollen ausdrücklich ohne GTR und CAS gelöst werden. Wenn an einer Stelle für eine Berechnung zwingend CAS vorausgesetzt wird, wird dies mit einem Symbol gekennzeichnet.

CAS

Im Zuge der in Sachsen geforderten effektiven Nutzung grafikfähiger Taschenrechner wurden die Aufgaben unter Verwendung bestimmter Signalwörter (angeben, berechnen, ermitteln, begründen, ...) zusammengestellt. Die daraus resultierenden Anforderungen an die Schülertätigkeit sind auf Seite 340 aus dem Arbeitspapier „Verwendung von ausgewählten Operatoren im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht bei Verfügbarkeit des grafikfähigen Taschenrechners (GTR)“ des sächsischen Staatsministeriums für Kultus vom Januar 2002 verkürzt für die Analysis zusammengestellt.

Die derzeit angebotenen GTR- und CAS-Taschenrechner verschiedener Hersteller bzw. verschiedener Modelle einer Produktreihe unterscheiden sich in der Funktionalität und der Bedienung nicht wesentlich, aber dennoch so weit, dass eine einheitliche Funktionsbeschreibung nicht möglich und im Sinne zukünftiger Entwicklungen auch nicht sinnvoll erscheint. Die CAS-Beispiele im Buch wurden mit dem Voyage 200 bearbeitet und können nur exemplarisch sein. Für den ClassPad sind dieselben Beispiele im Netz unter [www.klett.de](http://www.klett.de) erhältlich.

Die Inhalte der beigelegten CD ermöglichen es, den Unterrichtslehrgang in verschiedene Richtungen zu vertiefen und zu erweitern.

Für einen Unterricht, der auf einen stärkeren Einsatz des CAS aufbaut, finden sich auf der CD zu zahlreichen Lerneinheiten weitere Aufgaben für eine sinnvolle Verwendung des CAS. An den entsprechenden Stellen im Buch wird durch das CD-Symbol auf die Materialien verwiesen.



Zu einigen Themen finden sich Exkursionen und Referate. Die Exkursionen gewähren einen Blick über den „Tellerrand des Kapitels“ und können somit zur Binnendifferenzierung oder Auflockerung des Unterrichts genutzt werden. Mit der Ausarbeitung eines Referats können die Schülerinnen und Schüler den Nachweis erbringen, dass sie eine Themenstellung selbstständig erfassen, aufarbeiten und ihre Ergebnisse in einem Vortrag vor der Klasse präsentieren können.

Zur Schulung des räumlichen Anschauungsvermögens und des geometrischen Verständnisses bietet die CD dreidimensionale Materialien zur Geometrie. Interaktive Module motivieren besonders und verstärken so den Lerneffekt.