

1

Strahlenoptik

Licht kann als elektromagnetische Welle beschrieben werden, die denselben theoretischen Prinzipien folgt wie alle anderen Formen elektromagnetischer Strahlung, beispielsweise Radiowellen oder Röntgenstrahlen. Diese Beschreibung von Licht führt zur so genannten **elektromagnetischen Optik**. Elektromagnetische Strahlung besteht aus zwei gekoppelten *Vektor*wellen für das elektrische und das magnetische Feld. Viele optische Erscheinungen können aber auch im Rahmen einer vereinfachten *skalaren* Wellentheorie behandelt werden, in der Licht durch eine skalare Wellenfunktion beschrieben wird. Diese genäherte Methode zur Beschreibung von Licht heißt skalare Wellenoptik oder einfach **Wellenoptik**.

Wenn sich Lichtwellen um und durch Objekte bewegen, deren Abmessungen viel größer sind als die Wellenlänge des Lichts, tritt die Wellennatur des Lichts nicht unmittelbar in Erscheinung und sein Verhalten kann durch die Annahme erklärt werden, dass sich einzelne Strahlen nach bestimmten geometrischen Regeln ausbreiten. Dieses Modell wird als **Strahlenoptik** bezeichnet. Mathematisch betrachtet ist die Strahlenoptik der Grenzfall der Wellenoptik für unendlich kleine Wellenlängen.

Die elektromagnetische Optik umfasst somit die Wellenoptik und diese die Strahlenoptik, wie Abb. 1.1 illustriert. Strahlenoptik und Wellenoptik sind Näherungen; ihre Berechtigung beruht darauf, dass sie in ihrem jeweiligen Gültigkeitsbereich Ergebnisse liefern, die eine gute bis sehr gute Annäherung an die Ergebnisse der exakteren elektromagnetischen Theorie bieten.

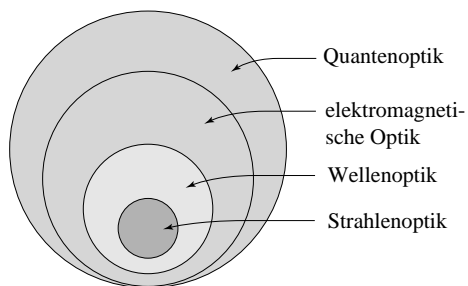


Abbildung 1.1 Die Quantenoptik beschreibt praktisch alle optischen Erscheinungen. Die elektromagnetische Theorie des Lichts (elektromagnetische Optik) gibt die umfassendste Beschreibung von Licht im Rahmen der klassischen Optik. Die Wellenoptik ist wiederum eine skalare Näherung für die elektromagnetische Optik. Strahlenoptik ist schließlich der Grenzfall der Wellenoptik für sehr kleine Wellenlängen.

Die elektromagnetische Optik gibt die umfassendste Beschreibung des Lichts im Rahmen der **klassischen Optik**; manche optische Erscheinungen sind aber grundsätzlich quantenmechanischer Natur und können nicht klassisch erklärt werden. Zu ihrer Beschreibung ist eine Quantenversion der elektromagnetischen Theorie nötig, die so genannte **Quantenelektrodynamik**. Soweit nur auf optische Erscheinungen Bezug genommen wird, wird diese Theorie auch als **Quantenoptik** bezeichnet.

Die verschiedenen optischen Theorien entwickelten sich historisch mehr oder weniger sukzessiv in der Reihenfolge Strahlenoptik → Wellenoptik → elektromagnetische Optik → Quantenoptik. Diese Folge ordnet die Theorien gleichzeitig nach steigender Komplexität und Vollkommenheit; ihre Entwicklung wurde nötig, um immer raffiniertere und genauere optische Experimente theoretisch zu erklären. In der Praxis ist die Theorie der Wahl stets die einfachste, die eine bestimmte Erscheinung erklären kann – allerdings ist es nicht immer einfach, *a priori* zu entscheiden, welches Modell dafür das richtige ist. Glücklicherweise hilft Erfahrung hier oft weiter.

Aus pädagogischen Gründen folgen die ersten Kapitel in diesem Buch der angegebenen historischen Entwicklung. Jede Theorie des Lichts startet mit einem Satz von Postulaten (die ohne Beweis angegeben werden), aus denen eine Vielzahl von Ergebnissen entwickelt werden. Die Postulate einer Theorie tauchen in der Theorie der nächsten Ebene jeweils in Spezialfällen wieder auf. In diesem Kapitel beginnen wir mit der Strahlenoptik.

In diesem Kapitel ...

Strahlenoptik ist die einfachste Theorie des Lichts. Dabei wird Licht durch einzelne Strahlen beschrieben, die sich nach bestimmten geometrischen Regeln durch optische Medien bewegen. Aus diesem Grund wird die Strahlenoptik auch als **geometrische Optik** bezeichnet. Strahlenoptik ist eine Näherung. Obwohl sie die meisten alltäglichen Erscheinungen im Zusammenhang mit Licht gut beschreibt, gibt es auch viele Phänomene, die sie nicht erklären kann (wie die restlichen Kapitel dieses Buches eindrucksvoll belegen).

Die Strahlenoptik beschreibt den *Ort* und die *Richtung* von Lichtstrahlen. Sie ist gerade bei der Beschreibung der *Bildentstehung* nützlich, der Sammlung aller von einem gegebenen Punkt eines Gegenstands ausgehenden Lichtstrahlen durch ein optisches Element und ihre Zusammenführung auf den entsprechenden Punkt eines Bilds. Mithilfe der Strahlenoptik können wir Bedingungen angeben, die erfüllt sein müssen, damit Licht in einem bestimmten Medium wie beispielsweise einer Glasfaser geführt wird. In isotropen Medien zeigen die Lichtstrahlen stets in die Ausbreitungsrichtung der *optischen Energie*. Wir können Strahlbündel konstruieren, in denen die Dichte der Strahlen proportional zur Energiedichte des Lichts ist. Wenn Licht beispielsweise von einer Punktquelle isotrop ausgestrahlt wird, dann ist die Energie der Licht-

strahlen in einem ausgewählten Kegel proportional zum Raumwinkel dieses Kegels. Lichtstrahlen können auf ihrem Weg durch ein optisches System verfolgt werden, um die optische Energie zu bestimmen, die durch einen gegebenen Querschnitt hindurchtritt.

Dieses Kapitel beginnt mit einem Satz von Postulaten, aus denen wir die einfachen Regeln ableiten werden, die die Ausbreitung von Lichtstrahlen durch optische Medien bestimmen. In Abschnitt 1.2 wenden wir diese Regeln auf einfache optische Elemente wie Spiegel oder ebene und sphärische Grenzflächen zwischen verschiedenen optischen Medien an. Die Ausbreitung von Strahlen in inhomogenen optischen Medien (mit variablem Brechungsindex) wird in Abschnitt 1.3 untersucht. Optische Elemente mit variablem Brechungsindex sind die Grundlage einer ganzen Technologie, die einen wichtigen Zweig der modernen Optik bildet.

Optische Komponenten sind oft um eine optische Achse angeordnet. Strahlen, die nahe der optischen Achse und nahezu parallel zu ihr verlaufen, bezeichnet man als **paraxiale Strahlen**. Wenn nur solche Strahlen Berücksichtigung finden, spricht man auch von **paraxialer Optik**. Die Veränderung des Orts und des Winkels eines paraxialen Strahls auf seinem Weg durch ein optisches System kann mithilfe einer 2×2 -Matrixalgebra sehr effizient beschrieben werden. Abschnitt 1.4 ist diesem algebraischen Werkzeug gewidmet, der so genannten **Matrixoptik**.

1.1

Postulate der Strahlenoptik

- Licht breitet sich in Form von Strahlen aus. Die Strahlen werden von Lichtquellen emittiert und können beobachtet werden, wenn sie einen optischen Detektor erreichen.
- Ein optisches Medium wird durch eine Größe $n \geq 1$ charakterisiert, den **Brechungsindex**. Für den Brechungsindex gilt $n = c_0/c$, wobei c_0 die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist und c die Lichtgeschwindigkeit im betrachteten Medium. Die Zeit, die das Licht benötigt, um eine Strecke d zurückzulegen, ist daher $d/c = nd/c_0$. Sie ist proportional zu dem Produkt nd , das auch als **optische Weglänge** bezeichnet wird.
- In einem inhomogenen Medium ist der Brechungsindex $n(\mathbf{r})$ eine Funktion des Orts $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Die optische Weglänge für einen gegebenen Weg zwischen zwei Punkten A und B ist daher

$$\text{optische Weglänge} = \int_A^B n(\mathbf{r}) ds, \quad (1.1)$$

wenn ds das differentielle Längenelement entlang des gewählten Weges ist. Die Zeit, die das Licht von A nach B benötigt, ist proportional zur optischen Weglänge.

- **Fermatsches Prinzip.** Zwischen zwei Punkten A und B bewegen sich Lichtstrahlen so, dass die benötigte Zeit (bzw. die optische Weglänge) im Vergleich zu benachbarten Wegen ein Extremum annimmt. Mathematisch heißt das

$$\delta \int_A^B n(\mathbf{r}) ds = 0, \quad (1.2)$$

wobei das Symbol δ als "Variation von" zu lesen ist. Das bedeutet, dass die optische Weglänge als Funktion der Streckenführung entweder minimal oder maximal (oder ein Wendepunkt) sein muss. In der Regel entspricht sie einem Minimum, sodass folgende Aussage gilt:

Lichtstrahlen breiten sich entlang des Weges aus, der die kürzeste Zeit in Anspruch nimmt. ■

Manchmal wird diese Bedingung von mehr als einem Weg erfüllt; in diesen Fällen folgen die Lichtstrahlen allen Wegen gleichzeitig. Ein Beispiel für einen Fall, in dem die optische Weglänge maximal ist, ist in Aufgabe 1-1 gezeigt.

In diesem Kapitel nutzen wir die Postulate der Strahlenoptik, um die Regeln zu bestimmen, die für die Ausbreitung von Lichtstrahlen, ihre Reflexion oder Brechung an der Grenzfläche verschiedener Medien und ihre Transmission durch optische Komponenten gelten. Auf dieser Grundlage können wir eine Menge von Ergebnissen für zahlreiche optische Systeme erhalten, ohne weitere Annahmen über die Natur des Lichts zu benötigen.

1.1.1

Ausbreitung in einem homogenen Medium

In einem homogenen Medium ist der Brechungsindex überall gleich, und folglich gilt dasselbe für die Lichtgeschwindigkeit. Der von Fermats Prinzip geforderte Weg der kürzesten Zeit ist folglich gleich der kleinsten optischen Weglänge. Fermats Prinzip reduziert sich in diesem Fall auf das seit dem Altertum bekannte **Prinzip von Hero**: Lichtstrahlen bewegen sich entlang des kürzesten Weges. Der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist eine Gerade; also folgt: *Lichtstrahlen breiten sich in einem homogenen Medium geradlinig aus* (Abb. 1.2).

1.1.1.1 Reflexion an einem Spiegel

Spiegel werden meist aus sorgfältig polierten metallischen Oberflächen oder dielektrischen Schichten auf einer Unterlage wie z. B. Glas hergestellt. Licht wird an Spiegeln gemäß dem Reflexionsgesetz reflektiert:

Der reflektierte Strahl liegt in der Einfallsebene; der Ausfallswinkel ist gleich dem Einfallswinkel. ■

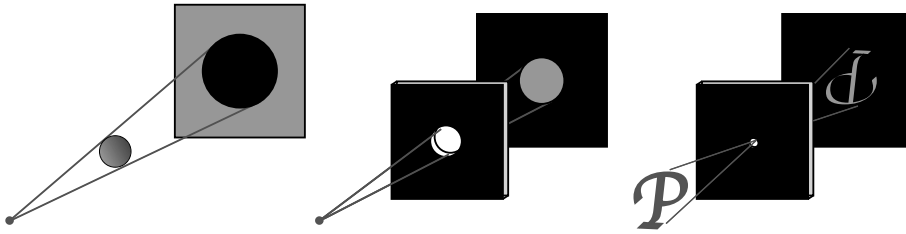


Abbildung 1.2 Geradlinige Ausbreitung von Lichtstrahlen. Schatten sind ideale Projektionen von Hindernissen.

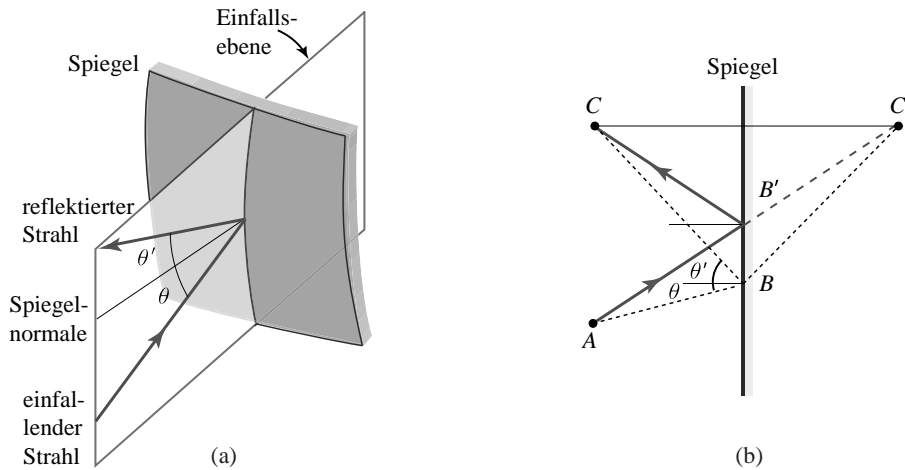


Abbildung 1.3 (a) Reflexion an einem ebenen Spiegel. (b) Geometrische Konstruktion zum Beweis des Reflexionsgesetzes.

Die Einfallsebene wird durch den einfallenden Lichtstrahl und die Flächennormale des Spiegels am Einfallspunkt festgelegt. Der Einfallswinkel θ und der Ausfallswinkel θ' sind in Abb. 1.3(a) definiert. Das Reflexionsgesetz lässt sich leicht aus dem Prinzip von Hero herleiten. Dazu betrachten wir einen Strahl, der sich nach Reflexion an dem ebenen Spiegel in Abb. 1.3(b) von Punkt A nach Punkt B ausbreitet. Nach dem Prinzip von Hero muss die Strecke $\overline{AB} + \overline{BC}$ für einen unendlich dünnen Spiegel minimal sein. Wenn C' ein Spiegelbild von C ist, gilt $\overline{BC} = \overline{BC'}$, sodass $\overline{AB} + \overline{BC'}$ minimal sein muss. Das ist genau dann der Fall, wenn $\overline{ABC'}$ eine gerade Linie ist, wenn also B mit B' zusammenfällt und $\theta = \theta'$ ist.

1.1.1.2 Reflexion und Brechung an Grenzflächen

An der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Brechungsindizes n_1 und n_2 wird ein einfallender Lichtstrahl in zwei Strahlen aufgespalten, einen re-

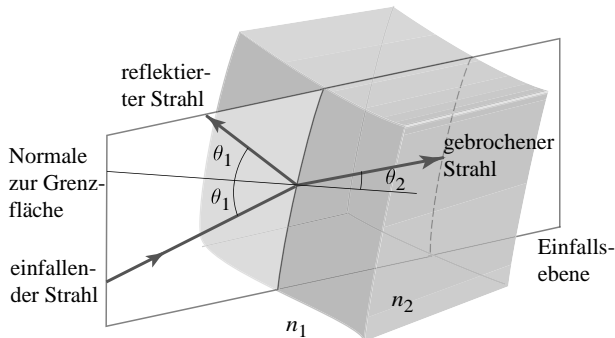


Abbildung 1.4 Reflexion und Brechung an der Grenzfläche zwischen zwei Medien.

flektierten und einen gebrochenen (oder transmittierten) Strahl (Abb. 1.4). Für den reflektierten Strahl gilt das Reflexionsgesetz; der gebrochene Strahl gehorcht entsprechend dem Brechungsgesetz:

Der gebrochene Strahl liegt in der Einfallsebene; der Beugungswinkel θ_2 hängt mit dem Einfallswinkel θ_1 gemäß dem snelliusschen Gesetz zusammen,

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 . \quad (1.3)$$

Die Strahlenoptik macht keine Aussage darüber, welche Anteile eines Strahls reflektiert bzw. gebrochen werden.

