

Studien zu Finanzen, Geld und Kapital

Band 16

Der stochastische Diskontfaktor

**Eine neuartige Spezifikation
im Rahmen eines konsumbasierten Modells
zur Preisbildung von Kapitalanlagen**

Von

Bernd Brückmann



Duncker & Humblot · Berlin

BERND BRÜCKMANN

Der stochastische Diskontfaktor

Studien zu Finanzen, Geld und Kapital

Band 16

Der stochastische Diskontfaktor

Eine neuartige Spezifikation
im Rahmen eines konsumbasierten Modells
zur Preisbildung von Kapitalanlagen

Von

Bernd Brückmann



Duncker & Humblot · Berlin

Die Wirtschafts- und Verhaltenswissenschaftliche Fakultät
der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg hat diese Arbeit
im Jahre 2007 als Dissertation angenommen.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in
der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten
sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Alle Rechte vorbehalten
© 2008 Duncker & Humblot GmbH, Berlin
Fotoprint: Berliner Buchdruckerei Union GmbH, Berlin
Printed in Germany

ISSN 0939-5113
ISBN 978-3-428-12548-7

Gedruckt auf alterungsbeständigem (säurefreiem) Papier
entsprechend ISO 9706 ☺

Internet: <http://www.duncker-humblot.de>

Vorwort

Im Januar 2007 wurde die vorliegende Arbeit als Dissertation an der Wirtschafts- und Verhaltenswissenschaftlichen Fakultät der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg angenommen.

Die Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter bei Herrn Professor Dr. Wolfgang Patzig am Fachbereich Wirtschaft der Hochschule Magdeburg-Stendal (FH) sowie während meiner Tätigkeit als externer Lehrbeauftragter am Fachbereich Wirtschaft der Hochschule Magdeburg-Stendal (FH), an der Akademie Deutscher Genossenschaften (ADG) in Montabaur sowie am Fachbereich Gesundheitswesen der Fachhochschule Braunschweig/Wolfenbüttel.

Auf meinem Weg zur Promotion begleiteten mich Personen, bei denen ich mich an dieser Stelle ganz herzlich bedanken möchte.

Mein Dank geht an meinen Doktorvater Herrn Professor Dr. Siegfried Hauser. Seinem Glauben an mich habe ich es zu verdanken, dass ich das Abenteuer Promotion in die Tat umsetzen konnte. In Erinnerung wird mir die freundschaftliche Atmosphäre am Institut für Empirische Wirtschaftsforschung und Ökonometrie der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg bleiben.

Gleichfalls geht mein Dank an Herrn Professor Dr. Wolfgang Patzig, der mir die Tür zum Abenteuer Promotion öffnete. Er begeisterte mich als Student in seinen volkswirtschaftlichen Vorlesungen und weckte hierdurch mein Interesse zur wissenschaftlichen Arbeit. Während meiner Zeit als Promovend werden mir die gemeinsam gehaltenen Lehrveranstaltungen sowie die vielen Diskussionen über Themen, die nicht selten über das Forschungsgebiet der Finanz- und Volkswirtschaft hinausgingen, angenehm in Erinnerung bleiben.

Ich danke sehr der Hans und Eugenia Jütting Stiftung in Stendal, da ohne deren Stipendien der Abschluss meiner Promotion in weite Ferne gerückt wäre.

Mein ganz besonderer Dank gilt meinen Eltern, die mir während der gesamten Zeit der Promotion Rückhalt gaben.

Denise – danke, dass du immer an mich geglaubt hast.

