Vorwort

> Als mein Enkel Florian fünftehalb[1] Jahre alt war, überraschte er mich eines Tages mit der Bemerkung: „Opa, man kann nicht mit Null anfangen zu zählen“. Und führte dies vor, indem er zählte: „Null, eins, zwei, drei, vier“, wobei er mit dem Daumen der linken Hand anfangend, eben den Daumen, den Zeigefinger, den Mittelfinger, den Ringfinger und zum Schluss den kleinen Finger ausstreckte. Und seine Begründung, weshalb man nicht mit Null anfangen könne zu zählen, lautete: „Denn dann zählst du die Eins mit dem falschen Finger, die Zwei mit dem falschen Finger, die Drei mit dem falschen Finger.“
>
> Kinder haben es viel leichter als Philosophen.

Der Hunger nach Historie war groß in den neunziger Jahren des letzten Jahrhunderts. Ich war ihm schon mit Vorlesungen über Fibonaccis *liber abbaci* begegnet und versuchte nun, auch in meinen eigentlichen mathematischen Vorlesungen die Geschichte meiner Vorlesungsthemen mit zu behandeln. Der Stil war durch die Vorlesungen über Fibonaccis Buch vorgegeben: Mathematik wird an Hand der alten Texte entwickelt, was im vorliegenden Buche häufig genug heißt, dass erst der heutige Stand dargestellt wird, bevor die Alten zu Wort kommen. Ging und geht es doch vor allem darum, dem heutigen Hörer und Leser klar zu machen, worum es eigentlich ging bei dem, was dann zu unserer Mathematik wurde. Heutige Mathematik hat ja viel subtilere Möglichkeiten ihrer Darstellung als die Mathematik in früheren Zeiten, was zu einem leichteren Verständnis gerade auch des Alten beiträgt. Von der Entwicklung dieser Möglichkeiten wird zu berichten sein.

Meine erste Idee war die, an Hand der Körpertheorie einen Längsschnitt durch die Geschichte der Algebra zu geben. Bei meinen Studien für diese Vorlesungen wurde aber immer klarer, dass die Frage nach der Lösbarkeit von algebraischen Gleichungen insbesondere auch eine Frage nach dem Zahlbegriff ist. Ich habe die erste Idee also modifiziert und dem Zahlbegriff und seiner Geschichte breiten Raum eingeräumt. Die Körpertheorie von Galois bis Steinitz und Artin bekommt auf diese Weise ihren angemessenen Rahmen.

Es begann mit der Entdeckung des Irrationalen durch die Pythagoreer im 5. Jahrhundert vor Christus, was sich bei Euklid als Proposition X 115a niederschlug: Man zeige, dass im Quadrat die Seite zur Diagonalen linear inkommensurabel ist. Diese Proposition ist der Aufhänger für dieses Buch. Um dann aber die griechische Antwort auf die Entdeckung des Irrationalen zu verstehen und um den Schatz zu heben, der sich in Buch V der Elemente Euklids verbirgt, ist es nötig, erst von den Grundlagen der reellen Zahlen zu reden, so wie sie von Dedekind und anderen im neunzehnten Jahrhundert gelegt wurden. Erst dadurch wird uns Heutigen die

[1] Der Leser, der seinen Wissensdurst sofort stillen möchte, findet die Erklärung dieses Wortes schnell mit Hilfe des Indexes.

Schönheit und Tragweite dieses Buches offenbar. Die Proportionenlehre leistete fast dasselbe, was heute die reellen Zahlen leisten.

Das fünfte Buch Euklids gibt also mit der eudoxischen Proportionenlehre Antwort auf die Probleme, die die Entdeckung des Irrationalen aufgeworfen hatte. Es zeigt, dass die Griechen den Zahlbegriff nicht erweiterten. Sie blieben vielmehr bei Zahl als der natürlichen Zahl.

Die Araber, das Mittelalter, die Renaissance, das Barock gingen mit dem Zahlbegriff völlig naiv um. Insbesondere identifizierten sie Zahlen mit Strecken, ohne dies zu rechtfertigen. Erst im 19. Jahrhundert gab es eine uns befriedigende Antwort auf die Frage, was Zahlen für den Mathematiker sind. Dies wird ein Thema sein, das uns begleitet.

Ein anderes Thema wird die Entdeckung der Lösungsformel für kubische und biquadratische Gleichungen sein. Hier wird Cardano immer wieder als der Eidesbrecher dargestellt, dabei steht in diesem Streit Aussage gegen Aussage, wobei Cardano selbst sich nicht in den Streit zwischen Tartaglia und Ferrari einmischt und ihn in seiner Autobiografie nur ganz beiläufig erwähnt: „..., mit dem ich mich damals herumzankte.“ (Kap. 4, Absch. 5). Bei der Korrespondenz zwischen Cardano und Tartaglia ist bemerkenswert, wie schnell Briefe zwischen Venedig und Mailand in damaliger Zeit hin und her gingen, so dass ich dem vierten Kapitel einen Abschnitt über das Briefwesen zu dieser Zeit hinzugefügt habe.

