
Inhaltsverzeichnis

Grundlagen

1	Logik und Mengen	1
1.1	Elementare Logik	1
1.2	Elementare Mengenlehre	10
1.3	Schaltalgebra	15
1.3.1	Anwendung: Entwurf von Schaltkreisen	21
1.4	Mit dem digitalen Rechenmeister	23
1.5	Kontrollfragen	24
1.6	Übungen	28
2	Zahlenmengen und Zahlensysteme	33
2.1	Die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$	33
2.2	Summen und Produkte	44
2.3	Vollständige Induktion	46
2.4	Stellenwertsysteme	48
2.5	Maschinenzahlen	51
2.6	Teilbarkeit und Primzahlen	55
2.7	Mit dem digitalen Rechenmeister	58
2.8	Kontrollfragen	61
2.9	Übungen	65

Diskrete Mathematik

3	Elementare Begriffe der Zahlentheorie	73
3.1	Das kleine Einmaleins auf endlichen Mengen	73
3.1.1	Anwendung: Hashfunktionen	76
3.2	Gruppen, Ringe und Körper	79
3.2.1	Anwendung: Welche Fehler erkennen Prüfciffern?	89
3.3	Der Euklid'sche Algorithmus und diophantische Gleichungen	92
3.3.1	Anwendung: Der RSA-Verschlüsselungsalgorithmus	97
3.4	Der Chinesische Restsatz	102

3.4.1	Anwendung: Rechnen mit großen Zahlen	103
3.4.2	Anwendung: Verteilte Geheimnisse	105
3.5	Mit dem digitalen Rechenmeister	106
3.6	Kontrollfragen	109
3.7	Übungen	111
4	Polynomringe und endliche Körper	115
4.1	Der Polynomring $\mathbb{K}[x]$	115
4.2	Der Restklassenring $\mathbb{K}[x]_{m(x)}$	121
4.2.1	Anwendung: Zyklische Codes	126
4.3	Endliche Körper	127
4.3.1	Anwendung: Der Advanced Encryption Standard	130
4.3.2	Anwendung: Reed-Solomon-Codes	130
4.4	Mit dem digitalen Rechenmeister	131
4.5	Kontrollfragen	133
4.6	Übungen	136
5	Relationen und Funktionen	139
5.1	Relationen	139
5.1.1	Anwendung: Relationales Datenmodell	148
5.2	Funktionen	151
5.3	Kontrollfragen	164
5.4	Übungen	168
6	Folgen und Reihen	173
6.1	Folgen	173
6.1.1	Anwendung: Wurzelziehen à la Heron	183
6.2	Reihen	184
6.3	Mit dem digitalen Rechenmeister	190
6.4	Kontrollfragen	192
6.5	Übungen	195
7	Kombinatorik	199
7.1	Grundlegende Abzählverfahren	199
7.2	Permutationen und Kombinationen	203
7.3	Mit dem digitalen Rechenmeister	210
7.4	Kontrollfragen	210
7.5	Übungen	211
8	Rekursionen und Wachstum von Algorithmen	217
8.1	Grundbegriffe	217
8.1.1	Ausblick: Iterationsverfahren und Chaos	221
8.2	Lineare Rekursionen	224
8.2.1	Anwendung: Sparkassenformel	233
8.3	Wachstum von Algorithmen	234
8.4	Mit dem digitalen Rechenmeister	241
8.5	Kontrollfragen	243
8.6	Übungen	246