Die drei einfachen besprochenen Regeln – geradlinige Ausbreitung, Reflexionsgesetz und Brechungsgesetz – werden wir in Abschnitt 1.2 auf verschiedene Anordnungen von Spiegeln und transparenten optischen Komponenten anwenden, ohne nochmals auf Fermats Prinzip zurückgreifen zu müssen.

Übung 1-1: Das snelliussche Gesetz

Der Beweis des snelliusschen Gesetzes ist eine gute Übung für die Anwendung von Fermats Prinzip. Wir müssen den optischen Lichtweg $n_1 \overline{AB} + n_2 \overline{BC}$ zwischen den Punkten A und C in Abb. 1.5 minimieren. Dazu müssen wir $n_1 d_1 \sec \theta_1 + n_2 d_2 \sec \theta_2$

als Funktion der Winkel θ_1 und θ_2 unter der Nebenbedingung $d_1 \tan \theta_1 + d_2 \tan \theta_2 = d$ minimieren. Zeigen Sie, dass die Lösung dieser Minimierung unter der angegebenen Randbedingung zum snelliusschen Gesetz führt.

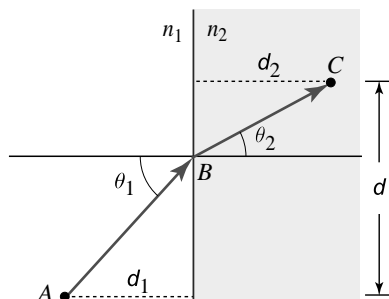


Abbildung 1.5 Konstruktion zum Beweis des snelliusschen Gesetzes.

1.2

Einfache optische Komponenten

1.2.1

Spiegel

1.2.1.1 Ebene Spiegel

Ein ebener Spiegel reflektiert die von einem Punkt P_1 ausgehenden Strahlen so, dass die reflektierten Strahlen von einem Punkt P_2 hinter dem Spiegel auszugehen scheinen, der als Bildpunkt bezeichnet wird (Abb. 1.6).

1.2.2

Parabolspiegel

Die Oberfläche eines Parabolspiegels ist ein Rotationsparaboloid. Sie hat die nützliche Eigenschaft, dass sie alle parallel zu ihrer Achse einfallenden Strahlen in einem einzigen Punkt bündelt, dem **Brennpunkt**. Die in Abb. 1.7 definierte Entfernung $\overline{PF} = f$ heißt **Brennweite**. Parabolspiegel werden häufig als Sammelemente in Teleskopen verwendet. Sie haben außerdem die Eigenschaft, dass sie Lichtstrahlen von einer Punktquelle wie beispielsweise einem Taschenlampenbirnchen in ein paralleles Strahlbündel umwandeln können.

1.2.3

Elliptische Spiegel

Ein elliptischer Spiegel reflektiert alle von einem seiner beiden Brennpunkte (z. B. P_1) ausgehenden Strahlen in den anderen Brennpunkt P_2 (Abb. 1.8). Entsprechend dem Prinzip von Hero sind die von den Strahlen zwischen P_1 und P_2 zurückgelegten Wege alle gleich lang.

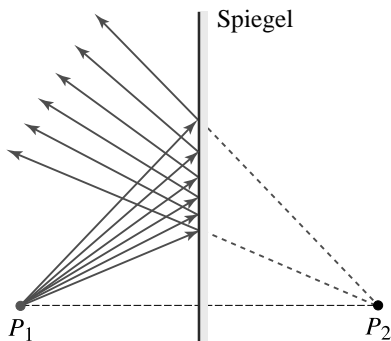


Abbildung 1.6 Reflexion an einem ebenen Spiegel.

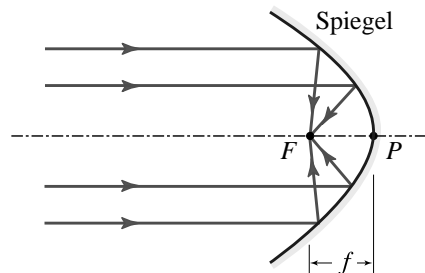


Abbildung 1.7 Fokussierung durch einen Parabolspiegel.

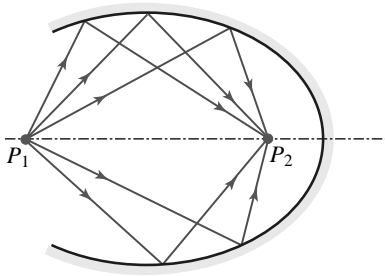


Abbildung 1.8 Reflexion an einem elliptischen Spiegel.

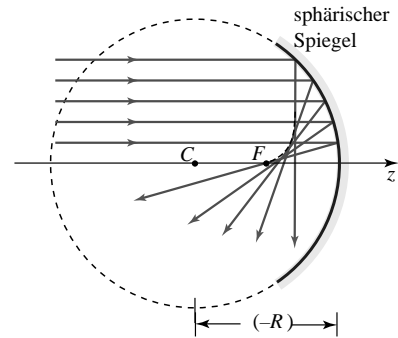


Abbildung 1.9 Reflexion von parallelen Strahlen an einem konkaven sphärischen Spiegel.

1.2.4

Sphärische Spiegel

Sphärische Spiegel sind leichter herzustellen als parabolische oder elliptische. Allerdings besitzen sie weder die fokussierenden Eigenschaften von Parabolspiegeln noch die Abbildungseigenschaften elliptischer Spiegel. Wie Abb. 1.9 zeigt, treffen parallele Strahlen an unterschiedlichen Punkten auf die Spiegelachse; ihre Einhüllende (die gepunktete Kurve) wird *kaustische Fläche* genannt. Immerhin werden paraxiale Strahlen annähernd auf einen Punkt F in einer Entfernung $(-R)/2$ vom Zentrum C des Spiegels abgebildet. Per Konvention wird R für Konkavspiegel negativ und für Konvexspiegel positiv gezählt.

1.2.5

Reflexion von paraxialen Strahlen an sphärischen Spiegeln

Strahlen, die nahe der Spiegelachse und in einem kleinen Winkel zu ihr verlaufen (sodass $\sin \theta \approx \theta$ gesetzt werden kann), heißen **paraxiale Strahlen**. In der **paraxialen Näherung** werden nur paraxiale Strahlen berücksichtigt; in diesem Fall fokussieren sphärische Spiegel wie Parabolspiegel *und* besitzen Abbildungseigenschaften wie elliptische Spiegel. Der aus dieser Näherung entstehende Satz von Regeln wird als **paraxiale Optik** bezeichnet, manchmal auch als **Optik erster Ordnung** oder **gaußsche Optik**.

Ein sphärischer Spiegel mit Radius R verhält sich in dieser Näherung wie ein Parabolspiegel mit der Brennweite $f = R/2$. Das ist nicht weiter überraschend, da eine Parabel in der Nähe der Achse durch einen Kreis angenähert werden kann, dessen Radius gleich dem Krümmungsradius der Parabel ist (Abb. 1.10).

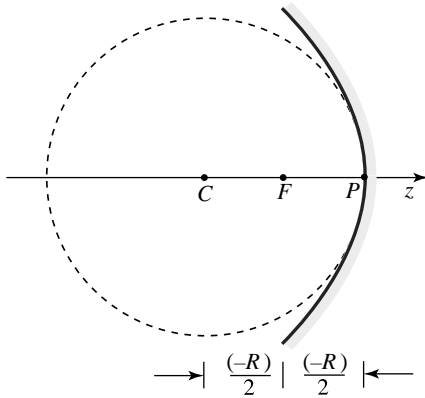


Abbildung 1.10 Für paraxiale Strahlen entspricht ein sphärischer Spiegel einem Parabolspiegel.

Alle von einem gegebenen Punkt auf der Achse eines sphärischen Spiegels ausgehenden paraxialen Strahlen werden auf einen einzigen Bildpunkt auf der Achse reflektiert. Um das zu verstehen, betrachten wir einen Strahl, der in einem Winkel θ_1 zur Achse von einem Punkt P_1 in einer Entfernung z_1 von einem Konkavspiegel mit Radius R ausgeht (Abb. 1.11). Er wird in einem Winkel $-\theta_2$ reflektiert und trifft an einem Punkt P_2 in einer Entfernung z_2 vom Spiegel auf die Achse. Der Winkel θ_2 ist negativ, da der Strahl nach unten gerichtet ist. Da sich die Winkel in einem Dreieck zu 180° addieren, gilt $\theta_1 = \theta_0 - \theta$ und $-\theta_2 = \theta_0 + \theta$ und daher $-\theta_2 + \theta_1 = 2\theta_0$. Wenn θ_0 hinreichend klein ist, können wir die Näherung $\tan \theta_0 \approx \theta_0$ verwenden, sodass $\theta_0 \approx y/(-R)$ ist und wir

$$-\theta_2 + \theta_1 \approx \frac{2y}{-R} \quad (1.4)$$

erhalten, wobei y die Höhe des Punktes ist, an dem die Reflexion stattfindet. Da der Spiegel konkav ist, ist R negativ. Wenn sowohl θ_1 als auch θ_2 klein sind, ist $\theta_1 \approx y/z_1$ und $-\theta_2 = y/z_2$, sodass wir aus Gl. (1.4) $y/z_1 + y/z_2 \approx 2y/(-R)$ erhalten; daraus folgt

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \approx \frac{2}{-R}. \quad (1.5)$$

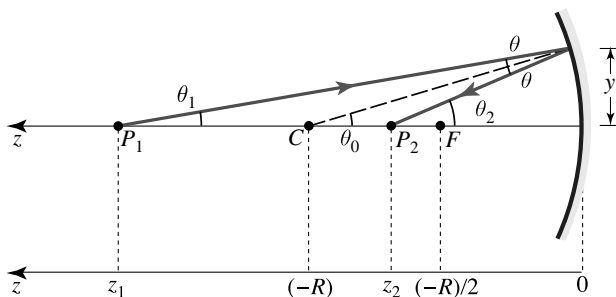


Abbildung 1.11 Reflexion paraxialer Strahlen an einem sphärischen Konkavspiegel mit Radius $R < 0$.

Übung 1-2: Bildentstehung an einem sphärischen Spiegel

Zeigen Sie, dass von einem Punkt $P_1 = (y_1, z_1)$ ausgehende Strahlen im Rahmen der paraxialen Näherung auf einen Punkt $P_2 = (y_2, z_2)$ reflektiert werden, wobei z_1 und z_2 die Gl. (1.7) erfüllen und $y_2 = -y_1 z_2 / z_1$ ist (Abb. 1.12). Das bedeutet, dass

Strahlen von allen Punkten der Ebene $z = z_1$ sich in einem einzigen Bildpunkt in der Ebene $z = z_2$ treffen, sodass der Spiegel als abbildendes System mit der Vergrößerung $-z_2/z_1$ wirkt. Eine negative Vergrößerung bedeutet, dass das Bild invertiert wird.

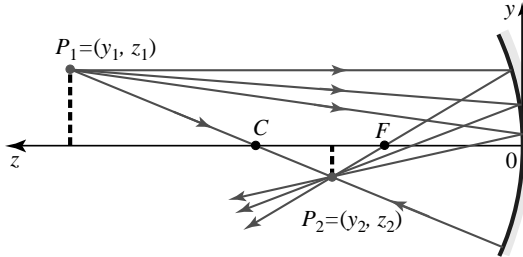


Abbildung 1.12 Bildentstehung an einem sphärischen Spiegel; vier ausgewählte Strahlen sind gezeigt.

Diese Beziehung gilt für beliebige y (d.h. unabhängig von θ_1), so lange die paraxiale Näherung gilt. Mit anderen Worten, alle Strahlen, die von P_1 ausgehen, treffen sich in P_2 . Die Entfernungen z_1 und z_2 werden in einem Koordinatensystem gemessen, dessen z -Achse nach links zeigt. Alle Punkte mit negativen Werten von z liegen daher rechts des Spiegels.

Nach Gl. (1.5) werden Strahlen, die von einem weit entfernt auf der z -Achse liegenden Punkt ausgehen ($z_1 = \infty$), auf einen Punkt F in einer Entfernung $z_2 = (-R)/2$ abgebildet. Das bedeutet, dass alle aus dem Unendlichen (parallel zur Spiegelachse) einfallenden Strahlen in der paraxialen Näherung in einem Punkt in einer Entfernung f vom Spiegel gebündelt werden, der Brennweite des Spiegels:

$$f = \frac{-R}{2}, \quad (1.6)$$

Meist wird Gl. (1.5) in der Form

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{f}, \quad (1.7)$$

geschrieben, die als **Abbildungsgleichung** bezeichnet wird. Sie gilt nur, wenn sowohl der einfallende als auch der reflektierte Strahl paraxial sind.

1.2.6

Ebene Grenzflächen

Das snelliussche Gesetz [Gl. (1.3)] beschreibt die Beziehung zwischen dem Einfallswinkel θ_1 und dem Brechungswinkel θ_2 an einer ebenen Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Brechungsindizes n_1 und n_2 . In Abb. 1.13 ist diese Beziehung für zwei Fälle aufgetragen:

1. *Äußere Brechung* ($n_1 < n_2$): Wenn der Lichtstrahl aus dem Medium mit dem kleineren Brechungsindex kommt, ist $\theta_2 < \theta_1$ und der gebrochene Strahl wird von der Grenzfläche weg gebrochen.
2. *Innere Brechung* ($n_1 > n_2$): Wenn der Lichtstrahl aus dem Medium mit dem größeren Brechungsindex kommt, ist $\theta_2 > \theta_1$ und der gebrochene Strahl wird in Richtung der Grenzfläche gebrochen.

In beiden Fällen wird der Lichtstrahl so gebrochen, dass die optische Weglänge minimiert wird, d.h. die Wegstrecke im optisch dünneren Medium zulasten der Wegstrecke im optisch dichteren Medium vergrößert wird. In beiden Fällen ist die Beziehung zwischen θ_2 und θ_1 für kleine Winkel (also paraxiale Strahlen) näherungsweise linear, $n_1\theta_1 \approx n_2\theta_2$ oder $\theta_2 \approx (n_1/n_2)\theta_1$.

1.2.6.1 Totalreflexion

Bei der inneren Brechung ($n_1 > n_2$) ist der Brechungswinkel größer als der Einfallswinkel ($\theta_2 > \theta_1$), sodass mit steigendem θ_1 irgendwann $\theta_2 = 90^\circ$ wird (siehe Abb. 1.13). Diese Situation tritt für $\theta_1 = \theta_k$ (**kritischer Winkel** oder **Grenzwinkel**) ein, wobei $n_1 \sin \theta_k = n_2 \sin(\pi/2) = n_2$ ist, sodass

$$\theta_k = \sin^{-1} \frac{n_2}{n_1}. \quad (1.8)$$

Für $\theta_1 > \theta_k$ kann das Snelliussche Gesetz Gl. (1.3) nicht erfüllt werden, und es tritt keine Brechung ein. Der einfallende Strahl wird nun vollständig reflektiert, als ob die Grenzfläche ein idealer Spiegel sei [Abb. 1.14(a)]. Diese so genannte **Totalreflexion** ist die Grundlage vieler optischer Elemente und Systeme wie beispielsweise reflektierender Prismen [siehe Abb. 1.14(b)] und optischer Fasern (siehe Abschnitt 1.2.8). Mithilfe der elektromagnetischen Optik (Fresnelsche Gleichungen in Kapitel 6) kann gezeigt werden, dass der reflek-

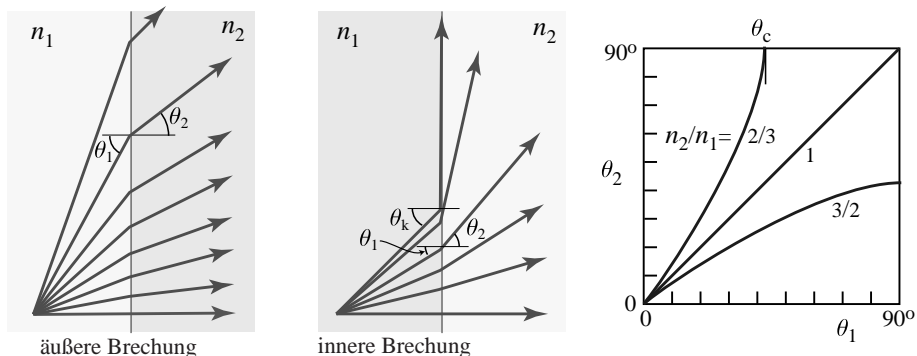


Abbildung 1.13 Die Beziehung zwischen Einfallswinkel und Brechungswinkel.

