

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Anwendungen der Analysis</b> .....	1
1.1 Folgen und Reihen .....	2
1.2 Funktionen .....	9
1.3 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit .....	18
1.4 Differentialrechnung .....	23
1.5 Integralrechnung .....	37
<b>2. Folgen und Reihen</b> .....	43
2.1 Definition und Darstellung von Folgen .....	43
2.1.1 Definition einer Folge .....	43
2.1.2 Bildungsgesetz .....	45
2.1.3 Summen-, Differenz-, Produkt- und Quotientenfolge .....	49
2.2 Definition einer Reihe .....	50
2.3 Arithmetische Folgen und Reihen .....	52
2.3.1 Arithmetische Folgen .....	52
2.3.2 Arithmetische Reihen .....	54
2.4 Geometrische Folgen und Reihen .....	56
2.4.1 Geometrische Folgen .....	56
2.4.2 Geometrische Reihen .....	61
2.5 Monotonie und beschränkte Folgen .....	63
2.5.1 Monotone Folgen .....	64
2.5.2 Beschränkte Folgen .....	67

2.6 Konvergenz bei Folgen . . . . .	70
2.6.1 Beispiel für eine Nullfolge . . . . .	70
2.6.2 $\varepsilon$ -Umgebung von $a \in \mathbb{R}$ . . . . .	72
2.6.3 Nullfolgen . . . . .	74
2.6.4 Folgen mit von Null verschiedenen Grenzwerten .	77
2.6.5 Eindeutigkeit des Grenzwertes, Divergenz . . . . .	79
2.6.6 Konvergenz monotoner und beschränkter Folgen.	81
2.6.7 Berechnung von Grenzwerten . . . . .	82
2.7 Konvergenz bei Reihen . . . . .	85
<b>3. Funktionen . . . . .</b>	<b>89</b>
3.1 Der Begriff der Funktion . . . . .	89
3.1.1 Grundlegende Begriffe . . . . .	89
3.1.2 Darstellung von Funktionen . . . . .	92
3.1.3 Abschnittsweise definierte Funktionen . . . . .	98
3.1.4 Monotonie und Beschränktheit . . . . .	100
3.1.5 Umkehrfunktionen . . . . .	105
3.1.6 Verknüpfung von Funktionen . . . . .	111
3.2 Polynome und rationale Funktionen . . . . .	114
3.2.1 Darstellung und Grad eines Polynoms . . . . .	115
3.2.2 Nullstellen, Zerlegung in Linearfaktoren . . . . .	119
3.2.3 Rationale Funktionen . . . . .	126
3.3 Winkelfunktionen . . . . .	129
3.3.1 Herleitung von Sinus- und Kosinusfunktion für Winkelmaße . . . . .	130
3.3.2 Winkel im Bogenmaß . . . . .	136
3.3.3 Sinus und Kosinus als reelle Funktionen . . . . .	139
3.4 Exponential- und Logarithmusfunktion . . . . .	145
3.4.1 Wachstums- und Zerfallsvorgänge . . . . .	145
3.4.2 Allgemeine Exponentialfunktion . . . . .	146
3.4.3 Die Logarithmusfunktion . . . . .	147

<b>4. Grenzwerte von Funktionen</b> .....	153
4.1 Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow \infty$ .....	153
4.1.1 Einführende Beispiele .....	153
4.1.2 Definition des Grenzwertes einer Funktion für $x \rightarrow \infty$ .....	155
4.1.3 Rechnen mit Grenzwerten .....	160
4.1.4 Divergenz einer Funktion für $x \rightarrow \infty$ .....	163
4.2 Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow x_0$ .....	165
4.2.1 Definition des Grenzwertes einer Funktion für $x \rightarrow x_0$ .....	165
4.2.2 Rechnen mit Grenzwerten .....	171
4.2.3 Divergenz einer Funktion für $x \rightarrow x_0$ .....	174
4.3 Stetigkeit .....	176
4.3.1 Definition der Stetigkeit .....	177
4.3.2 Unstetigkeitsstellen und Definitionslücken .....	180
4.3.3 Globale Stetigkeit .....	182
4.3.4 Verknüpfung stetiger Funktionen .....	185
4.3.5 Einige Eigenschaften stetiger Funktionen .....	188
<b>5. Differentialrechnung</b> .....	195
5.1 Die Steigung von Funktionen .....	195
5.2 Differenzierbarkeit .....	202
5.2.1 Definition der Differenzierbarkeit .....	202
5.2.2 Beispiele für differenzierbare Funktionen .....	203
5.2.3 Differenzierbarkeit und Stetigkeit .....	205
5.2.4 Die Ableitungsfunktion .....	208
5.2.5 Höhere Ableitungen .....	209
5.3 Berechnung von Ableitungen .....	212
5.3.1 Differentiationsregeln .....	212
5.3.2 Ableitung spezieller Funktionen .....	220
5.4 Anwendung der Differentialrechnung .....	222

