Vorwort

In diesem dritten und letzten Band unseres mathematischen Grundkurses für Studierende der Physik stehen partielle Differentialgleichungen im Vordergrund. Konkret gesprochen, behandeln wir in den ersten drei Kapiteln die drei Prototypen von partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, also die Potentialgleichung, die Wärmeleitungsgleichung und die Wellengleichung mit der Methode der Fundamentallösungen und der GREENschen Funktion. Nach einer Einführung in das LEBESGUE-Integral (Kap. 28) behandeln wir dann Orthogonalreihen und insbesondere klassische FOURIERreihen (Kap. 29) und verwenden solche Reihenentwicklungen dann in Kap. 30, um einige einfache Randwert- und Anfangswertprobleme exemplarisch zu lösen. Dies ergibt eine natürliche Hinführung auf die singulären STURM-LIOUVILLE-Probleme, die die gängigsten „speziellen Funktionen der mathematischen Physik“ definieren (Kap. 31). In den beiden letzten Kapiteln werden LAPLACE- und FOURIER-Transformation vorgestellt, und ihre Anwendbarkeit auf Rand- und Anfangswertaufgaben wird demonstriert.

Die Kapitel 28 und 31, bei denen es sich vorwiegend um Ergebnisberichte handelt, verdienen einen etwas gesonderten Kommentar:

(i) Wir haben mit der im ersten Band entwickelten klassischen Integrationstheorie aus dem 19. Jahrhundert so lange gearbeitet, wie es ohne größere Reibungsverluste möglich war. Bei der Darstellung von Resultaten über Orthogonalreihen oder Integraltransformationen jedoch führt die Beschränkung auf diese Integrationstheorie notgedrungen zu holprigen und unbefriedigenden Formulierungen, die sich nur dadurch vermeiden lassen, dass man den Anspruch auf mathematische Präzision aufgibt. Es war aber von vornherein unser Ziel, die Studierenden bei der Präsentation mathematischer Sachverhalte niemals auf schwankenden Boden zu führen, und so erschien es angebracht, der Behandlung von Techniken aus dem Bereich der harmonischen Analyse eine kurze Einführung in die LEBESGUEsche Integrationstheorie voranzustellen. Auch dass weder die HILBERTräume der Quantenmechanik noch die Distributionstheorie ohne das Lebesgue-Integral wirklich verstanden werden können, ist ein starkes Argument dafür, sich schon während des Grundstudiums an die Handhabung dieses kraftvollen Werkzeugs zu gewöhnen. Dabei sollte jedoch unter allen Umständen eine Überfrachtung mit theoretischem Ballast ohne physikalische Relevanz vermieden werden, und deshalb beschränken wir uns auf einen Ergebnisbericht, der den instrumentellen Aspekt der Integrationstheorie in den Vordergrund stellt und nur hier und da durch ein paar sehr einfache Beweisschritte belebt wird. In den Ergänzungen sind für die besonders interessierten Leserinnen und Leser einige Standardbeweise nachgetragen, doch der Basistext ist von theoretischen Hilfskonstrukten (wie Treppenfunktionen etc.) völlig frei gehalten.

(ii) Ein Kurs wie dieser kommt nicht ohne ein Kapitel über die „speziellen Funktionen der mathematischen Physik" aus. Doch ist ihre Bedeutung in den letzten Jahrzehnten sicherlich eher geschrumpft als gewachsen, und es erhebt sich die Frage, mit welcher Ausführlichkeit man sich dieser Thematik widmen sollte und was aus dem ungeheuren Vorrat an Detailinformationen dabei herausgegriffen werden sollte. Unsere Kompromisslösung besteht darin, dass wir in Kap. 31 eine relativ große Menge an Einzelinformationen in Form eines Ergebnisberichts zusammenstellen, der teilweise wie eine Formelsammlung wirkt, nur ab und zu von illustrierenden Beweisen unterbrochen, und der von zwei eher systematischen Abschnitten flankiert wird. Hierbei handelt es sich um den Versuch, mit Hilfe von Sturm-Liouville-Problemen ein ordnendes Prinzip für die Eigenschaften der verschiedenen speziellen Funktionen zu finden, und um die Anwendung der beschriebenen Eigenschaften auf die Rand- und Anfangswertprobleme, mit denen die Beschäftigung mit speziellen Funktionen ursprünglich motiviert worden war. Additionstheoreme und die damit verbundene Interpretation gewisser spezieller Funktionen als Matrixelemente von Darstellungen von klassischen Gruppen wurden jedoch völlig ignoriert, und dieses Thema soll in unserem geplanten Aufbaukurs [22] aufgegriffen werden.

Das Gebiet der partiellen Differentialgleichungen bietet eine solche Fülle von Ausbaumöglichkeiten, sowohl in die Breite wie in die Tiefe, dass es gilt, unkontrolliertes Wuchern des Stoffumfangs einzudämmen und sich wirklich auf das zu beschränken, was jeder Studierende der Physik während des Grundstudiums bzw. im Rahmen eines Bachelor-Studiengangs erarbeiten sollte. Demgemäß bleiben z. B. distributionstheoretische oder operatortheoretische Aspekte völlig ausgespart, doch werden diese wiederum in dem geplanten Aufbaukurs [22] Platz finden.

Demselben Prinzip folgend, erscheinen auch die beiden anderen großen Themen dieses Bandes – Reihenentwicklungen nach orthogonalen Funktionensystemen einerseits und Integraltransformationen andererseits – in erster Linie unter dem Aspekt von Werkzeugen für die Behandlung von Randwert- oder Anfangswertaufgaben für partielle Differentialgleichungen, und nur in den Ergänzungen wird hier und da spürbar, dass sie ein mathematisches Eigenleben besitzen. Überhaupt schafft das schon aus den ersten beiden Bänden bekannte Verfahren, den Stoff in einen Basistext und optionale Ergänzungen einzuteilen, für mathematisch besonders interessierte und begabte Leserinnen und Leser die Möglichkeit, immer wieder über den Tellerrand des Grundstudiums hinauszublicken und sich zu weitergehender vertiefender Beschäftigung mit der Thematik anregen zu lassen. Doch haben wir auch hier darauf geachtet, dass wir uns nicht zu weit vom elementaren Niveau des Grundstudiums entfernen.

Mainz,
Dezember 2007

Karl-Heinz Goldhorn
Hans-Peter Heinz