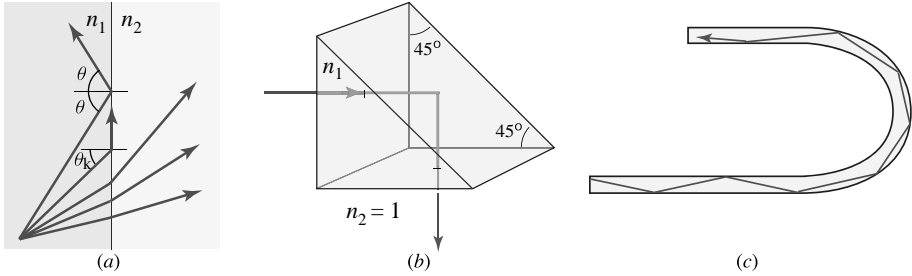


Abbildung 1.14 (a) Totalreflexion an einer ebenen Grenzfläche. (b) Ein reflektierendes Prisma. Für $n_1 > \sqrt{2}$ und $n_2 = 1$ (Luft) ist $\theta_k < 45^\circ$; wegen $\theta_1 = 45^\circ$ wird der Strahl

dann vollständig reflektiert. (c) Lichtstrahlen werden durch Totalreflexion an den Grenzflächen eines Lichtleiters geführt.

tierte Strahl auch die gesamte Energie enthält; die Totalreflexion ist somit ein äußerst effizienter Prozess.

1.2.6.2 Prismen

Ein Prisma mit einem Öffnungswinkel α und dem Brechungsindex n (Abb. 1.15) lenkt einen in einem Winkel θ einfallenden Strahl um einen Winkel

$$\theta_{Ab} = \theta - \alpha + \sin^{-1} \left[\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} \sin \alpha - \sin \theta \cos \alpha \right] \quad (1.9)$$

ab. Um diese Beziehung herzuleiten, muss das Snelliussche Gesetz auf jede der beiden brechenden Oberflächen des Prismas angewendet werden. Wenn α sehr klein ist (dünnes Prisma) und θ ebenfalls (paraxiale Näherung), können wir Gl. (1.9) näherungsweise als

$$\theta_{Ab} \approx (n - 1)\alpha \quad (1.10)$$

schreiben.

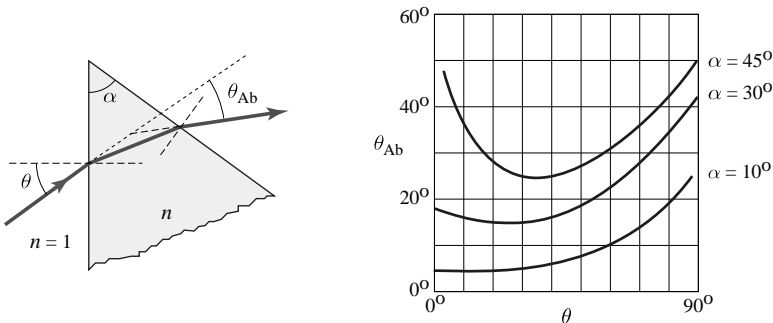


Abbildung 1.15 Ablenkung eines Lichtstrahls an einem Prisma. Der Ablenkungswinkel θ_{Ab} ist für einen gegebenen Öffnungswinkel α des Prismas und $n = 1.5$ eine Funktion des Einfallswinkels θ . Wenn α und θ klein

sind, gilt $\theta_{Ab} \approx (n - 1)\alpha$; die Ablenkung ist dann in erster Näherung unabhängig von θ . Für $\alpha = 45^\circ$ oder $\theta = 0^\circ$ tritt Totalreflexion ein, wie in Abb. 1.14(b).

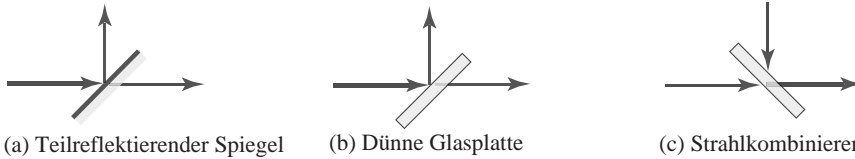


Abbildung 1.16 Strahlteiler und -kombinierer.

1.2.6.3 Strahlteiler

Ein Strahlteiler ist ein optisches Element, das den einfallenden Strahl in einen reflektierten und einen transmittierten Strahl aufspaltet (Abb. 1.16). Oft werden Strahlteiler auch eingesetzt, um zwei Lichtstrahlen zu einem einzigen zu kombinieren [Abb. 1.16(c)]. Sie bestehen häufig aus einer dünnen metallischen oder dielektrischen Schicht auf einem Glassubstrat; auch eine dünne Glasplatte oder ein Prisma können als Strahlteiler wirken.

1.2.7

Sphärische Grenzflächen und Linsen

Wir untersuchen nun die Brechung von Lichtstrahlen an einer sphärischen Grenzfläche mit dem Radius R zwischen zwei Medien mit den Brechungsindizes n_1 und n_2 . Per Konvention wird R für konvexe Grenzflächen positiv gezählt und für konkave Grenzflächen negativ. Wir verwenden dazu das snelliussche Gesetz für den Zusammenhang zwischen dem Einfallswinkel und dem Brechungswinkel relativ zur Oberflächennormale, die durch den Radiusvektor \mathcal{C} vom Zentrum der Fläche gegeben ist. Die Winkel bezüglich der Normale müssen von den Winkeln θ_1 und θ_2 bezüglich der z -Achse unterschieden werden. Wenn wir nur paraxiale Strahlen betrachten, deren Winkel zur optischen Achse des Systems klein sind, sodass $\sin \theta \approx \theta$ und $\tan \theta \approx \theta$ gilt, können wir die folgenden Eigenschaften herleiten:

- Ein in einem Winkel θ_1 zur z -Achse verlaufender Strahl, der die Grenzfläche an einem Punkt in der Höhe y trifft und dort einen Winkel θ_0 mit der Oberflächennormale einschließt [siehe Abb. 1.17(a)], ändert an der Oberfläche seine Richtung, sodass der reflektierte Strahl in einem Winkel θ_2 zur z -Achse bzw. θ_3 zur Oberflächennormale verläuft. Der Einfallswinkel ist daher $\theta_1 + \theta_2$ und der Brechungswinkel ist θ_3 , sodass

$$\theta_2 \approx \frac{n_1}{n_2} \theta_1 - \frac{n_2 - n_1}{n_2} \frac{y}{R}. \quad (1.11)$$

- Alle von einem Punkt $P_1 = (y_1, z_1)$ in der Ebene $z = z_1$ ausgehenden paraxialen Strahlen treffen sich in einem Punkt $P_2 = (y_2, z_2)$ in der Ebene $z = z_2$; es gilt

$$\frac{n_1}{z_1} + \frac{n_2}{z_2} \approx \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (1.12)$$

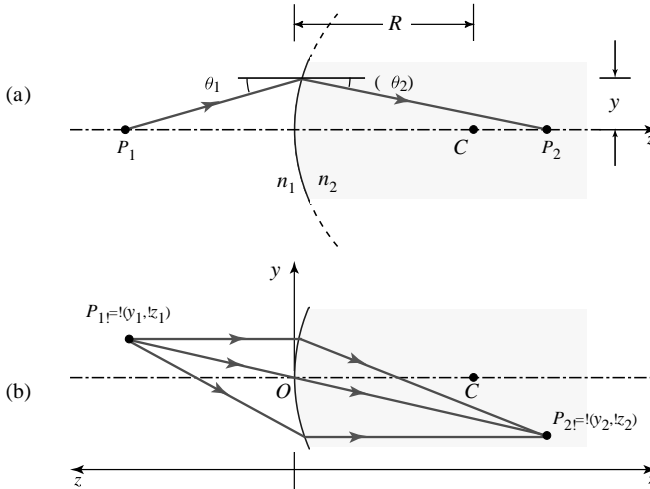


Abbildung 1.17 Brechung an einer konvexen sphärischen Grenzfläche ($R > 0$).

Übung 1-3: Bildentstehung

Leiten Sie Gl. (1.11) her. Zeigen Sie, dass paraxiale Strahlen, die von einem Punkt P_1 ausgehen, durch P_2 verlaufen, wenn die Gln. (1.12) und (1.13) erfüllt sind.

und

$$y_2 = -\frac{n_1 z_2}{n_2 z_1} y_1. \tag{1.13}$$

Die Ebenen $z = z_1$ und $z = z_2$ heißen *konjugierte Ebenen*. Zu jedem Punkt in der ersten Ebene existiert ein entsprechender Punkt (Bildpunkt) in der zweiten Ebene; die Vergrößerung beträgt $-(n_1/n_2)(z_2/z_1)$. Eine negative Vergrößerung bedeutet wieder, dass das Bild invertiert ist. Per Konvention wird P_1 in einem nach links zeigenden und P_2 in einem nach rechts zeigenden Koordinatensystem gemessen (d.h. wenn P_2 links der Grenzfläche liegt, ist z_2 negativ).

Die Ähnlichkeiten zwischen diesen Eigenschaften und denen eines sphärischen Spiegels sind offensichtlich. Allerdings gelten die beschriebenen Abbildungseigenschaften nur näherungsweise – nämlich nur für paraxiale Strahlen. Strahlen, die in einem größeren Winkel zur optischen Achse verlaufen, befolgen diese Regeln nicht; die Abweichungen führen zu Bildfehlern, die unter dem Begriff **Aberration** zusammengefasst werden.

Übung 1-4: Aberrationsfreie abbildende Oberfläche

Bestimmen Sie die Gleichung einer konvexen asphärischen (nicht sphärischen) Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Brechungsindizes n_1 und n_2 mit der Eigenschaft, dass alle von einem Punkt P_1 auf der optischen Achse in einer Entfernung z_1 links der Grenzfläche ausgehende (nicht un-

bedingt paraxiale) Strahlen auf einen Punkt P_2 auf der optischen Achse in einer Entfernung z_2 rechts der Grenzfläche abgebildet werden [Abb. 1.17(a)]. *Hinweis:* Nach dem fermatschen Prinzip müssen die optischen Weglängen zwischen den beiden Punkten für alle Wege identisch sein.

1.2.7.1 Linsen

Eine sphärische Linse wird durch zwei sphärische Oberflächen begrenzt. Sie ist folglich durch die Angabe der beiden Radien R_1 und R_2 der Oberflächen, ihrer Dicke Δ und ihres Brechungsindex n vollständig beschrieben (Abb. 1.18). Eine gläserne Linse in Luft kann als Kombination zweier sphärischer Grenzflächen Luft–Glas und Glas–Luft betrachtet werden.

Ein Strahl, der die erste Grenzfläche in einer Höhe y und in einem Winkel θ_1 zur z -Achse trifft [Abb. 1.19(a)], wird dort gemäß Gl. (1.11) in einem Winkel θ gebrochen. Den gebrochenen Strahl können wir verlängern, bis er auf die zweite Oberfläche trifft. Dort verwenden wir wieder Gl. (1.11), wobei wir für θ_1 nun θ einsetzen, um den Winkel θ_2 des Strahls nach der Brechung an der zweiten Oberfläche zu erhalten. Das Ergebnis ist im Allgemeinen kompliziert. Wenn die Linse aber hinreichend dünn ist, können wir annehmen, dass der Strahl die Linse in ungefähr derselben Höhe y verlässt, in der er eingetreten war. Mit dieser Annahme erhalten wir:

- Die Winkel des einfallenden und des gebrochenen Strahls hängen gemäß

$$\theta_2 = \theta_1 - \frac{y}{f} \tag{1.14}$$

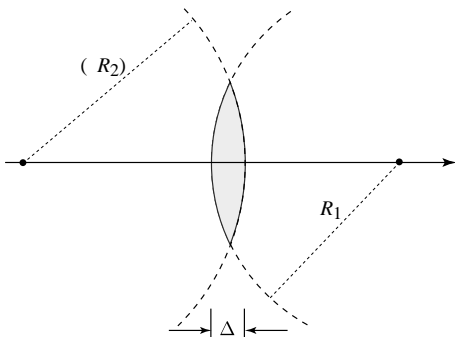


Abbildung 1.18 Eine bikonvexe sphärische Linse.

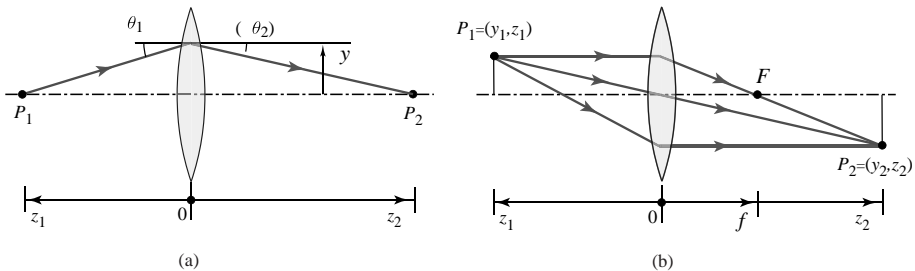


Abbildung 1.19 (a) Strahlenverlauf in einer dünnen Linse. (b) Bildentstehung in einer dünnen Linse.

Übung 1-5: Die Gleichungen für dünne Linsen

Gehen Sie von Gl. (1.11) aus und verwenden Sie die (1.14) und (1.16) zu beweisen. Definition der Brennweite aus Gl. (1.15), um die Gln.

zusammen, wobei die **Brennweite** f durch

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.15)$$

gegeben ist.

- Alle von einem Punkt $P_1 = (y_1, z_1)$ ausgehenden Strahlen treffen sich in einem Punkt $P_2 = (y_2, z_2)$ [Abb. 1.19(b)], wobei

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{f} \quad (1.16)$$

und

$$y_2 = -\frac{z_2}{z_1} y_1 \quad (1.17)$$

ist.

Diese Ergebnisse sind identisch mit denen für einen sphärischen Spiegel [siehe Gl. (1.7) und Übung 1-2]. Die Gleichungen zeigen, dass jeder Punkt in der Ebene $z = z_1$ auf einen entsprechenden Punkt in der Ebene $z = z_2$ abgebildet wird; die Vergrößerung ist $-z_2/z_1$. Für $z_1 = z_2 = 2f$ ist die Vergrößerung gleich eins. Die Brennweite f einer Linse beschreibt daher ihre Wirkung auf paraxiale Strahlen vollständig. Wie bereits zuvor erwähnt, werden P_1 und P_2 in nach links bzw. rechts zeigenden Koordinatensystemen gemessen, und die Krümmungsradien R_1 und R_2 sind für konvexe Oberflächen positiv und für konkave Oberflächen negativ. Für die in Abb. 1.18 gezeigt bikonvexe Linse ist R_1 positiv und R_2 negativ, sodass die beiden Terme in Gl. (1.15) sich addieren und zu einem positiven f führen.

Es muss noch einmal betont werden, dass die hier diskutierten Beziehungen nur für paraxiale Strahlen gelten. Nicht paraxiale Strahlen führen zu Aberrationen wie in Abb. 1.20 gezeigt.

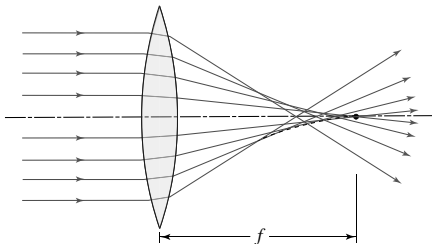


Abbildung 1.20 Nicht paraxiale Strahlen treffen sich nicht im paraxialen Brennpunkt. Die gepunktete Einhüllende der gebrochenen Strahlen wird als kaustische Linie bezeichnet.

1.2.8

Lichtleiter

Durch Linsen oder Spiegel kann Licht von einem Ort zu einem anderen geführt werden, wie Abb. 1.21 illustriert. Da brechende Elemente (wie Linsen) aber immer auch einen Teil des Lichts reflektieren und Spiegel einen Teil des Lichts absorbieren, ist der kumulierte Verlust an optischer Leistung signifikant, wenn viele optische Elemente eingesetzt werden. Zwar können diese Effekte minimiert werden (z. B. durch antireflexbeschichtete Linsen), aber ein derartiges System ist umständlich und teuer.

Im Vergleich dazu ist die Totalreflexion an einer Grenzfläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlichen Brechungsindizes ein idealer Mechanismus, um Licht zu führen. Hierbei werden die Strahlen immer wieder verlustfrei reflektiert, ohne Brechung zu erfahren. Mithilfe hochreiner Glasfasern kann Licht mit vergleichsweise geringen Verlusten über Strecken von vielen Kilometern geleitet werden.

