

---

# Kapitel 1

## Der Grenzschicht-Begriff

---

### 1.1 Die Atmosphärische Grenzschicht, der unterste Teil der Troposphäre

Bei der vertikalen Gliederung der Atmosphäre unterscheidet man (von unten nach oben) die Troposphäre, die Stratosphäre, die Mesosphäre, die Thermosphäre und die Exosphäre (AE 10.1). Als Kriterium für die genaue Einteilung und die Grenzen der einzelnen Sphären, das sind die Tropopause, die Stratopause, die Mesopause und die Thermopause, wird der Temperaturverlauf mit der Höhe benutzt. So ist die Troposphäre dadurch charakterisiert, dass die Lufttemperatur von der Erdoberfläche bis in die Tropopausen-Höhe von 11 km linear um  $0,65\text{ °C}/100\text{ m}$  abnimmt, wobei diese Daten die mittlere Struktur kennzeichnen (AE 10.1.2). An dem Merkmal des Temperaturverlaufs hängen viele besondere Eigenschaften jeder dieser Schichten.

Höchst bedeutsam bei dieser Vertikalgliederung ist der Umstand, dass die Erdoberfläche eine feste (Landoberflächen, Eis) oder flüssige (Ozeane, Seen) Grenzfläche der gasförmigen Atmosphäre bildet, einen unteren Rand. Dieser besitzt nicht nur die Eigenschaft, dass die Luftbewegung dort gebremst wird und direkt am Rand gleich Null wird. Der Übergang vom atmosphärischen Gas zu den die Oberfläche bildenden festen oder flüssigen Stoffen und der damit verbundene Sprung bei den physikalischen und chemischen Materialeigenschaften macht diesen Rand zu einer Energie- und Stoffumsatzfläche, zu einem Gebiet von Quellen und Senken von Energie und Stoffen. Von hier aus wird z. B. die Luft erwärmt oder abgekühlt, ihr Wasserdampf zugeführt oder entzogen. Das Verschwinden der Windstärke – das ist ja spezifischer Impuls – am Rand bedeutet, dass dieser als Impulssenke wirkt.

Vom Rand aus nimmt die Windstärke nach oben zu, bis sie den Wert der von der Oberfläche freien Strömung erreicht. Die vom Boden ausgehende täg-

liche Erwärmung oder Abkühlung erfasst auch nur eine begrenzt dicke Schicht, sagen wir einmal – um überhaupt eine Zahl im Kopf zu haben – von 1 km. Diese Schicht ist der unterste Teil der Troposphäre, man nennt sie die Atmosphärische Grenzschicht.

Wegen der Vielzahl der dynamischen und thermischen Erscheinungen, die sich aus den Eigenschaften des unteren Randes und den Wechselwirkungsprozessen mit der darüber liegenden Atmosphäre ergeben, hat sich im Gesamtgebiet der Meteorologie ein eigenes Teilgebiet (AE 3) entwickelt, die Grenzschicht-Meteorologie. Nach oben koppelt die Grenzschicht an die Freie Atmosphäre an und ist so die Wechselwirkungsschicht zwischen Freier Atmosphäre und Erdoberfläche. Sie liegt in dem Teil unseres Planeten, in dem das irdische Leben konzentriert ist; hier leben die Menschen, hier finden sich Vegetation und Fauna der Landoberflächen. Damit besitzen die Prozesse in der Atmosphärischen Grenzschicht einen großen Stellenwert in der Betrachtung unserer Umwelt.

Wir definieren in dieser ersten Betrachtung *die Atmosphärische Grenzschicht als den unteren Teil der Troposphäre, in der der Einfluss ihres unteren Randes, der Erdoberfläche, direkt wahrnehmbar ist*. Nach oben schließt sich die Freie Atmosphäre an, wir betrachten sie als frei von unmittelbaren Einflüssen der Untergrenze. Der Randeinfluss ist direkt wahrnehmbar, wenn sich z. B. eine bodennahe Nebelschicht als Folge der Abkühlung der Erdoberfläche bildet oder wenn vom Boden aufgewirbelter Staub eine Lufttrübung bis zu einer oft scharfen Obergrenze an einer abgehobenen Inversion verursacht. Vor allem stellen sich wegen des Randes für jede Situation charakteristische Vertikalprofile von Windgeschwindigkeit, Lufttemperatur und Luftfeuchte ein.

Wichtig ist nun, dass diese Profile bzw. die so vorhandenen vertikalen Gradienten von Windstärke, Lufttemperatur und Luftfeuchte mit vertikalen Flüssen oder Flussdichten der entsprechenden Eigenschaften Impuls, fühlbare Wärme und latente Wärme des Wasserdampfes verbunden sind. Dies sind in der Atmosphärischen Grenzschicht nahezu immer turbulente Flüsse. Sie gehen vom Boden aus oder enden dort und verschwinden an der Obergrenze der Grenzschicht. Man kann sie als die eigentlichen Träger der Wechselwirkung zwischen der Freien Atmosphäre und der Erdoberfläche betrachten. Vertikale turbulente Flussdichten von Impuls, fühlbarer Wärme und latenter Wärme des Wasserdampfes spielen so in der Grenzschicht-Meteorologie eine zentrale Rolle (s. dazu auch Abschn. 1.4).

