

Einleitung

Naturwissenschaftlich/technisch – physikalische Anwendungsgebiete verzeichnen eine zunehmende Mathematisierung – insbesondere im Zusammenhang mit der *numerischen Simulation* realer Prozesse, die auch die Tätigkeit des Ingenieurs eigentlich jeder Sparte betrifft. Einige wenige Beispiele sind:

- Freiformflächenmodellierung im Karosserieentwurf,
- Robotersteuerung,
- Flugbahnberechnung in der Raumfahrt,
- Berechnung von Gas- oder Flüssigkeitsströmungen,
- Netzwerkberechnung,
- Halbleiter-Design,
- Berechnung von Schwingungsvorgängen und Resonanz,
- Berechnung elektromagnetischer Felder,
- Prozeßsimulation und -Steuerung verfahrenstechnischer Anlagen,
- Numerische Simulation von Materialverformung,
- Numerische Verfahren für *Inverse Probleme* z. B. im Zusammenhang mit bildgebenden Verfahren bei der Computer-Tomographie, der Materialprüfung mit Hilfe von Ultraschall oder NMR (nuclear magnetic resonance),
...

Das Streben, das Verständnis der „realen Welt“ auf virtuellem Wege zu vertiefen und zu erweitern, ist nicht nur ökonomisch motiviert, sondern resultiert auch aus Möglichkeiten, bisweilen in Bereiche vorstoßen zu können, die etwa experimentell nicht mehr zugänglich sind. Heutzutage gibt es deshalb wohl kaum einen Bereich der Wissenschaft oder des Ingenieurwesens, in dem keine Modellrechnungen betrieben werden. Die *Numerische Mathematik* liefert die Grundlagen zur Entwicklung entsprechender Simulationsmethoden, insbesondere zur Bewertung ihrer Verlässlichkeit und Genauigkeit. Am Ende möchte man möglichst verlässlich wissen, innerhalb welcher Toleranz das Ergebnis einer Rechnung von der Realität abweichen kann.

Die Numerische Mathematik ist somit Teil des Gebietes *Scientific Computing* (Wissenschaftliches Rechnen), einer Disziplin, die relativ jung ist, sich

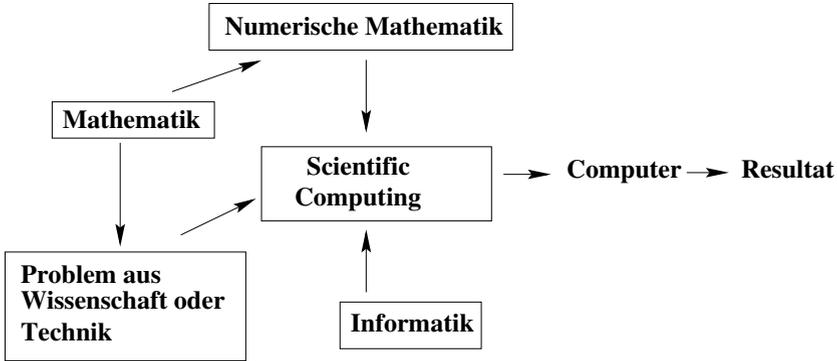


Abb. 1.1. Scientific Computing

sehr dynamisch entwickelt und aus der Schnittstelle der Bereiche Mathematik, Informatik, Natur- und Ingenieurwissenschaften erwächst (vgl. Abb. 1.1).

Beim wissenschaftlichen Rechnen werden die für eine bestimmte Problemstellung relevanten Phänomene mit Hilfe eines mathematischen Modells beschrieben. Das Modell liefert die Grundlage für die Entwicklung von Algorithmen, die dann wiederum die *numerische Simulation* des zu untersuchenden Prozesses gestatten. Die Entwicklung und Analyse solcher Algorithmen ist eine zentrale Thematik der Numerischen Mathematik (oder „numerischen Analysis“ oder „Numerik“). Bei der Durchführung einer numerischen Simulation auf großen Rechenanlagen spielt die Informatik eine wichtige Rolle, z. B. bei der Implementierung (ggf. Parallelisierung) komplexer numerischer Methoden, bei der Verwaltung großer Datenmengen oder bei der Visualisierung.