Ein Lichtleiter besteht aus zwei konzentrischen Glas- oder Kunststoffzylindern (Abb. 1.22). Der innere, auch als Kern bezeichnet, besitzt den Brechungsindex n_1 und der äußere, der Mantel, einen etwas kleineren Brechungsindex $n_2 < n_1$; man bezeichnet eine solche Anordnung als **Stufenindexfaser**. Lichtstrahlen, die sich im Kern ausbreiten, werden an der Grenzfläche zum Mantel totalreflektiert, wenn ihr Einfallswinkel größer als der Grenzwinkel ist, $\bar{\theta} > \theta_k = \sin^{-1}(n_2/n_1)$. Alle Strahlen mit einem Winkel $\theta = 90^\circ - \bar{\theta}$ zur optischen Achse sind daher im Kern des Lichtleiters eingesperrt, sofern die Bedingung $\theta < \bar{\theta}_k$ erfüllt ist, wobei $\bar{\theta}_k = 90^\circ - \theta_k = \cos^{-1}(n_2/n_1)$ ist. Lichtleiter werden in der optischen Nachrichtentechnik eingesetzt (siehe Kapitel 9 und 24). Einige wichtige Eigenschaften werden in Übung 1-6 hergeleitet.

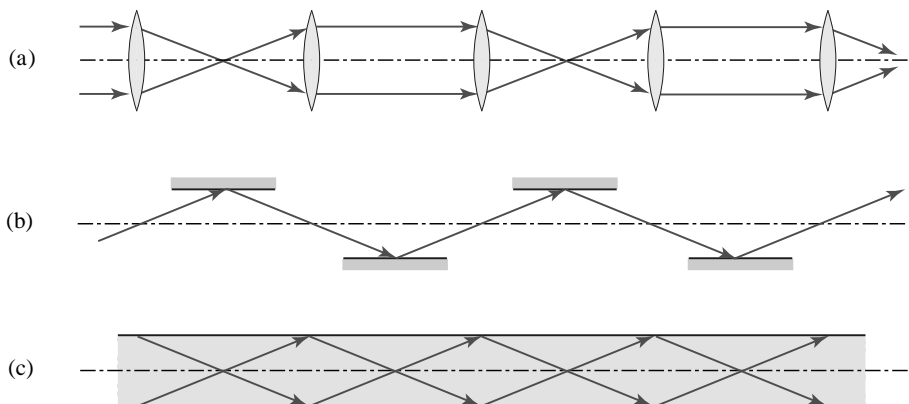


Abbildung 1.21 Lichtführung: (a) Linsen; (b) Spiegel; (c) Totalreflexion.

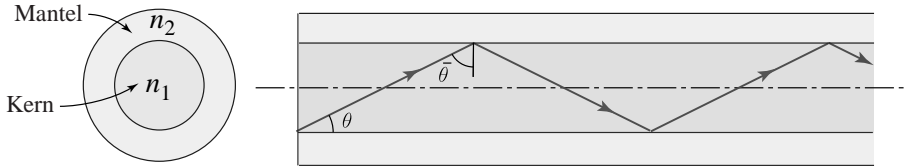


Abbildung 1.22 Ein Lichtleiter. Er leitet das Licht durch wiederholte Totalreflexion. θ ist der Winkel des Strahls zur Achse des Lichtleiters, sein Komplement $\bar{\theta} = 90^\circ - \theta$ ist der Einfallswinkel auf die dielektrische Grenzfläche.

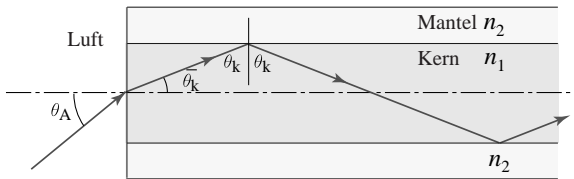


Abbildung 1.23 Akzeptanzwinkel eines Lichtleiters.

Übung 1-6: Numerische Apertur und Akzeptanzwinkel eines Lichtleiters

Ein Lichtleiter wird von einer Lichtquelle (z. B. einer Leuchtdiode, LED) bestrahlt. Die Brechungsindizes von Kern und Mantel des Leiters sind n_1 und n_2 ; der Brechungsindex der Luft ist 1 (Abb. 1.23). Zeigen Sie, dass der halbe Öffnungswinkel θ_A des Strahlkegels, den der Lichtleiter aufnehmen (d.h. ohne Brechung am Mantel weiterleiten) kann, die Beziehung

erfüllt. Der Winkel θ_A wird als **Akzeptanzwinkel** bezeichnet, und der Parameter $NA \equiv \sin \theta_A$ ist die **numerische Apertur** des Leiters. Berechnen Sie die numerische Apertur und den Akzeptanzwinkel einer Siliciumoxid/Glas-Faser mit $n_1 = 1.475$ und $n_2 = 1.460$.

$$NA = \sin \theta_A = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (1.18)$$

1.2.8.1 Eingrenzung von Licht in Medien mit großem Brechungsindex

Es ist oft schwierig, Licht aus einem Medium mit großem Brechungsindex in ein Medium mit kleinem Brechungsindex wie z. B. Luft auszukoppeln, vor allem, wenn das Medium mit großem Brechungsindex durch parallele Oberflächen begrenzt ist. In solchen Fällen erfahren manche Strahlen andauernde Totalreflexion, ohne jemals ins Freie gebrochen zu werden; das Prinzip wird in Übung 1-7 untersucht.

Übung 1-7: In einer Leuchtdiode eingegrenztes Licht

(a) Nehmen Sie an, dass in einem Parallelepiped mit dem Brechungsindex n (Abb. 1.24) Licht erzeugt wird und sich isotrop ausbreitet. Das System soll von Luft (Brechungsindex 1) umgeben sein, ähnlich wie es z. B. in Leuchtdioden der Fall ist (siehe Kapitel 17). Welchen Öffnungswinkel hat der Strahlkegel (in dem Parallelepiped), der aus den Seitenflächen austritt? Was passiert mit den restlichen Strahlen? Wie groß ist der Winkel für GaAs ($n = 3.6$)?

(b) Nehmen Sie an, dass bei isotroper Lichterzeugung die optische Leistung der Strahlung in einem gegebenen Kegel proportional zum Öffnungswinkel des Kegels ist. Zeigen Sie dann, dass das Verhältnis der aus dem Parallelepiped entnommenen zur insgesamt erzeugten optischen Leistung gleich $3(1 - \sqrt{1 - 1/n^2})$ ist, sofern $n > \sqrt{2}$ gilt. Welchen Zahlenwert hat dieses Verhältnis für GaAs?

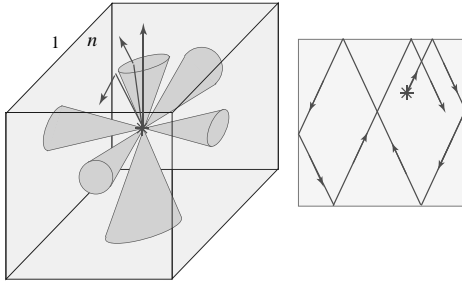


Abbildung 1.24 Einfangen von Licht in einem Parallelepiped mit großem Brechungsindex.

1.3 Gradientenindexoptik

In vielen Medien ist der Brechungsindex eine stetige Funktion $n(\mathbf{r})$ des Orts. Dies kann z. B. durch kontrolliertes Hinzufügen von Verunreinigungen (Dotierung) während der Herstellung erreicht werden. In einem solchen Medium verlaufen Lichtstrahlen nicht geradlinig, sondern entlang gekrümmter Wege. Wenn $n(\mathbf{r})$ geeignet gewählt wird, kann eine einfache Platte aus einem solchen Medium dieselbe Wirkung auf einen Lichtstrahl zeigen wie ein konventionelles optisches Element, beispielsweise ein Prisma oder eine Linse.

1.3.1

Die Strahlengleichung

Um die Wege von Lichtstrahlen in einem inhomogenen Medium mit dem Brechungsindex $n(\mathbf{r})$ zu bestimmen, verwenden wir Fermats Prinzip,

$$\delta \int_A^B n(\mathbf{r}) ds = 0, \quad (1.19)$$

wobei ds eine differentielle Wegstrecke entlang der Trajektorie des Strahls zwischen A und B ist. Wenn der Lichtweg durch die Funktionen $x(s)$, $y(s)$ und $z(s)$ beschrieben wird, wobei s die Position entlang der Trajektorie ist (Abb. 1.25), dann kann man mithilfe der Variationsrechnung zeigen¹, dass $x(s)$, $y(s)$ und $z(s)$ drei partielle Differentialgleichungen erfüllen müssen:

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial x}, \quad \frac{d}{ds} \left(n \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial y}, \quad \frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial z}. \quad (1.20)$$

Wenn wir nun den Vektor $\mathbf{r}(s)$ mit den Komponenten $x(s)$, $y(s)$ und $z(s)$ definieren, können wir Gl. (1.20) als Vektorgleichung und somit kompakter formulieren:

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n, \quad (1.21)$$

¹ Der Beweis sprengt den Rahmen dieses Buches; siehe z. B. R. Weinstock, *Calculus of Variations*, Dover, 1974.

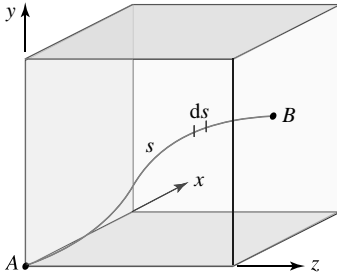


Abbildung 1.25 Die Bahn des Lichtstrahls wird parametrisch durch drei Funktionen $x(s)$, $y(s)$ und $z(s)$ oder durch zwei Funktionen $x(z)$ und $y(z)$ beschrieben.

wobei ∇n , der Gradient von n , ein Vektor mit den kartesischen Komponenten $\partial n / \partial x$, $\partial n / \partial y$ und $\partial n / \partial z$ ist. Gleichung (1.21) wird als **Strahlengleichung** bezeichnet.

Zur Lösung der Strahlengleichung kann man die Trajektorie durch zwei Funktionen $x(z)$ und $y(z)$ ausdrücken, $ds = dz \sqrt{1 + (dx/dz)^2 + (dy/dz)^2}$ schreiben und diesen Ansatz in Gl. (1.21) einsetzen, um zwei partielle Differentialgleichungen für $x(z)$ und $y(z)$ zu erhalten. Dieser Weg ist im Allgemeinen rechnerisch aufwändig; bei Verwendung der paraxialen Näherung wird er aber deutlich einfacher.

1.3.1.1 Die paraxiale Strahlengleichung

In der paraxialen Näherung verläuft der Strahl nahezu parallel zur z -Achse, sodass $ds \approx dz$ gilt (Abb. 1.26). Die Strahlengleichung (1.20) vereinfacht sich dann zu

$$\frac{d}{dz} \left(n \frac{dx}{dz} \right) \approx \frac{\partial n}{\partial x}, \quad \frac{d}{dz} \left(n \frac{dy}{dz} \right) \approx \frac{\partial n}{\partial y}. \quad (1.22)$$

Wenn die Funktion $n = n(x, y, z)$ bekannt ist, können diese beiden partiellen Differentialgleichungen gelöst werden, um den Lichtweg $x(z)$ und $y(z)$ zu berechnen.

Im Grenzfall eines homogenen Mediums, in dem n nicht von x , y und z abhängt, liefert Gl. (1.22) $d^2x/dz^2 = 0$ und $d^2y/dz^2 = 0$, woraus folgt, dass x und y lineare Funktionen von z sind, die Strahlen sich also geradlinig ausbreiten. Interessante Fälle werden wir in Kürze untersuchen.

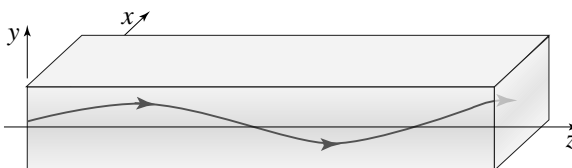


Abbildung 1.26 Der Weg eines paraxialen Strahls in einem Medium mit variablem Brechungsindex.

1.3.2

Optische Komponenten mit variablem Brechungsindex

1.3.2.1 Platte mit variablem Brechungsindex

Wir betrachten eine Platte, deren Brechungsindex $n = n(y)$ in x - und z -Richtung konstant ist, aber in y -Richtung stetig variiert (Gradientenindexplatte, Abb. 1.27). Die Trajektorien von paraxialen Strahlen in der yz -Ebene werden dann durch die paraxiale Strahlengleichung beschrieben,

$$\frac{d}{dz} \left(n \frac{dy}{dz} \right) = \frac{dn}{dy}, \tag{1.23}$$

woraus

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{1}{n(y)} \frac{dn(y)}{dy} \tag{1.24}$$

folgt. Wenn $n(y)$ bekannt und die Randbedingungen (y und dy/dz für $z = 0$) festgelegt sind, kann Gl. (1.24) gelöst und die Funktion $y(z)$ bestimmt werden, die die Trajektorien der Strahlen beschreibt.

Herleitung

Die paraxiale Strahlengleichung in einer Platte mit variablem Brechungsindex

Gleichung (1.24) kann auch direkt aus dem snelliusschen Gesetz hergeleitet werden (Abb. 1.27). $\theta(y) \approx dy/dz$ sei der Winkel des Strahls zur z -Achse am Ort (y, z) . Nach Durchtritt durch eine Schicht der Dicke Δy ändert sich der Winkel des Strahls zu $\theta(y + \Delta y)$. Diese beiden Winkel hängen über das snelliussche Gesetz zusammen, wobei θ nach der Definition aus Abb. 1.27 das Komplement des Einfallswinkels (Brechungswinkels) ist:

$$\begin{aligned} n(y) \cos \theta(y) &= n(y + \Delta y) \cos \theta(y + \Delta y) \\ &= \left[n(y) + \frac{dn}{dy} \Delta y \right] \left[\cos \theta(y) - \frac{d\theta}{dy} \Delta y \sin \theta(y) \right]. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Dabei haben wir die Entwicklung $f(y + \Delta y) = f(y) + (df/dy) \Delta y$ auf die Funktionen $f(y) = n(y)$ und $f(y) = \cos \theta(y)$ angewendet. Im Grenzfall $\Delta y \rightarrow 0$ erhalten wir durch Vernachlässigen des Terms in $(\Delta y)^2$ die Differentialgleichung

$$\frac{dn}{dy} = n \frac{d\theta}{dy} \tan \theta. \tag{1.26}$$

Für paraxiale Strahlen ist θ sehr klein, sodass $\tan \theta \approx \theta$ gilt. Wenn wir $\theta = dy/dz$ in Gl. (1.26) einsetzen, erhalten wir Gl. (1.24).

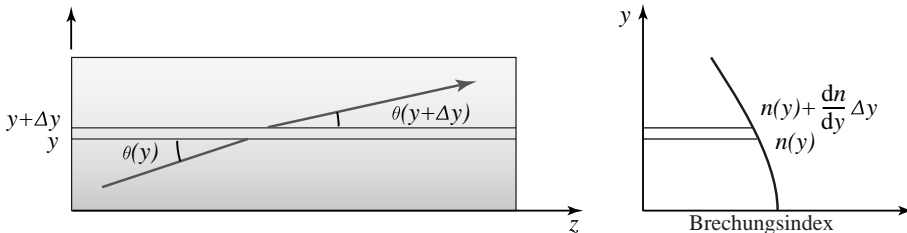


Abbildung 1.27 Brechung in einer Platte mit variablem Brechungsindex.