Bismark, im März 2007

Bernd Brückmann

Inhaltsverzeichnis

A. Einleitung	15
B. Stochastischer Diskontfaktor	19
I. Preisbildung von Anlagen	19
1. Preisgleichung	19
2. Renditegleichung	23
3. Anlagen mit mehrmaligen Auszahlungen	25
4. Vollständiger Kapitalmarkt	27
5. Elementaranlage.....	28
6. Zustandsbedingter Diskontfaktor	30
II. Möglichkeiten zur Spezifikation des stochastischen Diskontfaktors	32
1. Grenzwert intertemporalen Vermögens	32
2. Finanzwirtschaftliche Modelle	34
3. Makroökonomische Modelle.....	36
4. Empirische Befunde zum konsumbasierten Standardmodell	38
5. Modifikationen des konsumbasierten Standardmodells auf Basis von Untrennbarkeiten im intertemporalen Nutzen	41
6. Empirische Relevanz des Zinses und der Risikoprämie	47
C. Das neuartige konsumbasierte Modell zur Preisbildung von Kapitalanlagen	50
I. Neuartigkeit.....	50
II. Annahmen	52
1. Tauschwirtschaft	52
2. Ausstattung	53
3. Konsumplan	54
III. Präferenzen und Restriktionen.....	56
1. Präferenzen im neuartigen konsumbasierten Modell.....	56
2. Restriktionen im neuartigen konsumbasierten Modell	58
IV. Optimierung.....	59
1. Intratemporale Optimierung	59

2.	Ausgangspunkt der intertemporalen Optimierung.....	65
3.	Analyse der konstanten Zeitpräferenzrate	66
4.	Analyse der intertemporalen Optimierung	69
V.	Die neuartige Spezifikation des stochastischen Diskontfaktors	73
VI.	Gleichgewichtsanalyse	78
1.	Gleichgewicht	78
2.	Repräsentatives Wirtschaftssubjekt.....	80
3.	Gleichgewichtiger Zins	83
4.	Gleichgewichtige Risikoprämie	87
D.	Empirische Datenanalyse	90
I.	Auswahl empirischer Repräsentanten und Methoden zur Renditeberechnung	90
II.	Empirische Repräsentanten der theoretischen Renditegrößen	92
1.	Stichprobe realer Jahresrenditen	92
2.	Mittlere Jahresrenditen.....	98
3.	Mittlere Jahresüberschussrenditen	100
4.	Mittlerer realer Zins	106
III.	Empirische Repräsentanten der theoretischen Konsumgrößen	109
1.	Die beiden theoretischen Konsumgrößen.....	109
2.	Konstruktion der beiden empirischen Repräsentanten	109
3.	Jahreswachstumsraten absoluter und relativer Pro-Kopf-Konsumausgaben	112
E.	Schätzung der stochastischen Euler-Gleichung sowie Prognose des Zinses und der Risikoprämie	117
I.	Vorgehensweise.....	117
II.	Die Verallgemeinerte Momentenmethode	117
1.	Allgemeines	117
2.	Verfahrensweise der GMM.....	118
III.	Schätzung	120
1.	Formulierung der Orthogonalbedingungen	120
2.	Optimale Gewichtungsmatrix	124
3.	Teststatistik	126
4.	Rechnergestützter Lösungsprozess.....	129
5.	Ergebnisse der GMM-Schätzung	130
IV.	Prognose	134

1. Grundlagen zur Logarithmierung der stochastischen Euler-Gleichung	134
2. Logarithmischer Zins und logarithmische Risikoprämie im neuartigen konsumbasierten Modell	135
3. Logarithmischer Zins und logarithmische Risikoprämie im konsumbasierten Standardmodell.....	139
4. Langfristiger logarithmischer Zins und langfristige logarithmische Risikoprämie	141
F. Ansatzpunkte zur Verringerung der Diskrepanz zwischen Theorie und Empirie.....	145
I. Modellbezogene Ansatzpunkte.....	145
II. Ansatzpunkte in der Empirie	149
G. Zusammenfassung.....	151
Literaturverzeichnis.....	154
Personen- und Sachregister	161