Einige Orientierungsbeispiele:

Die etwas nähere Betrachtung folgender sehr vereinfachter Beispiele soll die Spanne zwischen konkreter Anwendung und numerischer Simulation andeuten. Die Beispiele erheben nicht den Anspruch, besonders repräsentativ für den Einsatz numerischer Methoden im Ingenieurbereich zu sein. Ihre Auswahl ist vielmehr dadurch bedingt, daß man sie hier ohne große Hintergrundvertiefung anführen kann. Dennoch werden sie es uns erlauben, einige im Verlauf dieses Buches behandelte Kernfragestellungen zu identifizieren und später auch das Zusammenspiel verschiedener Numerikbausteine verdeutlichen zu können.

Beispiel 1.1. Problem: Bestimmung des Abraums bei der Braunkohleförderung im Tagebau.

- 1) Mathematisches Modell: Statt mühsam zu verfolgen, was über die verschiedenen Förderbänder im Laufe der Zeit transportiert wurde, nutzt man aus, daß der bis zu einem gegebenen Zeitpunkt aufgekommene Abraum gerade der Inhalt des bis dahin entstandenen Lochs ist. Es gilt also, das Volumen des Lochs zu bestimmen. Interpretiert man die Berandung dieses Lochs als den Graphen einer Funktion (von zwei Ortsvariablen), läßt sich das Problem auf die *Berechnung eines Volumenintegrals* zurückführen.
- 2) Messung, Experiment: Besagte „Loch-Funktion“ ist natürlich nicht als analytischer Ausdruck oder in irgendeiner Weise explizit gegeben. Denkt man an einzelne Erdklumpen, ist sie sicherlich sehr kompliziert. Das Anliegen, den Abraum nur innerhalb einer sinnvollen Fehlertoleranz ermitteln zu wollen (bzw. zu können), wird es natürlich erlauben, die Funktion etwas zu vereinfachen. In jedem Fall liegt die einzige Möglichkeit, quantitative Information über die zu integrierende Funktion zu erhalten, in geeigneten Messungen. In diesem Fall bieten sich Tiefenmessungen durch Stereofotoaufnahmen vom Flugzeug aus zur Bestimmung der benötigten Problemdata – Funktionswerte – an.
- 3) Konstruktiver numerischer Ansatz: Sind aufgrund solcher Messungen die Werte der Loch-Funktion an genügend vielen „Stützstellen“ (zumindest innerhalb gewisser, schon durch die Bodenbeschaffenheit bedingter Fehlertoleranzen) bekannt, kann man daran gehen, daraus das Integral der (nur an diskreten Stellen gegebenen) Funktion zumindest innerhalb der gewünschten Toleranz näherungsweise zu bestimmen. Nach der üblichen Strategie teilt man das gesamte Integrationsgebiet – die Deckelfläche über dem Loch – in kleinere Parzellen auf und bestimmt auf jeder Parzelle eine *einfache, explizit integrierbare* Funktion, z. B. ein Polynom, die an den Meßstellen dieselben Werte wie die Loch-Funktion hat. Das exakte Integral dieser lokalen Ersatzfunktion nennt man eine *Quadraturformel*. Durch Summation der lokalen Integrale erhält man dann eine Näherung für das Integral der Loch-Funktion und damit für den gegenwärtigen Abraum. Aus der Differenz dieser Werte zu verschiedenen Zeitpunkten erhält man dann auch Aufschluß über die *Förderrate*. Hier sollte der Leser übrigens den Zusammenhang mit Differentiation in Erinnerung rufen.
- 4) Realisierung über Algorithmus: Die einzelnen, bei obiger Vorgehensweise angedeuteten Schritte, nämlich die Aufteilung des Integrationsgebiets in Parzellen, die Ausrechnung der Quadraturformeln, müssen als Sequenz von Anweisungen an den Rechner – als Algorithmus – programmiert werden. △

Die im obigen Beispiel verwendeten numerischen Bausteine sind *Polynom-Interpolation* bzw. darauf aufbauend *Numerische Integration*. Der am Ende

berechnete Wert weicht natürlich vom tatsächlichen Abraum ab. Das skizzierte Vorgehen birgt, wie bereits angedeutet wurde, Fehlerquellen verschiedener Art. Die Verwertung des Ergebnisses setzt somit das Verständnis dieser Fehler, ihrer Auswirkungen und gegebenenfalls ihre Eingrenzbarkeit voraus. Sie sollen deshalb noch einmal kurz beleuchtet werden, da sich daraus zentrale Fragestellungen dieses Buches ergeben.