Beispiel 1-1: Platte mit parabolischem Indexprofil

Eine wichtige spezielle Verteilung des Brechungsindex ist

$$n^2(y) = n_0^2 (1 - \alpha^2 y^2) . \quad (1.27)$$

Diese Funktion ist symmetrisch in y und besitzt ein Maximum bei $y = 0$ (Abb. 1.28). Glasplatten mit einem derartigen Indexprofil werden unter dem Handelsnamen SELFOC vertrieben. Meist wird α so klein gewählt, dass für alle interessierenden y die Beziehung $\alpha^2 y^2 \ll 1$ erfüllt ist. Dann ist $n(y) = n_0 \sqrt{1 - \alpha^2 y^2} \approx n_0 (1 - \frac{1}{2} \alpha^2 y^2)$; d.h. $n(y)$ ist eine parabolische Verteilung. Wegen $n(y) - n_0 \ll n_0$ ist auch die relative Änderung des Brechungsindex sehr klein. Wenn wir die Ableitung von Gl. (1.27) bilden, liefert die rechte Seite von Gl. (1.24) $(1/n)dn/dy = -(n_0/n)^2 \alpha^2 y \approx -\alpha^2 y$, sodass Gl. (1.24) die Form

$$\frac{d^2 y}{dz^2} \approx -\alpha^2 y \quad (1.28)$$

annimmt. Die Lösungen dieser Gleichung sind harmonische Funktionen mit der Periode $2\pi/\alpha$. Wenn wir $y(0) = y_0$ und $dy/dz = \theta_0$ bei $z = 0$ im Inneren des Mediums ansetzen, erhalten wir

$$y(z) = y_0 \cos \alpha z + \frac{\theta_0}{\alpha} \sin \alpha z , \quad (1.29)$$

woraus sich für die Steigung des Lichtwegs

$$\theta(z) = \frac{dy}{dz} = -y_0 \alpha \sin \alpha z + \theta_0 \cos \alpha z \quad (1.30)$$

ergibt. Der Strahl oszilliert mit einer (räumlichen) Periode $2\pi/\alpha$ um das Zentrum der Platte, wie in Abb. 1.28 gezeigt. Die maximale Auslenkung des Strahls ist $y_{\max} = [y_0^2 + (\theta_0/\alpha)^2]^{1/2}$ und der maximale Winkel des Lichtwegs ist $\theta_{\max} = \alpha y_{\max}$. Diese genäherte Analyse gilt, solange $\theta_{\max} \ll 1$ ist. Wenn $2y_{\max}$ kleiner wird als die Dicke der Platte, ist der Strahl in der Platte gefangen; sie wirkt dann als Lichtleiter. Abbildung 1.29 zeigt die Lichtwege einiger Strahlen in einer SELFOC-Platte – alle Strahlen haben dieselbe Periode. Eine solche Platte mit variablem Brechungsindex kann als Linse eingesetzt werden, wie Übung 1-8 zeigt.

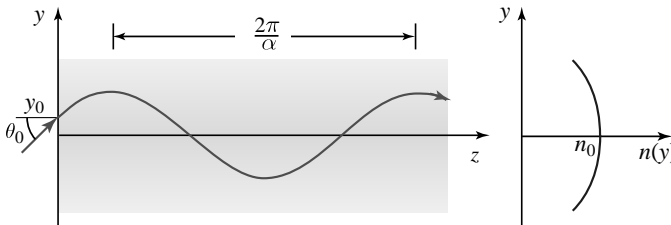


Abbildung 1.28 Lichtweg in einer Platte mit parabolischem Indexprofil (SELFOC-Platte).

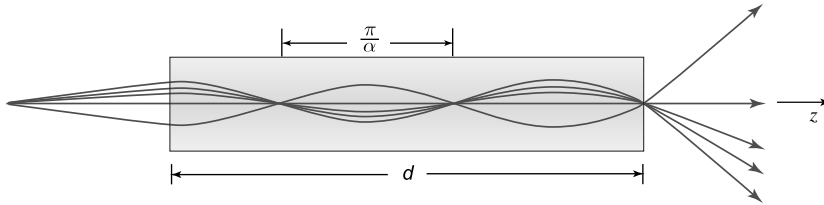


Abbildung 1.29 Lichtwege von Strahlen aus einer externen Punktlichtquelle in einer SELFOC-Platte.

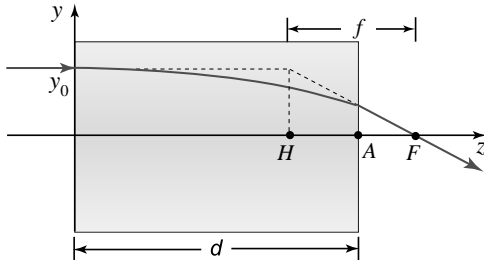


Abbildung 1.30 Eine SELFOC-Platte als Linse; F ist der Brennpunkt, H der Hauptpunkt.

Übung 1-8: Platten mit variablem Brechungsindex als Linsen

Zeigen Sie, dass eine SELFOC-Platte mit der Länge $d < \pi/2\alpha$ und einem Brechungsindex gemäß Gl. (1.27) als Zylinderlinse (sammelnd in der yz -Ebene) mit der Brennweite

$$f \approx \frac{1}{n_0 d \alpha \sin \alpha} \tag{1.31}$$

wirkt. Zeigen Sie, dass der Hauptpunkt (wie in Abb. 1.30 definiert) in einer Entfernung $AH \approx (1/n_0 \alpha) \tan(\alpha d/2)$ vom Rand der Platte liegt. Skizzieren Sie die Lichtwege von Strahlen für die Spezialfälle $d = \pi/\alpha$ und $\pi/2\alpha$.

1.3.2.2 Fasern mit variablem Brechungsindex

Eine Faser mit variablem Brechungsindex (Gradientenindexfaser) ist ein Glaszylinder mit einem Brechungsindex n , der mit dem radialen Abstand von der Achse variiert. In der paraxialen Näherung sind die Lichtwege durch die paraxiale Strahlengleichung gegeben, Gl. (1.22). Wir betrachten nun das Indexprofil

$$n^2 = n_0^2 \left[1 - \alpha^2 (x^2 + y^2) \right]. \tag{1.32}$$

Wenn wir Gl. (1.32) in Gl. (1.22) einsetzen und annehmen, dass für alle interessierenden x und y die Beziehung $\alpha^2(x^2 + y^2) \ll 1$ erfüllt ist, so erhalten wir

$$\frac{d^2x}{dz^2} \approx -\alpha^2 x, \quad \frac{d^2y}{dz^2} \approx -\alpha^2 y. \tag{1.33}$$

Sowohl x als auch y sind folglich harmonische Funktionen von z mit der Periode $2\pi/\alpha$. Die Anfangswerte (x_0, y_0) , $\theta_{x0} = dx/dz$ und $\theta_{y0} = dy/dz$ für $z = 0$ bestimmen die Amplituden und Phasen dieser harmonischen Funktionen. Wegen der Zylindersymmetrie können wir ohne Einschränkung der

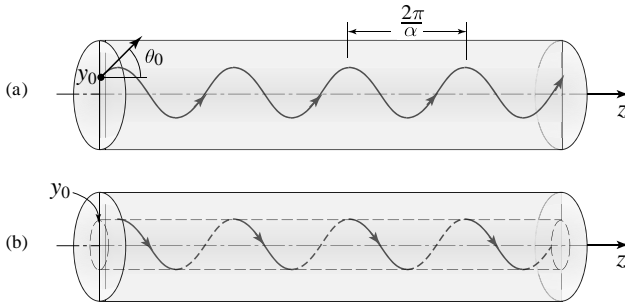


Abbildung 1.31 (a) Meridionale und (b) helikale Strahlen in einer Faser mit parabolischem Indexprofil.

Allgemeinheit $x_0 = 0$ setzen. Die Lösung von Gl. (1.33) ist dann

$$\begin{aligned}
 x(z) &= \frac{\theta_{x0}}{\alpha} \sin \alpha z \\
 y(z) &= \frac{\theta_{y0}}{\alpha} \sin \alpha z + y_0 \cos \alpha z .
 \end{aligned}
 \tag{1.34}$$

Wenn $\theta_{x0} = 0$ ist, d.h. der einfallende Strahl in einer meridionalen Ebene liegt (einer Ebene, die die Zylinderachse enthält, in diesem Fall die yz -Ebene), dann bleibt der Strahl in dieser Ebene und folgt dort einem sinusförmigen Weg ähnlich dem in einer Gradientenindexplatte [Abb. 1.31(a)].

Wenn andererseits $\theta_{y0} = 0$ und $\theta_{x0} = \alpha y_0$ ist, dann folgt

$$\begin{aligned}
 x(z) &= y_0 \sin \alpha z \\
 y(z) &= y_0 \cos \alpha z ,
 \end{aligned}
 \tag{1.35}$$

und der Strahl folgt einem helikalen (schraubenförmigen) Weg auf der Oberfläche eines Zylinders mit dem Radius y_0 [Abb. 1.31(b)]. In beiden Fällen ist der Strahl in der Faser gefangen, die somit als Lichtleiter wirkt. Für andere einfallenden Strahlen entstehen unterschiedliche helikale Lichtwege.

Gradientenindexfasern und ihre Anwendungen in der optischen Kommunikation werden in den Kapiteln 9 und 24 ausführlicher diskutiert.

Übung 1-9: Numerische Apertur eines Lichtleiters mit variablem Brechungsindex

Wir betrachten eine Gradientenindexfaser mit einem Radius a und einem Indexprofil gemäß Gl. (1.32). Ein Strahl fällt aus der umgebenden Luft zentral in die Faser ein, sodass er im Fasermedium einen Winkel θ_0 zur Faserachse einschließt (siehe Abb. 1.32). Zeigen Sie, dass die numerische Apertur der Faser in der paraxialen Näherung durch

$$NA \equiv \sin \theta_A \approx n_0 \alpha a
 \tag{1.36}$$

gegeben ist, wobei θ_A der maximale Akzeptanzwinkel ist, für den der Strahl in der Faser eingeschlossen bleibt. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem für eine Stufenindexfaser wie der in Übung 1-6 untersuchten. Verwenden Sie für die Brechungsindizes von Kern und Mantel der Stufenindexfaser $n_1 = n_0$ bzw. $n_2 = n_0 \sqrt{1 - \alpha^2 a^2} \approx n_0 (1 - \frac{1}{2} \alpha^2 a^2)$, um den Vergleich fair zu gestalten.

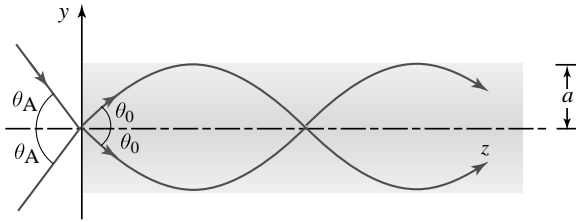


Abbildung 1.32 Akzeptanzwinkel eines Lichtleiters mit variablem Brechungsindex.

1.3.3

Die Eikonalgleichung

Die Wege der Strahlen werden oft durch Oberflächen beschrieben, zu denen sie normal verlaufen. $S(\mathbf{r})$ sei eine skalare Funktion, deren Flächen gleicher Funktionswerte ($S(\mathbf{r}) = \text{const.}$) überall normal auf den Lichtstrahlen stehen (Abb. 1.33). Wenn $S(\mathbf{r})$ bekannt ist, können daraus die Lichtwege konstruiert werden, da die Normale der Fläche gleicher Funktionswerte am Ort \mathbf{r} gerade in die Richtung des Gradienten $\nabla S(\mathbf{r})$ zeigt. Die Funktion $S(\mathbf{r})$ wird als **Eikonal** bezeichnet; sie entspricht der Potentialfunktion $V(\mathbf{r})$ in der Elektrostatik, wobei die Lichtstrahlen die Rolle der elektrischen Feldlinien übernehmen, $\mathbf{E} = -\nabla V$.

Um Fermats Prinzip (das Hauptpostulat der Strahlenoptik) zu erfüllen, muss das Eikonal $S(\mathbf{r})$ eine Differentialgleichung erfüllen, die **Eikonalgleichung**,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = n^2, \tag{1.37}$$

die meist in Vektorschreibweise angegeben wird,

$$|\nabla S|^2 = n^2, \tag{1.38}$$

wobei $|\nabla S|^2 = \nabla S \cdot \nabla S$ ist. Der Beweis der Eikonalgleichung aus Fermats Prinzip sprengt den Rahmen dieses Buches². Umgekehrt kann auch Fermats Prinzip (sowie die Strahlengleichung) aus der Eikonalgleichung hergeleitet

² Siehe z. B. M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, 7. Aufl. 2002.

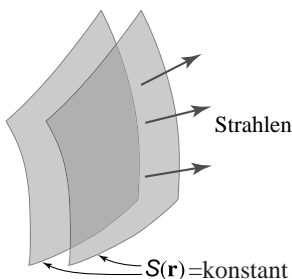


Abbildung 1.33 Die Lichtwege stehen normal auf den Flächen mit konstantem $S(\mathbf{r})$.

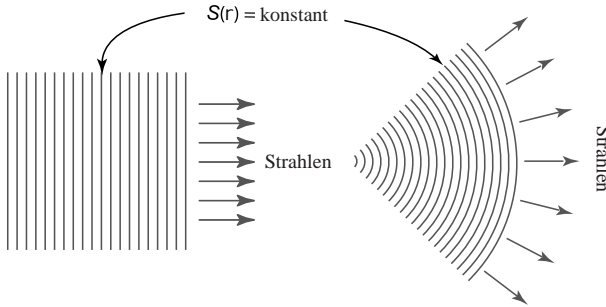


Abbildung 1.34 Strahlen und Flächen für konstantes $S(\mathbf{r})$ in einem homogenen Medium.

werden. Die Eikonalgleichung kann daher ebenso wie Fermats Prinzip als das Hauptpostulat der Strahlenoptik angesehen werden.

Die Integration der Eikonalgleichung (1.38) entlang eines Lichtwegs zwischen den Punkten A und B ergibt

$$S(\mathbf{r}_B) - S(\mathbf{r}_A) = \int_A^B |\nabla S| ds = \int_A^B n ds = \text{opt. Weglänge zw. } A \text{ und } B. \quad (1.39)$$

Mit anderen Worten, die Differenz $S(\mathbf{r}_B) - S(\mathbf{r}_A)$ ist die optische Weglänge zwischen A und B . In der Analogie zur Elektrostatik übernimmt die optische Weglänge die Rolle der Potentialdifferenz.

Um die Lichtwege in einem inhomogenen Medium mit dem Brechungsindex $n(\mathbf{r})$ zu bestimmen, können wir entweder die Strahlengleichung (1.21) – was wir bereits durchgeführt haben – oder die Eikonalgleichung lösen und dann aus $S(\mathbf{r})$ den Gradienten ∇S berechnen.

Wenn das Medium homogen ist, d.h. $n(\mathbf{r})$ konstant, ist auch der Betrag von ∇S konstant, sodass die Normalen zur Wellenfront (die Strahlen) gerade Linien sein müssen. Die Flächen $S(\mathbf{r}) = \text{const.}$ können entweder parallele Ebenen oder konzentrische Kugeloberflächen sein (Abb. 1.34).

In Abschnitt 2.3 werden wir die Eikonalgleichung nochmals untersuchen; dann im Hinblick auf die Beziehung zwischen der Strahlenoptik und der Wellenoptik.

1.4 Matrixoptik

Die Matrixoptik ist eine Methode zur Verfolgung paraxialer Strahlen. Dabei wird angenommen, dass die Strahlen sich nur in einer Ebene bewegen; die Methode ist daher auf planare Systeme oder meridionale Strahlen in zylindersymmetrischen Systemen anwendbar.

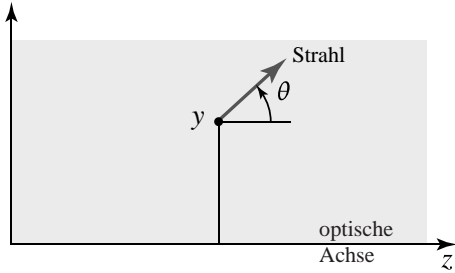


Abbildung 1.35 Ein Strahl ist durch seine Höhe (y -Koordinate) und seinen Winkel θ charakterisiert.

Ein Strahl wird durch seine Position und seinen Winkel zur optischen Achse charakterisiert; diese Parameter ändern sich während seiner Reise durch das System. In der paraxialen Näherung sind die Einfallsebene und Ausfallsebene eines optischen Systems durch zwei *lineare* algebraische Gleichungen verknüpft. Das optische System wird daher durch eine 2×2 -Matrix beschrieben, die so genannte **Strahltransfermatrix** (oder kürzer Transfermatrix).

Der Vorteil bei der Verwendung von Matrizen liegt darin, dass die Strahltransfermatrix von mehreren hintereinander geschalteten optischen Elementen (oder Systemen) das Produkt der Strahltransfermatrizen der einzelnen Elemente (Systeme) ist. Daher bietet die Matrixoptik eine formale Methode zur Beschreibung komplexer optischer Systeme in der paraxialen Näherung.