## XVIII Inhaltsverzeichnis

5.4.1	Monotonie und Extremwerte . . . . .	222
5.4.2	Krümmungsverhalten einer Funktion . . . . .	236
5.4.3	Systematische Kurvendiskussion . . . . .	242
5.4.4	Extrema von Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen . . . . .	248
5.4.5	Angewandte Extremwert-Aufgaben . . . . .	249
<b>6.</b>	<b>Integralrechnung . . . . .</b>	<b>253</b>
6.1	Die Aufgaben der Integralrechnung . . . . .	253
6.2	Das unbestimmte Integral . . . . .	254
6.3	Das Flächeninhaltsproblem und das bestimmte Integral	261
6.4	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . .	274
6.5	Berechnung und Interpretation von bestimmten Integralen . . . . .	278
<b>A.</b>	<b>Zahlen und Terme . . . . .</b>	<b>289</b>
A.1	Zahlen und Terme . . . . .	289
A.1.1	Ganze Zahlen . . . . .	289
A.1.2	Terme . . . . .	292
A.1.3	Rationale Ausdrücke . . . . .	296
A.2	Lineare Gleichungen und Ungleichungen . . . . .	299
A.2.1	Lineare Gleichungen . . . . .	299
A.2.2	Umformen linearer Gleichungen . . . . .	300
A.2.3	Anordnung rationaler Zahlen . . . . .	305
A.2.4	Umformen linearer Ungleichungen . . . . .	308
A.3	Potenzen und Wurzeln . . . . .	310
A.3.1	Potenzen mit ganzzahligem Exponenten . . . . .	310
A.3.2	Wurzeln und reelle Zahlen . . . . .	312
A.3.3	Potenzen mit rationalen Exponenten . . . . .	315
A.4	Nichtlineare Gleichungen . . . . .	317
A.4.1	Quadratische Gleichungen . . . . .	317

A.4.2	Andere einfache nichtlineare Gleichungen . . . . .	319
A.5	Logarithmen . . . . .	322
A.5.1	Begriff des Logarithmus . . . . .	322
A.5.2	Rechenregeln für Logarithmen . . . . .	324
<b>B.</b>	<b>Aussagenlogik, Mengen und Zahlenbereiche . . . . .</b>	<b>327</b>
B.1	Aussagenlogik . . . . .	327
B.1.1	Aussagen und Wahrheitswerte . . . . .	327
B.1.2	Aussageform . . . . .	329
B.1.3	Konjunktion und Disjunktion . . . . .	333
B.1.4	Negation . . . . .	336
B.1.5	Implikation und Äquivalenz . . . . .	341
B.2	Mengen . . . . .	344
B.2.1	Mengen und ihre Schreibweise . . . . .	345
B.2.2	Mengendiagramme . . . . .	349
B.2.3	Gleichheit von Mengen . . . . .	350
B.2.4	Teilmengen . . . . .	351
B.2.5	Leere Menge . . . . .	354
B.2.6	Schnittmenge und Vereinigungsmenge . . . . .	355
B.2.7	Differenz von Mengen . . . . .	359
B.2.8	Mengen geordneter Paare, Koordinatensystem . .	361
B.3	Zahlenmengen . . . . .	365
B.3.1	Die natürlichen Zahlen . . . . .	365
B.3.2	Die ganzen Zahlen . . . . .	366
B.3.3	Die rationalen Zahlen . . . . .	367
B.3.4	Die reellen Zahlen . . . . .	368
B.3.5	Die komplexen Zahlen . . . . .	369
<b>C.</b>	<b>Lösungen . . . . .</b>	<b>373</b>
C.1	Lösungen zu Kapitel 2 bis 6 . . . . .	373
C.2	Lösungen zu Anhang A und B . . . . .	421

XX	Inhaltsverzeichnis
<b>Stichwortverzeichnis</b>	431
<b>Literaturverzeichnis</b>	437