Lineare Algebra

9	Vektorräume	249
9.1	Vektoren	249
9.2	Lineare Unabhängigkeit und Basis	257
9.3	Teilräume	262
9.4	Mit dem digitalen Rechenmeister	267
9.5	Kontrollfragen	268
9.6	Übungen	270
10	Matrizen und Lineare Abbildungen	275
10.1	Matrizen	275
10.2	Multiplikation von Matrizen	280
10.3	Lineare Abbildungen	287
10.3.1	Anwendung: Lineare Codes	295
10.4	Mit dem digitalen Rechenmeister	298
10.5	Kontrollfragen	300
10.6	Übungen	303
11	Lineare Gleichungen	309
11.1	Der Gauß-Algorithmus	309
11.1.1	Anwendung: Elektrische Netzwerke	317
11.1.2	Anwendung: Input-Output-Analyse nach Leontjef	319
11.2	Rang, Kern, Bild	320
11.3	Determinante	325
11.4	Mit dem digitalen Rechenmeister	330
11.5	Kontrollfragen	331
11.6	Übungen	333
12	Lineare Optimierung	337
12.1	Lineare Ungleichungen	337
12.2	Lineare Optimierung	340
12.3	Der Simplex-Algorithmus	341
12.4	Mit dem digitalen Rechenmeister	347
12.5	Kontrollfragen	349
12.6	Übungen	350
13	Skalarprodukt und Orthogonalität	355
13.1	Skalarprodukt und orthogonale Projektion	355
13.1.1	Anwendung: Matched-Filter	365
13.1.2	Anwendung: Lineare Klassifikation	366
13.1.3	Anwendung: Ray-Tracing	366
13.2	Orthogonalentwicklungen	368
13.3	Orthogonale Transformationen	374
13.3.1	Anwendung: QR-Zerlegung	378
13.4	Mit dem digitalen Rechenmeister	379
13.5	Kontrollfragen	380

13.6	Übungen	382
14	Eigenwerte und Eigenvektoren	385
14.1	Koordinatentransformationen	385
14.2	Eigenwerte und Eigenvektoren	388
14.2.1	Anwendung: Bewertung von Webseiten mit <i>PageRank</i>	397
14.3	Eigenwerte symmetrischer Matrizen	400
14.3.1	Anwendung: Die diskrete Kosinustransformation	403
14.4	Mit dem digitalen Rechenmeister	406
14.5	Kontrollfragen	406
14.6	Übungen	408

Graphentheorie

15	Grundlagen der Graphentheorie	411
15.1	Grundbegriffe	411
15.2	Darstellung von Graphen am Computer	417
15.3	Wege und Kreise	419
15.4	Mit dem digitalen Rechenmeister	427
15.5	Kontrollfragen	428
15.6	Übungen	431
16	Bäume und kürzeste Wege	437
16.1	Bäume	437
16.2	Das Problem des Handlungsreisenden	443
16.2.1	Ausblick: Die Komplexitätsklassen P und NP	445
16.3	Minimale aufspannende Bäume	445
16.4	Kürzeste Wege	448
16.4.1	Anwendung: Routing im Internet	451
16.5	Mit dem digitalen Rechenmeister	452
16.6	Kontrollfragen	453
16.7	Übungen	457
17	Flüsse in Netzwerken und Matchings	463
17.1	Netzwerke	463
17.2	Matchings	471
17.3	Mit dem digitalen Rechenmeister	477
17.4	Kontrollfragen	479
17.5	Übungen	481

Anhang

A	Einführung in Mathematica	487
A.1	Erste Schritte	487
A.2	Funktionen	489
A.3	Gleichungen	491
A.4	Programme	492
B	Lösungen zu den weiterführenden Aufgaben	495
B.1	Logik und Mengen	495
B.2	Zahlenmengen und Zahlensysteme	495
B.3	Elementare Begriffe der Zahlentheorie	496
B.4	Polynomringe und endliche Körper	496
B.5	Relationen und Funktionen	496
B.6	Folgen und Reihen	497
B.7	Kombinatorik	497
B.8	Rekursionen und Wachstum von Algorithmen	497
B.9	Vektorräume	498
B.10	Matrizen und Lineare Abbildungen	498
B.11	Lineare Gleichungen	498
B.12	Lineare Optimierung	499
B.13	Skalarprodukt und Orthogonalität	499
B.14	Eigenwerte und Eigenvektoren	499
B.15	Grundlagen der Graphentheorie	500
B.16	Bäume und kürzeste Wege	500
B.17	Flüsse in Netzwerken und Matchings	501
	Literatur	503
	Verzeichnis der Symbole	505
	Index	507