1.4.1

Die Strahltransfermatrix

Wir betrachten ein zylindersymmetrisches System aus mehreren brechenden und reflektierenden Grenzflächen, die entlang derselben Achse (optische Achse) angeordnet sind. Die optische Achse soll entlang der z -Achse liegen, die auch der ungefähren Ausbreitungsrichtung der Strahlen entspricht. Wir betrachten nur Strahlen in einer Ebene, die die optische Achse enthält, beispielsweise der yz -Ebene. Dann verfolgen wir den Strahl während seiner Ausbreitung durch das System und beobachten, wie er verschiedene Grenzflächen entlang der optischen Achse durchschreitet. Ein Strahl, der an der Position z eine transversale Fläche schneidet, ist durch die Angabe der y -Koordinate (Höhe) seines Auftreffpunkts auf die Fläche und seinen Winkel θ vollständig charakterisiert (Abb. 1.35).

Ein optisches System besteht aus einer Zahl von optischen Elementen zwischen zwei transversalen Ebenen bei z_1 und z_2 , die wir als Eingangs- und Ausgangsebene bezeichnen. Das System ist durch seine Wirkung auf einen in beliebiger Höhe y_1 und in beliebigen Winkeln θ_1 einfallenden Strahl kenn-

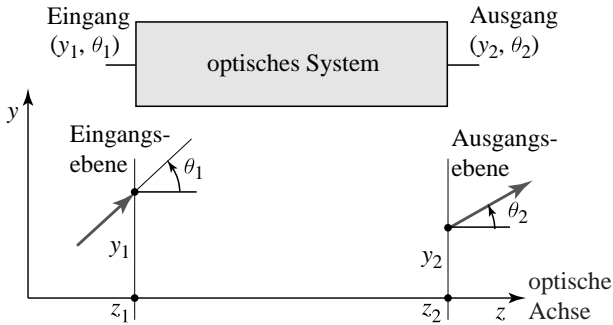


Abbildung 1.36 Ein Strahl tritt an der Stelle z_1 am Ort y_1 im Winkel θ_1 in das System ein und verlässt es an der Stelle z_2 am Ort y_2 im Winkel θ_2 .

Übung 1-10: Spezielle Fälle von Strahltransfermatrizen

Betrachten Sie die folgenden Situationen, in denen jeweils eines der vier Elemente der Strahltransfermatrix null ist: (a) Zeigen Sie, dass für $A = 0$ alle Strahlen, die unter dem gleichen Winkel in das System eintreten, in derselben Höhe austreten, d.h. dass par-

allel einfallende Strahlen am Ausgang auf einen einzigen Punkt gebündelt werden. (b) Welche besonderen Eigenschaften haben Systeme, für die $B = 0$, $C = 0$, oder $D = 0$ ist?

zeichnet. Es verändert den Strahl, sodass er auf der Ausgangsebene in der Höhe y_2 im Winkel θ_2 aus dem System austritt (Abb. 1.36).

In der paraxialen Näherung, wenn alle Winkel so klein sind, dass $\sin \theta \approx \theta$ gesetzt werden kann, ist die Beziehung zwischen (y_2, θ_2) und (y_1, θ_1) linear und kann allgemein in der Form

$$y_2 = Ay_1 + B\theta_1 \quad (1.40)$$

$$\theta_2 = Cy_1 + D\theta_1 \quad (1.41)$$

geschrieben werden, wobei A , B , C und D reelle Zahlen sind. Die Gln. (1.40) und (1.41) lauten in Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}. \quad (1.42)$$

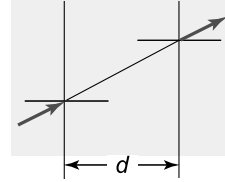
Die Matrix \mathbf{M} mit den Elementen A , B , C und D charakterisiert das optische System vollständig, da sie die Berechnung von (y_2, θ_2) für jedes beliebige (y_1, θ_1) ermöglicht. Diese Matrix wird als **Strahltransfermatrix** bezeichnet. Negative Winkel zeigen in Ausbreitungsrichtung des Strahls von der z -Achse nach unten; negative Radien bezeichnen konkave Flächen, positive Radien beschreiben konvexe Flächen.

1.4.2

Matrizen einfacher optischer Komponenten1.4.2.1 **Ausbreitung im freien Raum**

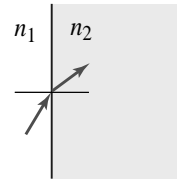
Da sich die Strahlen in einem Medium mit konstantem Brechungsindex wie z. B. dem freien Raum geradlinig ausbreiten, ist die Veränderung eines Strahls nach Durchlaufen einer Wegstrecke d durch $y_2 = y_1 + \theta_1 d$ und $\theta_2 = \theta_1$ gegeben. Die Strahltransfermatrix ist folglich

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.43)$$

1.4.2.2 **Brechung an einer ebenen Grenzfläche**

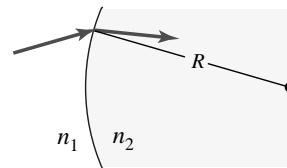
An einer ebenen Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Brechungsindizes n_1 und n_2 ist die Veränderung des Strahlwinkels durch das Snelliussche Gesetz gegeben, $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$. In der paraxialen Näherung ist $n_1 \theta_1 \approx n_2 \theta_2$. Die Höhe des Strahls verändert sich nicht, $y_2 = y_1$. Folglich ist die Strahltransfermatrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}. \quad (1.44)$$

1.4.2.3 **Brechung an einer sphärischen Grenzfläche**

Die Beziehung zwischen θ_1 und θ_2 für paraxiale Strahlen, die an einer sphärischen Grenzfläche gebrochen werden, ist in Gl. (1.11) angegeben. Die Höhe des Strahls wird nicht verändert, $y_2 \approx y_1$. Die Strahltransfermatrix ist daher

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(n_2 - n_1)}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}. \quad (1.45)$$

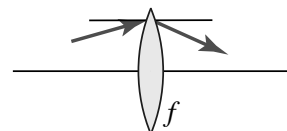


konvex: $R > 0$; konkav: $R < 0$

1.4.2.4 **Durchgang durch eine dünne Linse**

Die Beziehung zwischen θ_1 und θ_2 für paraxiale Strahlen beim Durchgang durch eine dünne Linse der Brennweite f ist in Gl. (1.14) angegeben. Da die Höhe des Strahls unverändert bleibt ($y_2 = y_1$), gilt für die Strahltransfermatrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.46)$$

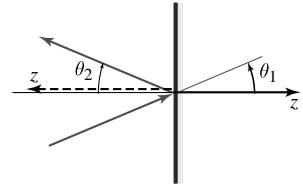


konvex: $f > 0$; konkav: $f < 0$

1.4.2.5 Reflexion an einem ebenen Spiegel

Die Position des Strahls wird bei Reflexion an einem ebenen Spiegel nicht verändert, $y_2 = y_1$. Wenn wir die übliche Konvention verwenden, die z -Achse in Ausbreitungsrichtung positiv zu zählen (also für den einfallenden Strahl in Richtung des Spiegels und für den reflektierten Strahl vom Spiegel weg), dann ist offensichtlich $\theta_2 = \theta_1$. Die Strahltransfermatrix ist daher die Einheitsmatrix

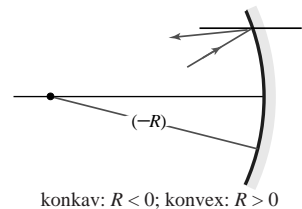
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.47)$$



1.4.2.6 Reflexion an einem sphärischen Spiegel

Mithilfe von Gl. (1.4) und der Konvention, dass die z -Achse in Ausbreitungsrichtung der Strahlen zeigt, erhalten wir analog

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.48)$$



Die Strahltransfermatrizen eines sphärischen Spiegels, Gl. (1.48), und einer dünnen Linse, Gl. (1.46), ähneln sich. Ein Spiegel mit dem Krümmungsradius R bricht Strahlen genau wie eine dünne Linse mit der Brennweite $f = -R/2$.

1.4.3

Matrizen von hintereinander geschalteten optischen Komponenten

Eine Folge von N optischen Komponenten oder Systemen mit den Strahltransfermatrizen $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_N$ ist äquivalent zu einem einzigen optischen System mit der Strahltransfermatrix

$$\longrightarrow \mathbf{M}_1 \longrightarrow \mathbf{M}_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbf{M}_N \longrightarrow \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_N \cdots \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1. \quad (1.49)$$

Die Reihenfolge der Multiplikation ist dabei entscheidend: Die Matrix des Systems, das der Strahl zuerst passiert, muss ganz rechts stehen, sodass sie als erste auf die Spaltenmatrix des einfallenden Strahls wirkt. Die Matrixmultiplikation ist im Allgemeinen nicht kommutativ (aber assoziativ).

1.4.4

Periodische optische Systeme

Unter einem periodischen optischen System versteht man eine Folge von identischen Einheiten. Ein Beispiel ist etwa die in Abb. 1.21(a) gezeigte Folge von Linsen in gleichen Abständen zur Lichtführung. Ein weiteres Beispiel ist die Reflexion von Licht zwischen zwei Spiegeln in einem optischen Re-

Übung 1-11: Parallele transparente Platten

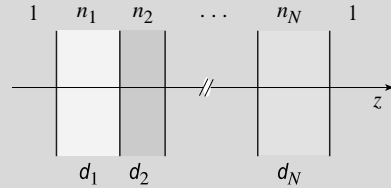
Betrachten Sie einen Satz von N parallelen ebenen transparenten Platten mit den Brechungsindizes n_1, n_2, \dots, n_N und den Dicken d_1, d_2, \dots, d_N , die in Luft ($n = 1$) senkrecht zur z -Achse liegen. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass die Strahltransfermatrix des Gesamtsystems durch

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \sum_{i=1}^N \frac{d_i}{n_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

gegeben ist.

In diesem Fall hat die Reihenfolge der Platten keinen Einfluss auf die Strahltransfermatrix des Ge-

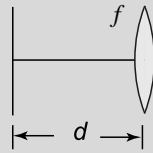
samtsystems. Wie lautet die Strahltransfermatrix einer inhomogenen transparenten Platte mit der Dicke d_0 und dem Brechungsindex $n(z)$?



Übung 1-12: Luftspalt und dünne Linse

Zeigen Sie, dass für die Strahltransfermatrix eines Luftspalts der Breite d gefolgt von einer dünnen Linse der Brennweite f gilt

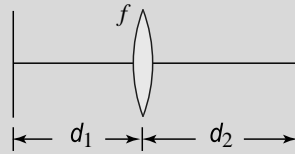
$$M = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{bmatrix}. \quad (1.51)$$



Übung 1-13: Abbildung mit einer dünnen Linse

Leiten Sie einen Ausdruck für die Strahltransfermatrix eines Systems Luft/dünne Linse/Luft her (siehe Skizze). Zeigen Sie, dass alle von einem einzelnen Punkt in der Eingangsebene ausgehenden Strahlen unabhängig von ihren Winkeln auch in der Ausgangsebene auf einem einzigen Punkt y_2 eintreffen, sofern die Abbildungsbedingung ($1/d_1 + 1/d_2 = 1/f$) erfüllt ist. Zeigen Sie weiter, dass für $d_2 = f$ alle parallel einfallenden Strahlen von der Lin-

se auf einen einzigen Punkt in der Ausgangsebene gebündelt werden.



Übung 1-14: Abbildung mit einer dicken Linse

Betrachten Sie eine Glaslinse mit dem Brechungsindex n , der Dicke d und zwei sphärischen Oberflächen mit dem Radius R (Abb. 1.37). Bestimmen Sie die Strahltransfermatrix des Systems zwischen den beiden Ebenen in den Entfernungen d_1 und d_2 von den Scheiteln der Linse. Die Linse soll sich in Luft befinden (Brechungsindex = 1). Zeigen Sie, dass das System abbildend ist (d.h. dass die Eingangs- und die Ausgangsebene konjugiert sind), sofern

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{f} \quad \text{oder} \quad s_1 s_2 = f^2 \quad (1.52)$$

gilt, wobei

$$z_1 = d_1 + h, \quad s_1 = z_1 - f \quad (1.53)$$

$$z_2 = d_2 + h, \quad s_2 = z_2 - f \quad (1.54)$$

und

$$h = \frac{(n-1)fd}{nR} \quad (1.55)$$

$$\frac{1}{f} = \frac{(n-1)}{R} \left[2 - \frac{n-1}{n} \frac{d}{R} \right] \quad (1.56)$$

ist. Die Punkte F_1 und F_2 heißen vorderer und hinterer (auch objekt- und bildseitiger) **Brennpunkt**. Die Punkte P_1 und P_2 werden als erster bzw. zweiter **Hauptpunkt** bezeichnet. Zeigen Sie die Bedeutung dieser Punkte, indem Sie die Wege von Strahlen konstruieren, die parallel zur optischen Achse einfallen.

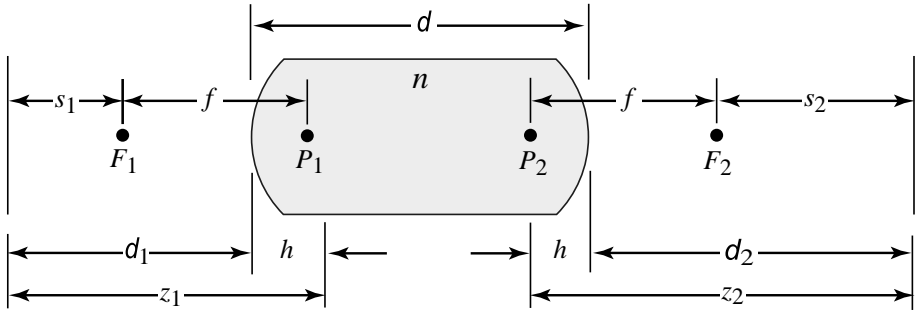


Abbildung 1.37 Abbildung mit einer dicken Linse. P_1 und P_2 sind die Hauptpunkte und F_1 und F_2 sind die Brennpunkte.

sonator (siehe Abschnitt 10.2.1); in diesem Fall durchläuft ein Strahl immer wieder dasselbe System. Selbst ein homogenes Medium wie z. B. eine Glasfaser kann als periodisches System angesehen werden, wenn man es formal in gleichlange identische Segmente unterteilt. Wir wollen im Folgenden mithilfe von Matrixmethoden eine allgemeine Theorie der Strahlausbreitung in periodischen optischen Systemen entwickeln.

1.4.4.1 Die Differenzgleichung für die Strahlposition

Ein periodisches System besteht aus einer Folge von identischen Einheiten (Abschnitten) mit der Strahltransfermatrix (A, B, C, D) , wie in Abb. 1.38 gezeigt. Ein Strahl tritt in einer Höhe y_0 in einem Winkel θ_0 in das System ein. Um die Höhe und den Winkel (y_m, θ_m) des Strahls am Ausgang des m ten Abschnitts zu bestimmen, wenden wir die Matrix $ABCD$ m mal an,

$$\begin{bmatrix} y_m \\ \theta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^m \begin{bmatrix} y_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix}. \quad (1.57)$$

Genauso können wir die Beziehungen

$$y_{m+1} = Ay_m + B\theta_m \quad (1.58)$$

$$\theta_{m+1} = Cy_m + D\theta_m \quad (1.59)$$

iterativ anwenden, um (y_1, θ_1) aus (y_0, θ_0) , (y_2, θ_2) aus (y_1, θ_1) usw. zu bestimmen, am einfachsten mithilfe einer geeigneten Software.

Es wird sich als nützlich erweisen, Gleichungen herzuleiten, die die Dynamik der Höhe y_m , $m = 0, 1, \dots$, unabhängig von den Winkeln θ_m beschreiben.

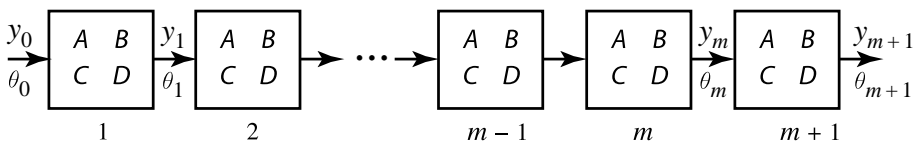


Abbildung 1.38 Eine Folge von identischen optischen Systemen.

Das können wir erreichen, indem wir θ_m aus den Gln. (1.58) und (1.59) eliminieren. Aus Gl. (1.58) erhalten wir

$$\theta_m = \frac{y_{m+1} - Ay_m}{B}. \quad (1.60)$$

Nun ersetzen wir in Gl. (1.60) m durch $m + 1$ und finden

$$\theta_{m+1} = \frac{y_{m+2} - Ay_{m+1}}{B}. \quad (1.61)$$

Durch Einsetzen der Gln. (1.60) und (1.61) in Gl. (1.59) bekommen wir

$$y_{m+2} = 2by_{m+1} - F^2y_m, \quad (1.62)$$

wobei

$$b = \frac{A + D}{2}, \quad (1.63)$$

$$F^2 = AD - BC = \det[\mathbf{M}] \quad (1.64)$$

ist und $\det[\mathbf{M}]$ die Determinante von \mathbf{M} bedeutet.