- zu 1) *Modellfehler*: Zunächst beruht das mathematische Modell meist auf einer Idealisierung unter vereinfachenden Annahmen und führt damit zu Ergebnissen, die die Realität nicht exakt wiedergeben können. In Beispiel 1.1 ist auf kleiner Skala in Anbetracht der Bodenporosität und des Gerölls die Lochberandung nicht wirklich der Graph einer punktweise definierten Funktion. Das verwendete Modell der Loch-Funktion entspricht also bereits einer Mittelung auf einer Makroskala, die unter anderem im Verhältnis zu den Abständen der Meßpunkte zu rechtfertigen ist.
- zu 2) *Datenfehler*: Im mathematischen Modell werden oft Daten eingesetzt (z. B. Parameter), die aus physikalischen Messungen oder empirischen Untersuchungen stammen. Diese Daten sind in der Regel, z. B. durch Meßungenauigkeiten, mit Fehlern behaftet. Im vorliegenden Beispiel 1.1 liegen Meßungenauigkeiten in der Bildauflösung und in der Bodenbeschaffenheit.
- zu 3) *Verfahrensfehler*: Ein numerisches Lösungsverfahren produziert selbst bei exakter Rechnung die Lösung häufig nur *näherungsweise*. Eine Quadraturformel wie in Beispiel 1.1 liefert nicht den exakten Wert des Integrals, sondern nur eine Näherung, deren Genauigkeit vom Typ der Quadraturformel und vom Integranden abhängt. Derartige Fehler nennt man *Diskretisierungsfehler* oder *Verfahrensfehler*.
- zu 4) Bei der Realisierung eines numerischen Verfahrens, d. h. bei der Durchführung einer Sequenz von Rechneroperationen (Algorithmus), treten schließlich *Rundungsfehler* auf.

Bei einer numerischen Simulation gilt es, diese Fehlertypen zu kontrollieren und (möglichst) zu minimieren. Im folgenden Beispiel werden diese Fehlerquellen nochmals angedeutet.

Beispiel 1.2. Problem: Als „technische Aufgabe“ geht es um die Konstruktion eines *Taktmechanismus* zu einer vorgegebenen Taktzeit $T > 0$. Ein möglicher Ansatz ist, dies mit Hilfe eines Pendels zu realisieren. Dann geht es um die Bestimmung der erforderlichen *Anfangsauslenkung* eines Pendels zu einer vorgegebenen Schwingungsdauer T . Mit T ist also die Zeit gemeint, die das Pendel braucht, um in die Ausgangslage zurück zu schwingen.

Wir untersuchen dazu ein um eine feste Achse drehbares Pendel mit der Pendellänge $\ell = 0.6$ m. Als *Modell* nehmen wir das sogenannte mathematische Pendel, wobei folgende Idealisierungen gemacht werden: Die Schwingung verläuft ungedämpft (keine Reibungskräfte), die Aufhängung ist masselos,

und die gesamte Pendelmasse ist in einem Punkt konzentriert. Es ist klar, daß es aufgrund dieser Idealisierungen *Modellfehler* gibt. Mit Hilfe der Newtonschen Gesetze (*Actio gleich Reactio* – Kraft = Masse \times Beschleunigung) kann die Dynamik des mathematischen Pendels durch die nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\phi''(t) = -c \sin(\phi(t)), \quad c := \frac{g}{\ell}, \quad (1.1)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\phi(0) = x, \quad \phi'(0) = 0, \quad (1.2)$$

beschrieben werden (s. Abb. 1.2). Die Parameter g, ℓ, x sind die Fallbeschleunigung ($g = 9.80665 \text{ ms}^{-2}$, in den Formeln verzichten wir jedoch auf die Angabe der Einheiten), die Pendellänge ($\ell = 0.6 \text{ m}$) und die Anfangsauslenkung x als Winkelmaß. Im allgemeinen sind diese Parameter bereits mit *Datenfehlern* behaftet.