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1:	Empirische Mittelwerte und Standardabweichungen der realen Jahresrenditen von 1971 bis 2005.....	99
Tabelle 2:	Empirische Mittelwerte und Standardabweichungen der Jahresüberschussrenditen von CDax und Dax von 1971 bis 2005.....	101
Tabelle 3:	Test auf Gleichheit der Stichprobenvarianzen	102
Tabelle 4:	Geschätzte Parameter der Normalverteilungsfunktion der jährlichen Risikoprämie des CDax	103
Tabelle 5:	Geschätzte Parameter der Normalverteilungsfunktion des realen Zinses.....	107
Tabelle 6:	Zuordnung der verwendungszweckbezogenen Konsumausgaben.....	110
Tabelle 7:	Empirische Mittelwerte und Standardabweichungen der Jahreswachstumsraten der realen Pro-Kopf-Konsumausgaben für das einmalig und mehrmalig Nutzen stiftende Gut	112
Tabelle 8:	Empirische Mittelwerte und Standardabweichungen der Jahreswachstumsraten der absoluten und relativen Pro-Kopf-Konsumausgaben für das einmalig Nutzen stiftende Gut	113
Tabelle 9:	Empirische Kovarianzen von CDax und Dax mit den absoluten und relativen Pro-Kopf-Konsumausgaben.....	115
Tabelle 10:	Schätzergebnisse von CDax und Festzinsanlage	130
Tabelle 11:	Schätzergebnisse von CDax und Anleihen	131
Tabelle 12:	Schätzergebnisse von Dax und Festzinsanlage	133
Tabelle 13:	Schätzergebnisse von Dax und Anleihen.....	134
Tabelle 14:	Prognosen des langfristigen logarithmischen Zinses und der langfristigen logarithmischen Risikoprämie	142

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1:	Intratemporale Indifferenzkurvenverläufe	61
Abbildung 2:	Optimaler intratemporaler Konsumplan	63
Abbildung 3:	Zeitdiskontfaktorenverläufe.....	68
Abbildung 4:	Gleichgewichtiger realer Zins.....	84
Abbildung 5:	Gleichgewichtiger realer Zins infolge einer Verringerung der intertemporalen Substitutionselastizität.....	86
Abbildung 6:	Gleichgewichtiger realer Zins infolge einer Erhöhung der intratemporalen Substitutionselastizität.....	87
Abbildung 7:	Empirische Korrelationskoeffizienten des CDax und Dax	94
Abbildung 8:	Reale Jahresrenditen des CDax von 1971 bis 2005	95
Abbildung 9:	Reale Jahresrenditen des Dax von 1971 bis 2005.....	95
Abbildung 10:	Empirische Korrelationskoeffizienten der Festzinsanlage zum Dreimonatszins und der Anleihen der öffentlichen Hand.....	96
Abbildung 11:	Reale Jahresrenditen der Festzinsanlage zum Dreimonatszins von 1971 bis 2005	97
Abbildung 12:	Reale Jahresrenditen der Anleihen der öffentlichen Hand von 1971 bis 2005	97
Abbildung 13:	Reale Jahresrenditen der Junistichprobe von 1971 bis 2005.....	98
Abbildung 14:	Mittlere Jahresüberschussrendite des CDax für die einzelnen Monatsstichproben von 1971 bis 2005	100
Abbildung 15:	Verlauf der geschätzten Normalverteilung der jährlichen Risikoprämie des CDax	105
Abbildung 16:	Mittlere reale Jahresrendite der Festzinsanlage für die einzelnen Monatsstichproben von 1971 bis 2005	106
Abbildung 17:	Verlauf der geschätzten Normalverteilung des realen Zinses	107
Abbildung 18:	Jahreswachstumsraten der realen Pro-Kopf-Konsumausgaben für das einmalig und mehrmalig Nutzen stiftende Gut	111

Abbildung 19:	Jahreswachstumsraten der absoluten und relativen Pro-Kopf-Konsumausgaben für das einmalig Nutzen stiftende Gut	113
Abbildung 20:	Verläufe des logarithmischen Zinses	144