Gleichung (1.62) ist eine lineare Differenzgleichung für die Strahlhöhe y_m . Sie kann iterativ gelöst werden, indem man y_2 aus y_0 und y_1 berechnet, danach y_3 aus y_1 und y_2 und so weiter. Die Größe y_1 kann mithilfe von Gl. (1.58) mit $m = 0$ aus y_0 und θ_0 berechnet werden.

Es ist jedoch hilfreich, durch Lösung der Differenzgleichung (1.62) einen expliziten Ausdruck für y_m anzugeben. Genau wie bei Differentialgleichungen ist auch bei Differenzgleichungen eine Lösung eindeutig, wenn sie die Differenzgleichung löst und die Anfangsbedingungen erfüllt. Wir können daher einen sinnvollen Ansatz für die Lösung von Gl. (1.62) wählen. Wir verwenden eine Probefunktion der geometrischen Form

$$y_m = y_0 h^m \quad (1.65)$$

mit einer Konstante h . Einsetzen von Gl. (1.65) in Gl. (1.62) zeigt sofort, dass die Probefunktion geeignet ist, sofern h die quadratische algebraische Gleichung

$$h^2 - 2bh + F^2 = 0 \quad (1.66)$$

erfüllt, woraus

$$h = b \pm i \sqrt{F^2 - b^2} \quad (1.67)$$

folgt.

Wir können das Ergebnis in einer kompakteren Form angeben, indem wir die Variable

$$\varphi = \cos^{-1}(b/F) \quad (1.68)$$

definieren, sodass $b = F \cos \varphi$, $\sqrt{F^2 - b^2} = F \sin \varphi$ und daher $h = F(\cos \varphi \pm i \sin \varphi) = F \exp(\pm i \varphi)$ ist. Damit wird Gl. (1.65) zu $y_m = y_0 F^m \exp(\pm i m \varphi)$.

Eine allgemeine Lösung erhalten wir aus den beiden Lösungen mit positivem und negativem Vorzeichen, indem wir eine passende Linearkombination bilden. Die Summe der beiden Exponentialfunktionen kann als harmonische

(Kreis-) Funktion geschrieben werden, also

$$y_m = y_{\max} F^m \sin(m\varphi + \varphi_0), \quad (1.69)$$

wobei y_{\max} und φ_0 Konstanten sind, die aus den Anfangsbedingungen y_0 und y_1 bestimmt werden müssen. Für $m = 0$ erhalten wir insbesondere $y_{\max} = y_0 / \sin \varphi_0$.

Der Parameter F hängt mit der Determinante der Strahltransfermatrix der einzelnen Einheiten durch $F = \sqrt{\det[\mathbf{M}]}$ zusammen. Man kann zeigen, das unabhängig von der Art der einzelnen Einheiten $\det[\mathbf{M}] = n_1/n_2$ gilt, wobei n_1 und n_2 die Brechungsindizes am Beginn und am Ende der Einheit sind. Dieses allgemeine Ergebnis kann für die Strahltransfermatrizen aller in diesem Abschnitt diskutierten optischen Komponenten verifiziert werden. Da die Determinante des Produkts zweier Matrizen gleich dem Produkt ihrer Determinanten ist, muss die Beziehung $\det[\mathbf{M}] = n_1/n_2$ für jede beliebige Folge dieser optischen Komponenten gelten. Wenn zum Beispiel $\det[\mathbf{M}_1] = n_1/n_2$ und $\det[\mathbf{M}_2] = n_2/n_3$ ist, dann folgt sofort $\det[\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1] = (n_2/n_3)(n_1/n_2) = n_1/n_3$. In den meisten Anwendungen bestehen Anfang und Ende der Einheiten einfach aus Luft ($n = 1$) und es gilt $n_1 = n_2$, sodass $\det[\mathbf{M}] = 1$ und $F = 1$ ist. In diesem Fall ist die Lösung für die Strahlhöhe

$$y_m = y_{\max} \sin(m\varphi + \varphi_0). \quad (1.70)$$

Wir werden im Folgenden $F = 1$ annehmen. Die entsprechende Lösung für den Strahlwinkel erhalten wir mithilfe der Beziehung $\theta_m = (y_{m+1} - Ay_m)/B$, die aus Gl. (1.58) folgt.

1.4.4.2 Bedingungen für einen harmonischen Strahlverlauf

Damit y_m eine harmonische (anstatt hyperbolische) Funktion ist, muss $\varphi = \cos^{-1} b$ reell sein. Dazu muss

$$|b| \leq 1 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}|A + D| \leq 1 \quad (1.71)$$

gelten. Wenn stattdessen $|b| > 1$ ist, ist φ imaginär und wir erhalten eine hyperbolische Funktion (cosh oder sinh) als Lösung, die unbegrenzt ansteigt wie in Abb. 1.39(a). Eine harmonische Lösung stellt sicher, dass y_m für alle Werte von m beschränkt ist und einen Maximalwert y_{\max} besitzt. Die Schranke $|b| \leq 1$ liefert daher eine **Stabilitätsbedingung** für den Strahlweg.

Da sowohl y_m als auch y_{m+1} harmonische Funktionen sind, gilt dies auch für den Strahlwinkel gemäß Gl. (1.70), wie aus Gl. (1.60) und trigonometrischen Identitäten folgt. Folglich ist $\theta_m = \theta_{\max} \sin(m\varphi + \varphi_1)$, wobei die Konstanten θ_{\max} und φ_1 aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen sind. Der maximale Winkel θ_{\max} muss hinreichend klein sein, damit die paraxiale Näherung, die unserer Analyse zugrunde liegt, anwendbar ist.

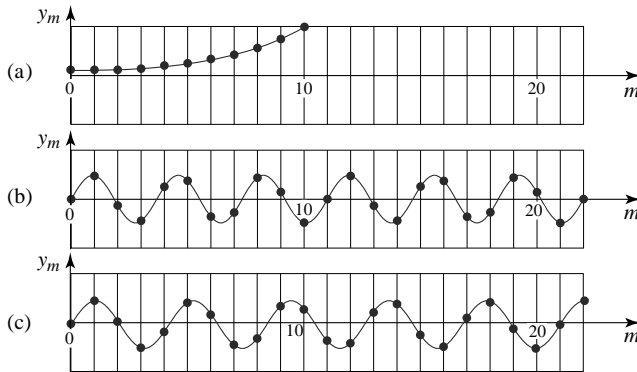


Abbildung 1.39 Beispiele für Strahlverläufe in optischen Systemen: (a) instabile Bahn ($b > 1$); (b) stabile periodische Bahn ($\varphi = 6\pi/11$; Periode 11 Abschnitte); (c) stabile nichtperiodische Bahn ($\varphi = 1.5$).

1.4.4.3 Bedingungen für einen periodischen Strahlverlauf

Die harmonische Funktion (1.70) ist periodisch in m , sofern eine ganze Zahl s existiert, sodass $y_{m+s} = y_m$ für alle m . Die kleinste solche ganze Zahl ist die Periode. In diesem Fall kehrt der Strahl nach s Abschnitten auf seine eigene Bahn zurück. Die Bedingung ist erfüllt, wenn $s\varphi = 2\pi q$ ist, wobei q eine ganze Zahl ist. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für eine periodische Bahn ist somit, dass $\varphi/2\pi$ eine rationale Zahl q/s sein muss. Wenn z. B. $\varphi = 6\pi/11$ ist, ist $\varphi/2\pi = \frac{3}{11}$ und die Bahn ist periodisch mit einer Periode von $s = 11$ Abschnitten. Dieser Fall ist in Abb. 1.39(b) dargestellt. In Kapitel 7 beschäftigen wir uns ausführlicher mit periodischen optischen Systemen.

Beispiel 1-2: Eine Folge von äquidistanten identischen Linsen

Eine Folge von identischen Linsen der Brennweite f im Abstand d (Abb. 1.40) kann zur Führung von Licht zwischen zwei Orten dienen. Die Grundeinheit, ein freier Raum der Länge d gefolgt von einer Linse, besitzt eine Strahltransfermatrix gemäß Gl. (1.51); $A = 1$, $B = d$, $C = -1/f$, $D = 1 - d/f$. Für den Parameter b gilt $b = \frac{1}{2}(A + D) = 1 - d/2f$, und die Determinante ist 1. Die Stabilitätsbedingung für den Strahlverlauf, $|b| \leq 1$ oder $-1 \leq b \leq 1$, lautet daher

$$0 \leq d \leq 4f; \quad (1.72)$$

der Abstand zwischen den Linsen muss also kleiner sein als die vierfache Brennweite. Unter dieser Bedingung folgen paraxiale Strahlen der harmonischen Funktion

$$y_m = y_{\max} \sin(m\varphi + \varphi_0), \quad \varphi = \cos^{-1} \left(1 - \frac{d}{2f} \right). \quad (1.73)$$

Für $d = 2f$ ist $\varphi = \pi/2$ und $\varphi/2\pi = \frac{1}{4}$, und der Verlauf eines beliebigen Strahls ist periodisch mit einer Periode von vier Abschnitten. Für $d = f$ ist $\varphi = \pi/3$ und $\varphi/2\pi = \frac{1}{6}$, und der Verlauf des Strahls ist periodisch mit einer Periode von sechs Abschnitten. Diese Fälle sind in Abb. 1.41 dargestellt.

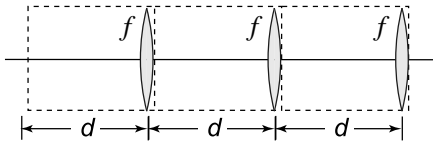


Abbildung 1.40 Eine periodische Folge von Linsen.

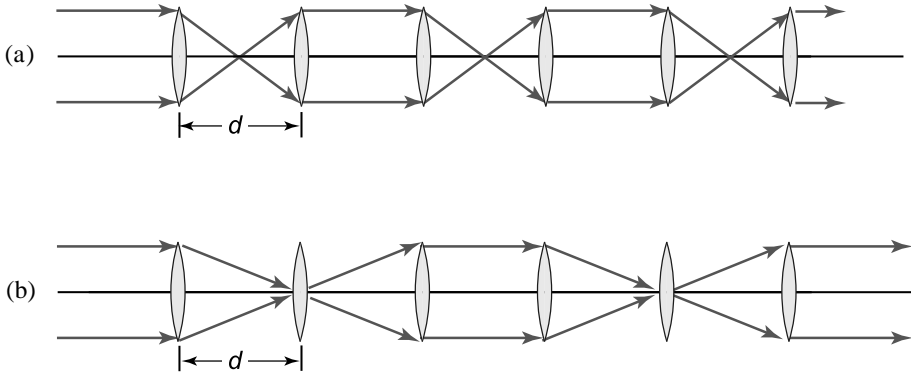


Abbildung 1.41 Beispiele für stabile Strahlverläufe in einem periodischen System aus Linsen: (a) $d = 2f$; (b) $d = f$.

Zusammenfassung

Ein paraxialer Strahl ($\theta_{\max} \ll 1$), der eine Folge von identischen Systemen mit einer Strahltransfermatrix (A, B, C, D) mit $AD - BC = 1$ passiert, folgt einer harmonischen (und folglich beschränkten) Bahn, wenn die Stabilitätsbedingung $|\frac{1}{2}(A + D)| \leq 1$ erfüllt ist. Seine Position nach dem m ten Abschnitt ist dann $y_m = y_{\max} \sin(m\varphi + \varphi_0)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, wobei $\varphi = \cos^{-1}[\frac{1}{2}(A + D)]$ ist. Die Konstanten y_{\max} und φ_0 sind durch die Anfangsbedingungen y_0 und $y_1 = Ay_0 + B\theta_0$ bestimmt, wenn θ_0 der Anfangswinkel des Strahls ist. Die Winkel des Strahls hängen gemäß $\theta_m = (y_{m+1} - Ay_m)/B$ mit der Strahlhöhe zusammen und werden durch eine harmonische Funktion $\theta_m = \theta_{\max} \sin(m\varphi + \varphi_1)$ beschrieben. Der Strahlverlauf ist periodisch mit einer Periode s , wenn $\varphi/2\pi$ eine rationale Zahl q/s ist.

Übung 1-15: Eine periodische Folge von Paaren unterschiedlicher Linsen

Betrachten Sie den Verlauf von paraxialen Strahlen durch ein periodisches System, das aus einer Folge von Linsenpaaren mit den alternierend angeordneten Brennweiten f_1 und f_2 besteht (Abb. 1.42). Zeigen Sie, dass der Strahlverlauf beschränkt (stabil) ist,

wenn

$$0 \leq \left(1 - \frac{d}{2f_1}\right) \left(1 - \frac{d}{2f_2}\right) \leq 1 \quad (1.74)$$

gilt.

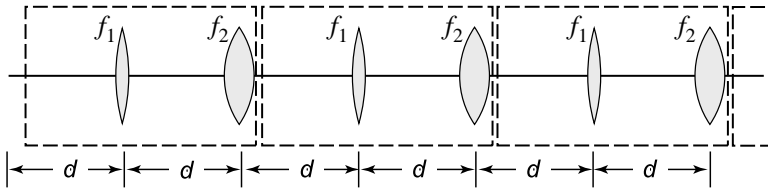


Abbildung 1.42 Eine periodische Folge von Linsenpaaren.

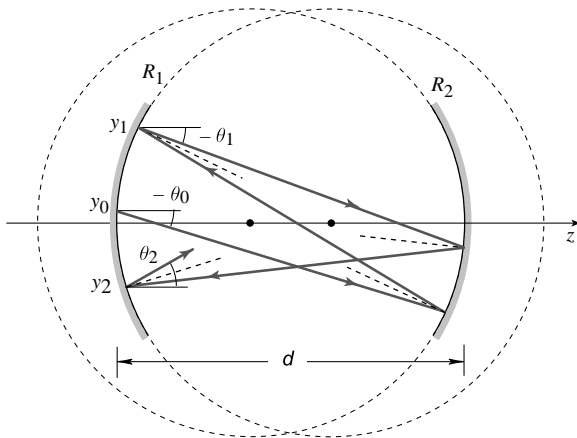


Abbildung 1.43 Ein optischer Resonator als periodisches optisches System.

Übung 1-16: Ein optischer Resonator

Paraxiale Strahlen werden wiederholt zwischen zwei sphärischen Spiegeln mit den Radien R_1 und R_2 reflektiert, die in einem Abstand d voneinander stehen (Abb. 1.43). Betrachten Sie diese Anordnung als periodisches System, dessen Grundeinheit

eine einzelne Runde des Strahls zwischen den Spiegeln ist. Bestimmen Sie die Stabilitätsbedingung für den Strahlverlauf. Mit optischen Resonatoren werden wir uns in Kapitel 10 genauer befassen.

Aufgaben

1-1 Fermats Prinzip für maximale Laufzeit. Betrachten Sie den elliptischen Spiegel aus Abb. 1.44(a), dessen Brennpunkte mit A und B bezeichnet sind. Aus geometrischen Gründen ist die Länge der Strecke \overline{APB} identisch zu $\overline{AP'B}$ und $\overline{AP''B}$ für benachbarte Punkte P' und P'' auf der Ellipse. (a) Betrachten Sie nun einen anderen Spiegel mit einem kleineren Krümmungsradius als der elliptische Spiegel, der wie in Abb. 1.44(b) gezeigt an einem Punkt P tangential an diesem anliegt. Zeigen Sie, dass die Strecke \overline{APB} , die der Lichtstrahl auf seinem Weg von A nach B zurücklegt, jetzt ein Weg *maximaler* Zeit ist, d.h., die benötigte Zeit ist größer als für die benachbarten Wege $\overline{AQ'B}$ und $\overline{AQ''B}$. (b) Betrachten Sie schließlich einen Spiegel, der die Ellipse schneidet, aber in P tangential an ihr liegt wie in Abb. 1.44(c) gezeigt. Zeigen Sie, dass die möglichen Strahlwege $\overline{AQ'B}$, \overline{APB} und $\overline{AQ''B}$ einem Wendepunkt der Zeit bei Variation von P entsprechen.