Henri Lebesque sagt wenig Schmeichelhaftes über Gaußens siebtes Kapitel der *Disquisitiones* und auch über Gauß selbst. Er ist der Ansicht, ohne dies als Plagiat zu werten — was er betont —, dass Gauß seine Ideen aus einer Arbeit Vandermondes habe. Er hat für seine Behauptung allerdings nur Indizien: Die Ähnlichkeit der Strukturen beider Arbeiten, die er sorgfältig analysiert, und eine Notiz von Gaußens Hand in dessen Nachlass, die es nahe legt, dass er die einschlägige Arbeit Vandermondes gesehen hat. Auch darüber wird hier berichtet.

In diesem siebten Kapitel der gaußschen *Disquisitiones* bzw. in der Arbeit Vandermondes geht es um die Kreisteilungspolynome. Sie seien mittels Radikale auflösbar, behaupten beide. Vandermonde liefert eine Beweisskizze, die dem Leser noch viel zu tun lässt. Gauß füllt die Lücken und bemerkte darüber hinaus, dass man auch das Siebzehneck mit Zirkel und Lineal konstruieren kann. Dies war Vandermonde entgangen.

Das war die Situation, bevor Abel zeigte, dass die allgemeine Gleichung n-ten Grades, das ist die Gleichung n-ten Grades mit Unbestimmten als Koeffizienten, nicht durch Radikale lösbar ist, wenn nur $n \geq 5$ ist.

Das eigentliche Problem, ob nämlich Polynome mit rationalen Koeffizienten stets durch Radikale lösbar sind, löste erst Galois. Sie sind es nicht. Sein Kriterium für die Auflösbarkeit von Gleichungen werde ich ausführlich darstellen. Mir erscheint sein Beweis viel klarer als alles, was sich in heutigen Lehrbüchern zu diesem Thema findet, mein eigenes Buch „Gruppen, Ringe, Körper“ eingeschlossen. Ein Leckerbissen bei Galois ist, dass er seine Galoisfelder als Indexmengen benutzt!

Die historische Betrachtung des Gegenstandes, so wie ich sie hier versuche, liefert gleichzeitig eine sorgfältige Analyse dessen, was man zu den einzelnen Beweisen an Voraussetzungen benötigt. Häufig finden sich ja Sätze, bei deren Beweis Voraussetzungen benutzt werden, die nicht explizit formuliert sind. Man sah eben Dinge noch nicht so scharf, wie wir das heute tun, und unterstellte Dinge als selbstverständlich, die es nicht sind. Die Analyse historischer Texte hilft also auch, unser heutiges Verständnis unserer Wissenschaft zu vertiefen. Es ist merkwürdigerweise das Unbeholfene und Rudimentäre, das uns klarer blicken lässt.

Auf der anderen Seite gibt es Sätze, die sich gleichen und deren Beweisstrukturen identisch sind. So gibt es Sätze der Zahlentheorie, die mit abstrakt gruppentheoretischen Argumenten bewiesen werden, ebenso Sätze über Permutationsgruppen oder von Gruppen, die in der Geometrie auftauchen. So erhält man einen Fundus an impliziter Gruppentheorie, wie Hans Wußing dies trefflich nennt. Dies werden wir beobachten und sehen, wie dann die heutige Theorie entstand.

Warum interessiert man sich für die Untergruppen einer Gruppe? Weil man sich immer für die Unterstrukturen der Strukturen interessiert, die man betrachtet. So sieht der Student das heute und so bekommt er es von uns beigebracht. Der ursprüngliche Grund war aber ein anderer. Darauf gibt dieses Buch auch eine Antwort wie auch auf die Frage nach der Bedeutung des Wortes „dritthalb“ im Titel und „fünftehalb“ im Motto des Buches

Obwohl Zahlen und Größen in diesem Buch eine große Rolle spielen, werde ich philosophischen Fragen in diesem Zusammenhang nicht nachgehen. Mir geht es vor allem darum zu zeigen, wie Zahlen in der Alltagsmathematik gehandhabt wurden. Hier sind die Zeugnisse von Neper und Regiomontanus sehr beeindruckend: die Sinustafel von diesem und die Logarithmentafel von jenem. Bei ihren Berechnungen steht unausgesprochen im Hintergrund, was Dedekind und andere später axiomatisch fassten, dass eine reelle Zahl nichts anderes ist, als die Summe ihrer Approximationen. Bei der Sinustafel des Regiomontanus ist auch bemerkenswert, wie einfach ihr Gerüst zu berechnen ist. Dieses Gerüst besteht aus den Sinuswerten der Winkel, die Vielfache von $45'$ sind. Diese lassen sich allein mit Hilfe des Satzes von Pythagoras und einem Algorithmus für die Berechnung der Quadratwurzel aus einer reellen Zahl berechnen. Das ist selbst Schülern zugänglich.