Abkürzungsverzeichnis

Indizes

a	Wertmäßiger Anteil riskanter Anlagen im Anlageportfolio
f	Index für risikolos
I	Anzahl von Wirtschaftssubjekten
i	Wirtschaftssubjekt, $1, \dots, I$
J	Anzahl von Anlagen
j	Anlage, $1, \dots, J$
S	Anzahl von Umweltzuständen
s	Umweltzustand, $1, \dots, S$
T	Anzahl der Zeitpunkte aller Perioden
$t-1$	Zeitpunkt einer t (unmittelbar) vorausgehenden Periode
t	Zeitpunkt einer gegenwärtigen Periode
$t+1$	Zeitpunkt einer t (unmittelbar) nachfolgenden Periode

Parameter

α	Gewicht des einmalig Nutzen stiftenden Gutes im Güterbündel
γ	Relative Risikoaversion
δ	Zeitdiskontfaktor
ε	Intratemporale Substitutionselastizität
π	Wahrscheinlichkeit für den Eintritt eines Umweltzustandes
ρ	Zeitpräferenzrate
σ	Intertemporale Substitutionselastizität

Variablen

B	Konsum des einperiodig Nutzen stiftenden Güterbündels
C	Konsum des einmalig Nutzen stiftenden Gutes
G	Konsum des mehrmalig Nutzen stiftenden Gutes
M	Stochastischer Diskontfaktor
M_s	Zustandsbedingter Diskontfaktor
PV	Barwert

p_f	Preis einer risikolosen Anlage
p	Preis einer (riskanten) Anlage
q_s	Zustandspreis einer Elementaranlage
R_f	Risikoloser Zins (risikolose Rendite)
R	Riskante Rendite
W	Vermögen
\mathbf{X}	Auszahlungsmatrix aller Anlagen
X	Auszahlung einer Anlage
Y	Einkommen
Funktionen	
$e(\cdot)$	Stichprobenfehler
$f(\cdot)$	Intratemporaler Nutzen
$u(\cdot)$	Intertemporaler Nutzen
$v(\cdot)$	Intertemporaler Wert (indirekter intertemporaler Nutzen)
$E(\cdot)$	Erwartungswert einer Zufallsvariable
$Var(\cdot)$	Varianz einer Zufallsvariable
$Cov(\cdot, \cdot)$	Kovarianz zweier Zufallsvariablen
$Std(\cdot)$	Standardabweichung einer Zufallsvariable

A. Einleitung

Die theoretischen Größen risikoloser Zins¹ und Risikoprämie² begegnen einem sowohl in der Betriebswirtschaftslehre als auch in der Volkswirtschaftslehre und unterstreichen damit ihre allgemeine Bedeutung innerhalb der Wirtschaftswissenschaft.

Empirische Beobachtungen des Dreimonatszinses, der Umlaufrenditen von Anleihen der öffentlichen Hand oder der zeitlichen Kursverläufe deutscher Aktienindizes fordern die Forschung in beiden nationalen Lehrgebäuden zu einer Erklärung heraus.³ Dies mündet in einer gemeinsamen Suche nach einer Theorie zur Preisbildung von Anlagen auf Kapitalmärkten, also in einer Suche nach einer Kapitalmarkttheorie.

Im Kern liegt einer jeden Anlagebewertung durch Wirtschaftssubjekte, welche auf dem Barwertansatz basiert, ein stochastischer Diskontfaktor zugrunde. Dass die wirkliche Herausforderung in einer Erklärung des stochastischen Diskontfaktors besteht, ist ein Ergebnis der Arbeiten von Robert J. Shiller (1981)⁴ sowie von Stephan F. LeRoy und Richard D. Porter (1981)⁵, in denen sie zeigen, dass die Preisindizes US-amerikanischer Aktien weitaus stärker schwanken als es ihre zukünftigen Dividendenzahlungen, unter rationalen Erwartungen, vermuten lassen, was sich, so ihre Schlussfolgerung, nur mit einem stark

¹ Der risikolose Zins verkörpert die Rendite einer risikolosen Anlage und wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit als Zins bezeichnet. Auch wird der risikolose Zinsfaktor in dieser Arbeit als Zinsfaktor bezeichnet.