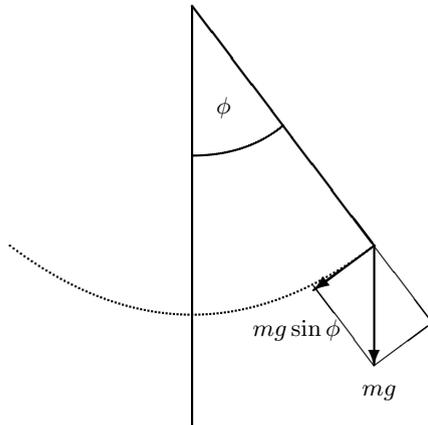


Abb. 1.2. Mathematisches Pendel

„Differentialgleichung“ bedeutet hier, daß die gesuchte unbekannte Funktion $\phi(t) = \phi(t, x)$ – der vom Pendel zur Zeit t angenommene Winkel bei Anfangsauslenkung x und vorheriger Ruhelage – dadurch gekennzeichnet ist, daß sie mit ihrer zweiten Ableitung nach t über die Relation (1.1) verknüpft ist. Man redet hier speziell von einer *Anfangswertaufgabe*, da die Differentialgleichung (1.1) durch sogenannte *Anfangsbedingungen* (1.2) ergänzt wird. Ohne diese Anfangsbedingungen (1.2) kann man keine *eindeutige* Lösung erwarten, da mit $\phi(t)$ auch $\eta(t) := \phi(t + a)$ für jedes feste $a \in \mathbb{R}$ (1.1) erfüllt. Man sagt, die Differentialgleichung hat die Ordnung zwei, da die zweite Ableitung als

höchste auftritt. Die Anfangsbedingungen legen die Ausgangssituation des dynamischen Vorgangs fest. Die erste Anfangsbedingung $\phi(0) = x$ gibt an, welchen Winkel das Pendel zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Vertikalen bildet. Die Geschwindigkeit des Pendels ist durch die erste Ableitung nach der Zeit t gegeben. Die zweite Anfangsbedingung $\phi'(0) = 0$ in (1.2) besagt also gerade, daß sich das Pendel zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhelage befindet. Man beachte, daß die Vorgabe von zwei Anfangsbedingungen der Ordnung der Differentialgleichung entspricht. Die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen liefert Aussagen, unter welchen Bedingungen allgemein *Anfangswertaufgaben* des Typs (1.1), (1.2) auf welchem Zeitintervall eine eindeutige Lösung besitzen. Dazu wird in einem späteren Kapitel etwas mehr zu sagen sein. Die Lösung $\phi(t)$ (falls sie existiert) gibt also den Winkel an, den das Pendel zum Zeitpunkt t mit der vertikalen Achse bildet. Es ist klar, daß wenn man die Anfangsauslenkung x ändert, sich auch die Winkelposition zum Zeitpunkt t ändert, d. h., die Lösungsfunktion ϕ hängt auch von der Anfangsbedingung ab. Wir drücken dies aus, indem wir schreiben $\phi(t) = \phi(t; x)$ – der Winkel, der sich zur Zeit t bei einer Anfangsauslenkung $\phi(0, x) = x$ einstellt.

Nun wird in unserer Aufgabe nicht primär nach der Lösungsfunktion $\phi(t, x)$ sondern nach einem geeigneten Anfangswert x^* gefragt, der gerade eine vorgegebene Schwingungsdauer T , zum Beispiel $T = 1.8$, realisiert. Für kleine x -Werte, also kleine Werte für den Winkel $\phi(t)$, kann man wegen $\sin \phi \approx \phi$ die Differentialgleichung (1.1) durch die lineare Differentialgleichung $\hat{\phi}''(t) = -c \hat{\phi}(t)$ annähern. Die Lösung dieser Differentialgleichung mit Anfangsbedingungen $\hat{\phi}(0) = x$, $\hat{\phi}'(0) = 0$ ist

$$\hat{\phi}(t) = x \cos(\sqrt{c} t).$$

Die Dauer einer Schwingung ist in diesem Fall $T = 2\pi c^{-\frac{1}{2}} \approx 1.55$ (Sekunden), unabhängig von x . Für große x -Werte ist die Linearisierung $\sin \phi \approx \phi$ nicht mehr sinnvoll. Für $x = \frac{\pi}{2}$ (horizontale Ausgangsposition des Pendels) wurde die Aufgabe (1.1)-(1.2) mit einer numerischen Methode mit hoher Genauigkeit gelöst. Das Ergebnis wird in Abb. 1.3 gezeigt.