1-2 Durchgang durch ebene Platten. (a) Verwenden Sie das Snelliussche Gesetz um zu zeigen, dass ein Strahl, der durch eine ebene Platte mit der Dicke d und dem Brechungsindex n_1 (in Luft, $n \approx 1$) hindurchtritt, parallel zur Einfallrichtung

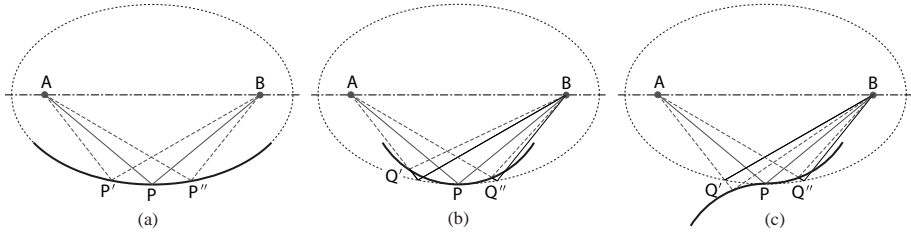


Abbildung 1.44 (a) Reflexion an einem elliptischen Spiegel. (b) Reflexion an einem einbeschriebenen tangentialen Spiegel mit größerer Krümmung. (c) Reflexion an einem tangentialen Spiegel, dessen Krümmung von konkav zu konvex wechselt.

wieder austritt. Der Strahl muss dabei nicht paraxial sein. Leiten Sie einen Ausdruck für die seitliche Versetzung des Strahls als Funktion des Einfallswinkels θ her. Erklären Sie ihr Ergebnis mithilfe von Fermats Prinzip. (b) Zeigen Sie, dass auch wenn die Platte durch einen Stapel von N parallelen Schichten mit den Dicken d_1, d_2, \dots, d_N und den Brechungsindizes n_1, n_2, \dots, n_N ersetzt wird, der austretende Strahl wieder parallel zum einfallenden Strahl ist. Zeigen Sie weiter, dass wenn θ_m der Winkel des Strahls in der m ten Schicht ist, $n_m \sin \theta_m = \sin \theta$ gilt ($m = 1, 2, \dots$).

1-3 Linse in Wasser. Bestimmen Sie die Brennweite f einer bikonvexen Linse mit den Radien 20 cm und 30 cm und dem Brechungsindex $n = 1.5$. Wie groß ist die Brennweite der Linse in Wasser ($n = \frac{4}{3}$)?

1-4 Numerische Apertur einer nicht ummantelten Faser. Bestimmen Sie die numerische Apertur und den Akzeptanzwinkel eines Lichtleiters mit einem Brechungsindex des Kerns von $n_1 = 1.46$, dessen Mantel entfernt (bzw. durch Luft ersetzt, $n_2 \approx 1$) wurde.

1-5 Kopplung von Lichtleitern. Um Licht in Lichtleiter ein- oder aus ihnen auszukoppeln, werden oft winzige Glaskugeln als Linsen verwendet. Das Ende der Faser liegt dabei in einem Abstand f von der Kugel. Bestimmen Sie f für eine Kugel mit dem Radius $a = 1$ mm und dem Brechungsindex $n = 1.8$, sodass ein zur optischen Achse paralleler Strahl in einem radialen Abstand von $y = 0.7$ mm auf die Faser gebündelt wird, wie in Abb. 1.45 dargestellt.

1-6 Auskoppeln von Licht aus einem Medium mit großem Brechungsindex. Nehmen Sie an, dass Licht in einem Parallelepiped mit dem Brechungsindex $n = 3.7$ erzeugt wird und sich isotrop ausbreitet (siehe Übung 1-7). Das Material soll von Luft ($n = 1$) umgeben sein. (a) Welcher Anteil des erzeugten Lichts kann

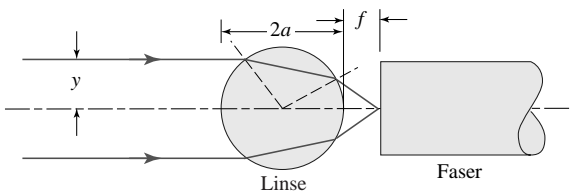
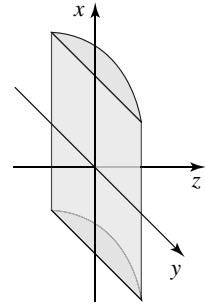


Abbildung 1.45 Bündelung von Licht in einen Lichtleiter mithilfe einer Glaskugel.

aus der Stirnseite des Parallelepipedes ausgekoppelt werden, wenn alle Seiten bis auf die Stirnseite mit einem reflektierenden Material beschichtet werden, das als idealer Spiegel wirkt? (b) Vergrößert sich der Anteil des ausgekoppelten Lichts, wenn die Frontseite mit einem transparenten Material mit dem Brechungsindex $n = 1.4$ beschichtet wird?

- 1-7 Platte mit axial variablem Brechungsindex.** Eine Platte der Dicke d liegt senkrecht zur z -Achse. Ihr Brechungsindex $n(z)$ ist in z -Richtung variabel. Zeigen Sie, dass ein unter einem Winkel θ_0 in der yz -Ebene aus Luft in die Platte einfallender Strahl an der Position z in der Platte einen Winkel $\theta(z)$ besitzt, der die Beziehung $n(z) \sin \theta(z) = \sin \theta_0$ erfüllt. Zeigen Sie weiter, dass der Strahl parallel zum einfallenden Strahl austritt. *Hinweis:* Verwenden Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 1-2. Zeigen Sie, dass die Strahlhöhe $y(z)$ in der Platte die Differentialgleichung $(dy/dz)^2 = (n^2/\sin^2 \theta - 1)^{-1}$ erfüllt.
- 1-8 Strahlverläufe in Fasern mit variablem Brechungsindex.** Betrachten Sie eine Faser mit radial variablem Brechungsindex $n(\rho)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ um die z -Achse. (ρ, ϕ, z) sei der Ortsvektor in Zylinderkoordinaten. Formulieren Sie die paraxiale Strahlengleichung (1.22) in Zylinderkoordinaten und geben Sie Differentialgleichungen für ρ und ϕ als Funktionen von z an.
- 1-9 Die Strahltransfermatrix eines Linsensystems.** Bestimmen Sie die Strahltransfermatrix eines optischen Systems aus einer dünnen Konkavlinse der Brennweite f und einer dünnen Konkavlinse der Brennweite $-f$ in einem Abstand f . Diskutieren Sie die Abbildungseigenschaften dieser zusammengesetzten Linse.
- 1-10 Die Strahltransfermatrix einer SELFOC-Platte.** Bestimmen Sie die Strahltransfermatrix einer SELFOC-Platte [d.h. einem Material mit parabolischem Indexprofil, $n(y) \approx n_0(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 y^2)$] der Dicke d .
- 1-11 Eine SELFOC-Platte als periodisches System.** Betrachten Sie den Verlauf paraxialer Strahlen in einer SELFOC-Platte senkrecht zur z -Achse. Sie können dieses System als periodisches System aus identischen miteinander verbundenen Platten der Dicke d betrachten. Verwenden Sie das Ergebnis von Aufgabe 1-10 und geben Sie die Stabilitätsbedingung für den Strahlverlauf an. Hängt die Bedingung von d ab?
- 1-12 Rekursionsbeziehung für einen Resonator aus ebenen Spiegeln.** Betrachten Sie einen optischen Resonator aus ebenen Spiegeln im Abstand d als periodisches optisches System. Geben Sie die Strahltransfermatrix für die Grundeinheit dieses Systems an und zeigen Sie, dass $b = 1$ und $F = 1$ ist. Zeigen Sie, dass die quadratische Gleichung (1.66) in diesem Fall nur eine einzige Wurzel besitzt, sodass die Höhe des Strahls dann der Beziehung $\alpha + m\beta$ mit Konstanten α und β folgt.
- 1-13 4×4 -Strahltransfermatrix für schief verlaufende Strahlen.** Matrixmethoden lassen sich verallgemeinern, um auch schief zur optischen Achse verlaufende paraxiale Strahlen in zylindersymmetrischen oder astigmatischen (nicht zylindersymmetrischen) Systemen beschreiben zu können. Ein Strahl, der die Ebene $z = 0$ schneidet, wird allgemein durch vier Variablen beschrieben: die Koordinaten (x, y) seiner Lage in der Ebene und die Winkel (θ_x, θ_y) seiner Projektionen in die xz - und yz -Ebenen zur z -Achse. Auch der austretende Strahl ist durch vier Variablen charakterisiert, die linear mit den ursprünglichen Variablen verknüpft sind. In der paraxialen Näherung kann das System daher vollständig durch eine 4×4 -Matrix beschrieben werden.

(a) Geben Sie die 4×4 -Strahltransfermatrix einer Strecke d im freien Raum an. (b) Bestimmen Sie die 4×4 -Strahltransfermatrix einer dünnen Zylinderlinse mit der Brennweite f , die entlang der y -Achse liegt. Die Zylinderlinse hat eine Brennweite f für Strahlen in der yz -Ebene, besitzt aber keine Brechkraft für Strahlen in der xz -Ebene.



Weiterführende Literatur

Allgemeines

- 1 F. L. Pedrotti, L. M. Pedrotti, L. S. Pedrotti, *Introduction to Optics*, Prentice Hall, 3. Aufl. 2006.
- 2 K. K. Sharma, *Optics: Principles and Applications*, Academic Press 2006.
- 3 A. Walther, *The Ray and Wave Theorie of Lenses*, Cambridge University Press 1995, Paperback 2006.
- 4 K. D. Moeller, *Optics: Learning by Computing with Examples Using Maple, Mathematica, and MATLAB*, Springer, 2. Aufl. 2006.
- 5 T.-C. Poon, T. Kim, *Engineering Optics with MATLAB*, World Scientific 2006.
- 6 A. Siciliano, *Optics: Problems and Solutions*, World Scientific 2006.
- 7 G. Chartier, *Introduction to Optics*, Springer 2005.
- 8 J. Strong, *Concepts of Classical Optics*, Freeman 1958; Dover, Paperback 2004.
- 9 G. Brooker, *Modern Classical Optics*, Oxford University Press 2003.
- 10 M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, 7. Aufl. 2002.
- 11 E. Hecht, *Optik*, Oldenbourg, 4. Aufl. 2005.
- 12 M. Mansuripur, *Classical Optics and Its Applications*, Cambridge University Press 2002.
- 13 M. P. Keating *Geometric, Physical, and Visual Optics*, Butterworth-Heinemann, 2. Aufl. 2002.
- 14 M. Young, *Optics and Lasers Including Fibers and Optical Waveguides*, Springer 1977, 5. Aufl. 2000.
- 15 J. R. Meyer-Arendt, *Introduction to Classical and Modern Optics*, Prentice Hall 1972, 4. Aufl. 1995.
- 16 J. W. Blaker, W. M. Rosenblum, *Optics — An Introduction for Students of Engineering*, Macmillan 1993.
- 17 D. T. Moore (Hrsg.), *Selected Papers on Gradient-Index Optics*, SPIE Optical Engineering Press (Milestone Series Band 67) 1993.
- 18 F. A. Jenkins, H. E. White, *Fundamentals of Optics*, McGraw-Hill 1937, 4. Aufl. 1991.
- 19 P. P. Banerjee and T.-C. Poon, *Principles of Applied Optics*, Aksen Associates 1991.
- 20 R. D. Guenther, *Modern Optics*, Wiley 1990.
- 21 E. Hecht and A. Zajac, *Optics*, Addison-Wesley 1974, 2. Aufl. 1990.
- 22 W. T. Welford, *Optics*, Oxford University Press 1976, 3. Aufl. 1988.
- 23 R. W. Wood, *Physical Optics*, Macmillan, 3. Aufl. 1934; Optical Society of America 1988.
- 24 M. V. Klein, T. E. Furtak, *Optics*, Wiley 1982, 2. Aufl. 1986.
- 25 E. W. Marchand, *Gradient-Index Optics*, Academic Press 1978.
- 26 F. P. Carlson, *Introduction to Applied Optics for Engineers*, Academic Press 1977.
- 27 R. W. Ditchburn, *Light*, Academic Press, 3. Aufl. 1976.
- 28 E. Hecht, *Schaum's Outline of Optics*, McGraw-Hill, Paperback 1974.
- 29 B. B. Rossi, *Optics*, Addison-Wesley 1957, Nachdruck 1965.

- 30 J. M. Stone, *Radiation and Optics*, McGraw-Hill 1963.
- 31 A. Sommerfeld, *Lectures on Theoretical Physics: Optics*, Academic Press, Paperback 1954.

Geometrische Optik

- 32 Yu. A. Kravtsov, *Geometrical Optics in Engineering Physics*, Alpha Science 2005.
- 33 J. E. Greivenkamp, *Field Guide to Geometrical Optics*, SPIE Optical Engineering Press 2004.
- 34 K. B. Wolf, *Geometric Optics on Phase Space*, Springer 2004.
- 35 M. Katz, *Introduction to Geometrical Optics*, World Scientific 2002.
- 36 R. Dittion, *Modern Geometrical Optics*, Wiley 1998.
- 37 F. Colombini, N. Lerner (Hrsg.), *Geometrical Optics and Related Topics*, Birkhäuser 1997.
- 38 P. Mouroulis, J. Macdonald, *Geometrical Optics and Optical Design*, Oxford University Press 1997.
- 39 D. S. Loshin, *The Geometrical Optics Workbook*, Butterworth-Heinemann 1991.
- 40 G. A. Fry, *Geometrical Optics*, Chilton 1969, Nachdruck 1981.
- 41 W. T. Welford, R. Winston, *The Optics of Nonimaging Concentrators*, Academic Press 1978.
- 42 O. N. Stavroudis, *The Optics of Rays, Wavefronts, and Caustics*, Academic Press 1972.
- 43 H.-G. Zimmer, *Geometrical Optics*, Springer 1970.
- 44 A. Nussbaum, *Geometric Optics: An Introduction*, Addison-Wesley 1968.
- 45 R. K. Luneburg, M. Herzberger, *Mathematical Theory of Optics*, University of California Press 1964, Nachdruck 1966.

Optische Systeme

- 46 H. Gross (Hrsg.), *Handbook of Optical Systems*, Wiley-VCH 2005.
- 47 D. Malacara, Z. Malacara, *Handbook of Optical Design*, Marcel Dekker 1994, 2. Aufl. 2004.
- 48 R. E. Fischer, B. Tadic-Galeb, *Optical System Design*, McGraw-Hill 2000.

- 49 W. J. Smith, *Modern Optical Engineering: The Design of Optical Systems*, McGraw-Hill 1966, 3. Aufl. 2000.
- 50 D. C. O'Shea, *Elements of Modern Optical Design*, Wiley 1985.
- 51 R. Kingslake, *Optical System Design*, Academic Press 1983.
- 52 L. Levi, *Applied Optics: A Guide to Optical System Design*, Wiley, Bd. 1 1968; Bd. 2 1980.

Matrixoptik

- 53 A. Gerrard, J. M. Burch, *Introduction to Matrix Methods in Optics*, Wiley 1975; Dover, Paperback 1994.
- 54 J. W. Blaker, *Geometric Optics: The Matrix Theory*, Marcel Dekker 1971.
- 55 W. Brouwer, *Matrix Methods in Optical Instrument Design*, Benjamin 1964.

Populäre und historische Darstellungen

- 56 R. J. Weiss, *A Brief History of Light and Those that Lit the Way*, World Scientific 1996.
- 57 A. R. Hall, *All was Light: An Introduction to Newton's Opticks*, Clarendon Press/Oxford University Press 1993.
- 58 R. Kingslake, *A History of the Photographic Lens*, Academic Press 1989.
- 59 M. I. Sobel, *Light*, University of Chicago Press 1987.
- 60 A. I. Sabra, *Theories of Light from Descartes to Newton*, Cambridge University Press 1981.
- 61 I. Newton, *Opticks or a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections & Colours of Light*, 4. Aufl. 1704; Dover, Nachdruck 1979.
- 62 A. C. S. van Heel, C. H. F. Velze, *What is Light?*, McGraw-Hill 1968, Nachdruck 1978.
- 63 V. Ronchi, *The Nature of Light: An Historical Survey*, Harvard University Press 1970.
- 64 S. Tolansky, *Revolution in Optics*, Penguin 1968.
- 65 S. Tolansky, *Curiosities of Light Rays and Light Waves*, Elsevier 1965.
- 66 W. H. Bragg, *Universe of Light*, Dover, Paperback 1959.
- 67 E. Rüdhardt, *Light, Visible and Invisible*, University of Michigan Press 1958.