² Die Risikoprämie misst die Differenz zwischen der erwarteten Rendite einer riskanten Anlage und dem risikolosen Zins und verkörpert somit die erwartete Überschussrendite einer riskanten Anlage.

³ Bereits an dieser Stelle ist darauf hinzuweisen, dass mit dieser Arbeit keine Erklärung verwirklichter Renditen auf individueller Ebene bezweckt wird, da diese maßgeblich von der Einkommensteuer eines Wirtschaftssubjektes abhängen und auf einem Markt nicht beobachtbar sind. Im Zentrum stehen hingegen beobachtbare Renditen von Anlagen auf dem deutschen Kapitalmarkt, wodurch steuerliche Anreize, die zweifelsohne Anlageentscheidungen beeinflussen können, ausgeblendet bleiben.

⁴ Shiller, Robert J.: Do Stock Prices Move Too Much to be Justified by Subsequent Changes in Dividends. In: *The American Economic Review*, 71 (1981), 3, 421-436.

⁵ LeRoy, Stephen F. / Porter, Richard D.: The Present Value Relation: Test Based on Implied Variance Bounds. In: *Econometrica*, 49 (1981), 555-574.

schwankenden stochastischen Diskontfaktor erklären lässt. Dies war der Startschuss der Forschung zur Erklärung des stochastischen Diskontfaktors.

Mittlerweile lässt sich sowohl für ein monetär geprägtes finanzwirtschaftliches Modell als auch für ein realseitig geprägtes makroökonomisches Modell zur Preisbildung von Kapitalanlagen⁶ zeigen, dass beide Modelle im Innersten ein gemeinsames Ziel verfolgen – die Suche nach einem Ansatz zur Erklärung des stochastischen Diskontfaktors. Mit der Akzeptanz dieser Zielkongruenz ist die kategorische Trennung von monetärer und realer Seite aufzuheben.

Unter der Vielzahl realwirtschaftlicher Modelle zur Erklärung des stochastischen Diskontfaktors dominiert das konsumbasierte Modell zur Preisbildung von Anlagen (Consumption-Based Capital Asset Pricing Model (C-CAPM))⁷, das in einer neuartig modifizierten Fassung das zentrale Analyseobjekt in dieser Arbeit ist. Die Motivation hierzu rührt aus den als nicht zufrieden stellend erachteten empirischen Befunden über das konsumbasierte Standardmodell, ausgehend von der Arbeit von Rajnish Mehra und Edward C. Prescott (1985)⁸, sowie über ausgewählte richtungweisende Abwandlungen dieses Modells. Das konsumbasierte Standardmodell erfährt in der vorliegenden Arbeit eine neuartige Modifizierung. Durch diese Modifikation geht eine neuartige Spezifikation des stochastischen Diskontfaktors hervor, wonach dieser nicht mehr einzig von dem originären absoluten Konsum sondern zudem von einem relativen Konsum determiniert wird. Die Erklärungskraft spezifizierter stochastischer Diskontfaktoren wird in dieser Arbeit unter Verwendung der stochastischen Euler-Gleichung eines repräsentativen Wirtschaftssubjektes überprüft. Hierfür sind vorab die Parameter zu schätzen. Zur Schätzung kam in jüngerer Vergangenheit überwiegend die Verallgemeinerte Momentenmethode (Generalized Method of Moments (GMM)) zur Anwendung. Deren theoretische Grundlage wurde von Lars Peter Hansen (1982)⁹ entwickelt und erstmals von Lars Peter Hansen und Kenneth J. Singleton (1982) zur Schätzung von Parametern einer nicht linearen stochastischen Euler-Gleichung angewendet.¹⁰

⁶ Die Anlagen auf Kapitalmärkten – Kapitalanlagen – werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit als Anlagen bezeichnet.