Man stellt fest, daß die Schwingungsdauer in diesem Fall etwa $T = 1.9$ beträgt. Man kann zeigen, daß für $x \in (0, \pi)$, die Funktion $x \rightarrow T(x)$ monoton ist. Wegen $T(x) \approx 1.55$ für kleines x und $T(\frac{\pi}{2}) \approx 1.9$ gibt es ein eindeutiges $x^* \in (0, \frac{\pi}{2})$, wofür $T(x^*) = 1.8$ gilt. Unsere Aufgabe ist es, dieses x^* zu bestimmen. Aufgrund der Symmetrie der Bewegung ist die gesamte Schwingungsdauer T , wenn das Pendel zum Zeitpunkt $T/4$ gerade senkrecht steht, also $\phi(T/4, x) = 0$ gilt. Definiert man also

$$f(x) := \phi(T/4, x) = \phi(0.45, x), \quad (1.3)$$

so läuft unser Problem der Takterkonstruktion auf die Bestimmung der Nullstelle $x^* \in (0, \frac{\pi}{2})$ dieser (nur implizit gegebenen) Funktion f hinaus

$$f(x^*) = 0. \quad (1.4)$$

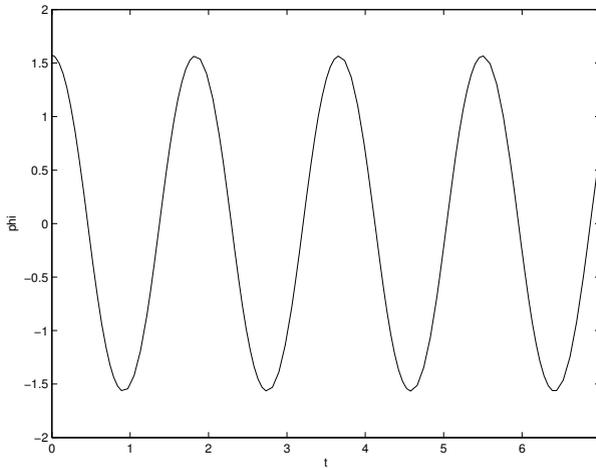


Abb. 1.3. Bewegung des Pendels für $x = \frac{\pi}{2}$

Dies nennt man ein *Nullstellenproblem*. Nullstellenprobleme als Format von Gleichungen treten in vielfältigen Zusammenhängen auf und bilden eine zentrale Thematik dieses Buches.

Die gängigen, in späteren Abschnitten zu behandelnden numerischen Verfahren zur Lösung von Nullstellenproblemen haben die gemeinsame Eigenschaft, daß sie (mindestens) auf *Funktionswerte* (bisweilen auf Ableitungswerte) der Funktion f zurückgreifen. f ist aber im vorliegenden Fall *nicht* explizit bekannt. Der Wert $f(x)$ ist wegen (1.3) die Lösung der Differentialgleichung zum Zeitpunkt $T/4 = 0.45$ bei Anfangsauslenkung x , d. h., die Auswertung von f an der Stelle x , verlangt selbst wieder als Unteraufgabe die Lösung der Anfangswertaufgabe (1.1), (1.2). Diese Lösung ist wiederum nicht explizit über einen analytischen Ausdruck darstellbar. Sie kann nur numerisch und damit selbst nur *näherungsweise* ermittelt werden. Ein Algorithmus zum Entwurf des Taktmechanismus könnte also so angelegt werden, daß als Unterroutine ein numerisches Verfahren zur Lösung von Anfangswertaufgaben gegebenenfalls wiederholt aufgerufen wird, um darüber die eigentliche Aufgabe, das Nullstellenproblem (1.4), zu lösen. *Numerische Lösungsmethoden für Anfangswertaufgaben* werden ebenfalls in diesem Buch vorgestellt. Neben der Konstruktion derartiger Verfahren wird wieder die Fehlerschätzung eine wichtige Rolle spielen, deren Bedeutung im vorliegenden Beispiel evident ist.

Solch ein Lösungsverfahren produziert im vorliegenden Fall eine *Näherung* $\tilde{\varphi}(T/4, x)$ der exakten Lösung $\phi(T/4, x)$, wobei die Abweichungen von der exakten Lösung wieder durch *Rundungsfehler* bei der Ausführung der betreffenden Algorithmen sowie durch *Diskretisierungsfehler* ähnlich wie bei der Quadratur hervor gerufen werden.