Belassen wir es bei diesen Andeutungen zum Inhalt. Ausführlicher informiert das Inhaltsverzeichnis und der rote Faden im Anschluss an dieses Vorwort.

Die Frage nach der Lösbarkeit von algebraischen Gleichungen führte auf die Frage nach dem Zahlbegriff. Dieser umfasst heute die reellen und die komplexen Zahlen und alle ihre Teilkörper. Das sind die Körper, die Dedekind ursprünglich im Sinn hatte. Mit ihnen ist man bei Fragen der Mengenlehre und der Topologie gelandet. Heinrich Weber abstrahierte dann endgültig den Körperbegriff, was wiederum zur Mengenlehre führte. Die henselschen p-adischen Zahlen sind abstrakt definierte Körper, die eine Topologie tragen. Die Topologie spielt also auch hier ihre Rolle.

Unser Thema führt uns also auch in Nachbargebiete der Algebra. Es ist daher eine Sisyphusarbeit, jeder auftauchenden Frage nach Geschichte in all ihren Verzweigungen nachzugehen, insbesondere dann, wenn man die Originalarbeiten sprechen lassen will. Der Leser möge mir daher verzeihen, dass die Information an Geschichte in diesem Buch unterschiedlich dicht ist. Am meisten empfinde ich diese Lücke bei der Eliminationstheorie. Hier hatte ich das Problem, an die Literatur des 18. Jahrhunderts heranzukommen, die in der Bibliothek einer jungen Universität nicht vorhanden ist. In der Sekundärliteratur fand ich auch keine Hilfe bei diesem Thema. Hier scheint noch einiges zu tun zu sein.

Sporadisch sind auch die biografischen Notizen. Es gibt aber eine Liste mit den Namen fast aller vorkommenden Autoren mit ihren Lebensdaten. Diese Daten stammen meist aus dem „Lexikon bedeutender Mathematiker", das im Literaturverzeichnis aufgelistet ist (Gottwald *et al.* 1990).

Vierzehn Jahre habe ich an diesem Buch gearbeitet. Es hatte folglich das gleiche Schicksal wie Heinrich Webers „Lehrbuch der Algebra", eine Rechtschreibreform zu erleben. Bei Weber passierte das zwischen dem Erscheinen der ersten beiden Bände der zweiten Auflage und dem dritten Band, so dass diese Bände unterschiedlicher Orthografie folgen. Ich wollte ursprünglich die ersten Kapitel dieses Buches so stehen lassen, wie sie waren, um das zu dokumentieren. Da aber immer wieder Änderungen anzubringen waren, die insbesondere beim ersten Kapitel sehr umfangreich waren, habe ich den ganzen Text der neuen Rechtschreibung angepasst. Dabei ist mir das Missgeschick passiert, dass auch die Zitate aus der thaerschen Übersetzung der Elemente der neuen Orthografie angepasst wurden. Der Leser möge es mir nachsehen.

Dieses Buch kann sehr vielen Zwecken dienen. Dem Leser wird sicher manches einfallen. Ich sehe es insbesondere auch als „Anleitung zum Genuss" der Originale. Der Leser sollte selbst immer wieder einmal die ursprünglichen Texte zur Hand nehmen. Es gibt so vieles zu entdecken, Dinge, die beim Tradieren verloren gegangen sind und die es wert sind, ins Gedächtnis zurückgerufen zu werden.

Danken möchte ich den Angestellten unserer Bibliothek, die mir über die Fernleihe so manchen Text besorgten. Die weiteste Reise unternahm eine Vorlesungsausarbeitung von Emil Artin aus dem Jahre 1938, die in Europa nicht nachzuweisen war. Sie kam aus New York.

Danken möchte ich Frau Petra Meyer (Walldorf) und den Herren Peter Schreiber (Stralsund), Theo Grundhöfer und Hans-Joachim Vollrath (beide Würzburg). Frau Meyer hat als wissenschaftliche Mitarbeiterin die Anfänge dieses Buches hier in Kaiserslautern miterlebt und immer wieder gemahnt, den roten Faden nicht zu verlieren, so dass ich am Ende einen solchen schrieb, dem Leser zu Nutze. Die Herren Grundhöfer und Schreiber haben während all der Jahre die Arbeit verfolgt und mir mit Rat und Tat zur Seite gestanden. Am intensivsten habe ich das Buch mit Herrn Vollrath diskutiert. Als Frucht dieser Diskussionen hat sich die Lesbarkeit des Buches an so mancher Stelle wesentlich erhöht.

Für einzelne Hinweise habe ich auch anderen zu danken. Das ist an den jeweiligen Stellen im Buche geschehen.

Das Buch geht nun hinaus in die Welt. Möge der Leser beim Lesen so viel Freude empfinden wie ich bei seinem Schreiben.

Kaiserslautern, im Januar 2008 *Heinz Lüneburg*