⁷ Das konsumbasierte Modell zur Preisbildung von Anlagen wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit als konsumbasiertes Standardmodell bezeichnet.

⁸ Mehra, Rajnish / Prescott, Edward C.: The Equity Premium: A Puzzle. In: Journal of Monetary Economics, 15 (1985), 145-161.

⁹ Hansen, Lars Peter: Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators. In: Econometrica, 50 (1982), 4, 1029-1054.

¹⁰ Hansen, Lars Peter / Singleton, Kenneth J.: Generalized Instrument Variables Estimation of Nonlinear Rational Expectations Models. In: Econometrica, 50 (1982), 5, 1269-1286.

Der Verfasser verfolgt mit dieser Arbeit die folgenden Ziele: Er möchte zeigen, dass die Suche nach einer Spezifikation des stochastischen Diskontfaktors als notwendige Folge seiner Unbestimmtheit im Rahmen der Preisbildung von Anlagen sowie der Bewertung von Anlagen durch Wirtschaftssubjekte angesehen werden sollte.

Er möchte eine neuartige Spezifikation des stochastischen Diskontfaktors auf Basis eines konsumbasierten Modells vorstellen, wofür nicht zufrieden stellende empirische Befunde des konsumbasierten Standardmodells sowie ausgewählte richtungsweisende Modifikationen dieses Modells den Anlass gaben.

Er möchte in der empirischen Überprüfung die Erklärungskraft der neuartigen Spezifikation des stochastischen Diskontfaktors, unter Verwendung der stochastischen Euler-Gleichung und verwirklichter Renditen auf dem deutschen Kapitalmarkt, aufzeigen. Darüber hinaus möchte er die erhaltenen Ergebnisse denen des konsumbasierten Standardmodells vergleichend gegenüberstellen, um hierüber eine Möglichkeit zur Urteilsbildung hinsichtlich einer Erklärungsverbesserung anzubieten.

Er möchte eine Ermittlung für den Prognosewert des langfristigen realen Zinses sowie der langfristigen Risikoprämie, unter Verwertung der empirischen Ergebnisse, präsentieren und hiermit die enge Verbundenheit zwischen diesen beiden Renditegrößen und den auf Konsum basierenden Größen verdeutlichen.

Die Vorgehensweise in den einzelnen Kapiteln: Nach dem einleitenden Kapitel wird im zweiten Kapitel der allgemeine stochastische Diskontfaktor theoretisch analysiert. Daran schließt sich die Analyse eines möglichen Weges zur Spezifikation des stochastischen Diskontfaktors an, welche in der Verwendung eines konsumbasierten Modells zur Spezifikation dieses mündet.

Im dritten Kapitel steht das modifizierte konsumbasierte Modell mit der daraus resultierenden neuartigen Spezifikation des stochastischen Diskontfaktors im Zentrum der Betrachtungen. Die theoretische Analyse beinhaltet vorrangig die neuartige Spezifizierung des stochastischen Diskontfaktors sowie neben der, den Wirtschaftssubjekten zugrunde gelegten, Präferenzfunktion auch die Herleitung der stochastischen Euler-Gleichung und die Bedingungen für die Existenz eines repräsentativen Wirtschaftssubjektes.

Im vierten Kapitel erfolgt die empirische Analyse von verwirklichten Jahresrenditen ausgewählter repräsentativer Anlagen auf dem deutschen Kapitalmarkt, welche der Schätzung der stochastischen Euler-Gleichung zugrunde gelegt werden. Zudem werden die Konsumausgaben der privaten Haushalte empirisch analysiert, da diese als Basis für die Konstruktion der Jahresdatenrei-