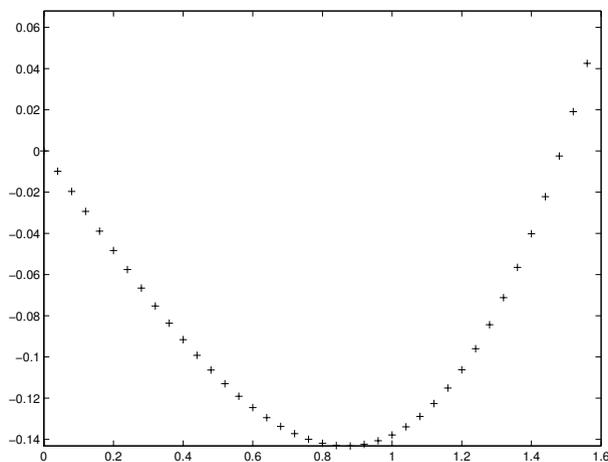


Abb. 1.4. Berechnete Werte $\tilde{\phi}(0.45, x) \approx f(x)$

Einige berechnete Näherungslösungen $\tilde{\phi}(0.45, x)$ für 41 äquidistante Anfangswerte x zwischen 0 und 1.6 werden in Abb. 1.4 gezeigt. Mit numerischen Methoden, die in diesem Buch behandelt werden, kann man die Nullstelle x^* der Funktion $f(x)$ annähern. Sofern die berechneten Werte die exakten Verhältnisse hinreichend genau wiedergeben, wäre die gesuchte Anfangsauslenkung etwa $x^* = 1.48$.

Abgesehen von der Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (1.1), (1.2), stellen sich in Bezug auf die angesprochene Genauigkeit und damit Aussagekraft des berechneten Resultats folgende Fragen. Besagte Nullstellenverfahren zur Lösung von (1.4) produzieren eine Folge von Näherungen x_i für x^* , die wieder über Auswertung von f gewonnen werden. Sie sind demnach mit Fehlern behaftet. Selbst wenn im nächsten Schritt die Differentialgleichung exakt gelöst würde, fragt sich, wie sensitiv die Lösung von der eingeschleppten bzw. durch Rundung bedingten Störung des Eingabewertes x abhängt, und wie sich dies weiter auf die Nullstellenbestimmung auswirkt. Offensichtlich wäre eine Rechnung sinnlos, wenn selbst bei exakter Rechnung kleine (unvermeidbare) Datenstörungen unkontrollierbare Variationen im Ergebnis bewirken würden. Diese Frage nach der Quantifizierung des Einflusses von Störungen der Eingabedaten (bei exakter Rechnung) ist die Frage nach der *Kondition* des betreffenden Problems. Sich ein Bild von der Kondition eines Problems zu machen, sollte also der gesamten Fehleranalyse eines speziellen Algorithmus vorausgehen, da die Kondition angeben soll, welche Ergebnisschwankungen *unvermeidbar sind*. Insofern liefert die Kondition die Meßlatte für den Genauigkeitsrahmen, den dann ein konkreter Algorithmus einhalten sollte. Es macht keinen Sinn, vom Algorithmus Fehlertoleranzen zu verlangen, die deutlich unterhalb der durch die Kondition markierten Schranken liegen. Es wäre andererseits natürlich schön, wenn der durch den Algorithmus pro-

duzierte Fehler in etwa dieser Größenordnung bliebe. Dies ist die Frage nach der *Stabilität* eines Verfahrens. Die Konzepte *Kondition eines Problems* und *Stabilität eines Algorithmus* werden im folgenden Kapitel eingehender diskutiert, und ziehen sich dann als Grundlage für die Bewertung der Ergebnisse numerischer Simulationen durch die gesamten Entwicklungen in diesem Buch. Dies betrifft zum Beispiel die *stetige Abhängigkeit* der Lösung einer Differentialgleichung von den Anfangswerten, ein Thema, das wir im Zusammenhang mit der Behandlung von Anfangswertaufgaben wieder aufgreifen werden.

Zum Schluß noch ein wichtiger Hinweis. Die wiederholt notwendige Lösung der Anfangswertaufgabe (1.1), (1.2) bei *gegebenen* Anfangsdaten $(x, 0)$ spielt hier insofern nur eine mittelbare Rolle, da eigentlich der Anfangswert x^* selbst, also ein *Modellparameter* gesucht wird. Über die Verwertung der Ergebnisse der „Vorwärtsrechnungen“ zur Lösung von (1.1), (1.2) (im Verlauf des Nullstellenverfahrens) wird erst auf den richtigen Anfangswert x^* „zurückgeschlossen“. Man spricht deshalb auch von einem *inversen Problem*. Inverse Probleme sind häufig deshalb delikate, da sie aufgrund der häufigen Vorwärtsrechnungen aufwendig sind und (anders als im vorliegenden Fall) meist extrem schlecht konditioniert sind, also höchst sensibel auf Datenstörungen reagieren. \triangle

Wie in diesen Beispielen nur unzureichend angedeutet wird, geht der eigentlichen numerischen Behandlung die geeignete mathematische *Modellierung* physikalisch-technischer Prozesse voraus, die oft die Ausgestaltung numerischer Methoden enorm prägen können. Dies wird exemplarisch in Kapitel 12 nochmals aufgegriffen.

Dennoch bietet diese Monographie in erster Linie eine methodenorientierte Einführung in die Grundlagen der Numerischen Mathematik. Es geht dabei nicht um die umfassende Behandlung spezieller komplexer Anwendungsprobleme, sondern um die Entwicklung einer Reihe numerischer Methoden, die immer wieder als algorithmische „Bausteine“ zur Lösung komplexerer, im Bereich des wissenschaftlichen Rechnens oft auftretender Problemstellungen herangezogen werden. Die wichtigsten Themen sind:

- Verfahren zur Lösung von linearen und nichtlinearen Gleichungssystemen,
- Ausgleichsrechnung,
- Interpolation,
- numerische Integration und Differentiation,
- Berechnung von Eigenwerten,
- numerische Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen,
- numerische Lösung von partiellen Differentialgleichungen,
- Lösungsverfahren für große dünnbesetzte lineare Gleichungssysteme.

Wir beschränken uns somit auf die Erarbeitung von grundlegenden Prototypen typischer Verfahren, die als Module in komplexen realistischen numerischen Simulationen auftreten. Diese Abstraktion oder Reduktion auf Kernelemente birgt nun eine Reihe von Schwierigkeiten. Zum einen geht der direkte Zusammenhang zu einer realistischen tatsächlichen Anwendungssituation

verloren. Insofern können die meisten Beispiele, die der Rahmen des Buches erlaubt, nur den schematischen Ablauf eines Verfahrens illustrieren. Das bloße Lernen oder Nachvollziehen von Beispielen reicht aber nicht. Es ist auch wichtig zu verstehen, warum ein bestimmtes Verfahren in einer vorliegenden Situation vorzuziehen ist, oder warum verschiedene Verfahren gewisse Effekte in bestimmten Situationen aufweisen. Es geht um die Vermittlung von Konzepten und damit auch von abstrakteren Zusammenhängen, die soweit verstanden werden sollten, daß eine Anpassung an eine konkrete Anwendungssituation möglich ist bzw. daß erkannt wird, welches numerische Lösungsverfahren überhaupt für ein konkretes Problem angemessen ist. So gibt es zum Beispiel ganz verschiedene Methoden zur Lösung von Gleichungssystemen, deren Auswahl wesentlich von Größe und Struktur des Problems abhängt. Eine zweite Schwierigkeit liegt nun darin, daß oft eine Vielfalt mathematischer Ansätze ins Spiel kommt und das nötige Verständnis erworben werden muß, ohne eine vollständige mathematische Analyse durchführen zu können. Man wird also vielfach auf rigorose Beweise verzichten müssen.

In diesen Buch werden für unterschiedliche Problemstellungen (wie z. B. das Lösen eines linearen Gleichungssystems, die Berechnung eines Integrals, die Bestimmung von Eigenwerten) folgende Themen behandelt:

- **Kondition** (= Empfindlichkeit für Störungen) eines Problems.
- Wichtige numerische **Lösungsverfahren**.
- **Stabilität** (= Empfindlichkeit für Störungen) der Lösungsverfahren.
- **Effizienz** (= Anzahl der Rechenoperationen, Speicherbedarf) der Lösungsverfahren, d. h., der numerische Aufwand, der nötig ist, um mit dem jeweiligen Verfahren eine gewünschte „Lösungsqualität“, sprich **Genauigkeit** zu erzielen.