## 1.2 Der Grenzschicht-Begriff in der allgemeinen Strömungslehre

Der Grenzschicht-Begriff stammt aus der Technischen Strömungslehre (Technische Hydrodynamik). Er spielt dort bei der Umströmung oder Durchströmung von festen Körpern (z. B. bei der Überströmung von Tragflügeln oder der Rohrdurchströmung) und bei der Wärme- und Stoffübertragung zwischen einem strömenden Fluid (Flüssigkeit oder Gas) und einer festen Wand (z. B. über einer parallel angeströmten ebenen Platte oder in einem Rohr) eine zentrale Rolle. Der Leser sei hier auf die Lehrbücher zur Strömungslehre verwiesen, z. B. auf Eckert (1959), Schlichting (1965), Gröber et al. (1981), Prandtl et al. (1984) oder Baehr und Stephan (2004). Der Grenzschicht-Begriff wurde von Ludwig Prandtl 1904 eingeführt. Wir wollen ihn hier über einige experimentelle Befunde erläutern. Die Gedanken und Formulierungen von L. Prandtl (1904) werden weiter unten vorgestellt.

- a Bei der Strömung eines Fluids (Gas oder Flüssigkeit) über eine feste Oberfläche unter dem Einfluss eines senkrecht zur Wand konstanten Druckgradienten stellt sich unmittelbar über der Begrenzung (Wand, Rand, Bodenoberfläche) ein Strömungsprofil ein, wie es Bild 1.1 zeigt. Darin ist  $u$  die Strömungs- oder Geschwindigkeitskomponente parallel zu der als eben angenommenen Oberfläche und  $z$  die Höhe über dem Rand. Der experimentelle Befund ist folgender:

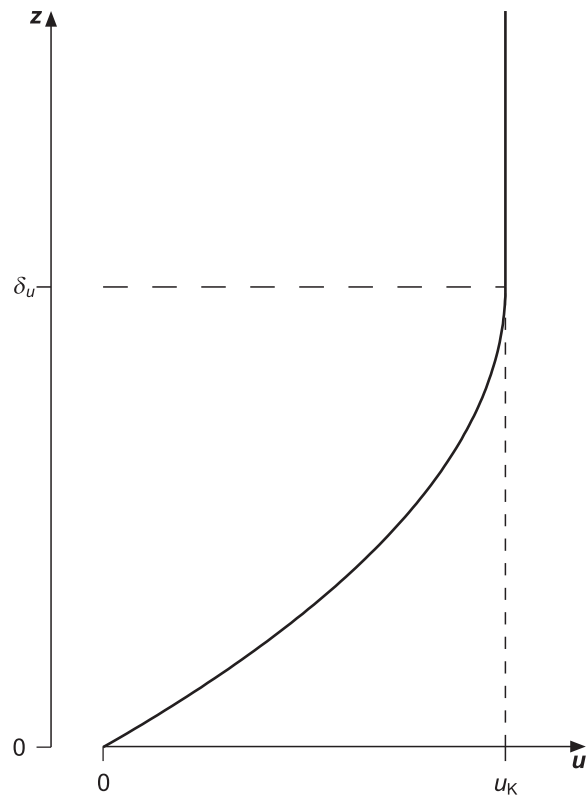


Bild 1.1. Schema einer Strömungsgrenzschicht

*Die Geschwindigkeit in der Nähe der Wand wächst innerhalb einer dünnen Schicht der Dicke  $\delta_u$  vom Wert 0 an der Wand auf den Wert der durch die Wand ungestörten Strömung  $u_K$  an.*

Man bezeichnet  $u_K$  auch als Kernströmung. Die Schicht zwischen  $z = 0$  und  $z = \delta_u$  nennt man Strömungs-Grenzschicht,  $\delta_u$  Dicke der Strömungs-Grenzschicht. Das Profil ist charakterisiert durch die

Randbedingungen

$$u = 0 \quad \text{in } z = 0,$$

man spricht von einer no-slip Bedingung, die Strömung haftet an der Wand, und

$$u = u_K \quad \text{in } z \geq \delta_u,$$

also an der Obergrenze und oberhalb der Grenzschicht.

- b Bei der Strömung eines homogenen Fluids über eine Grenzfläche einer anderen Temperatur  $T$  (z. B. eine Heizplatte) stellt sich unmittelbar über der Grenzfläche ein Temperaturprofil ein, wie es Bild 1.2 zeigt:

Die Temperatur in der Nähe der Wand ändert sich innerhalb einer dünnen Schicht der Dicke  $\delta_T$  vom Wert  $T_0$  an der Wand auf den Wert der durch die Wand ungestörten Temperatur  $T_K$ .

$T_K$  ist die einheitliche Temperatur des homogenen Fluids, unbeeinflusst von der wärmeren Oberfläche. Die Schicht zwischen  $z = 0$  und  $z = \delta_T$  nennt man Temperatur-Grenzschicht,

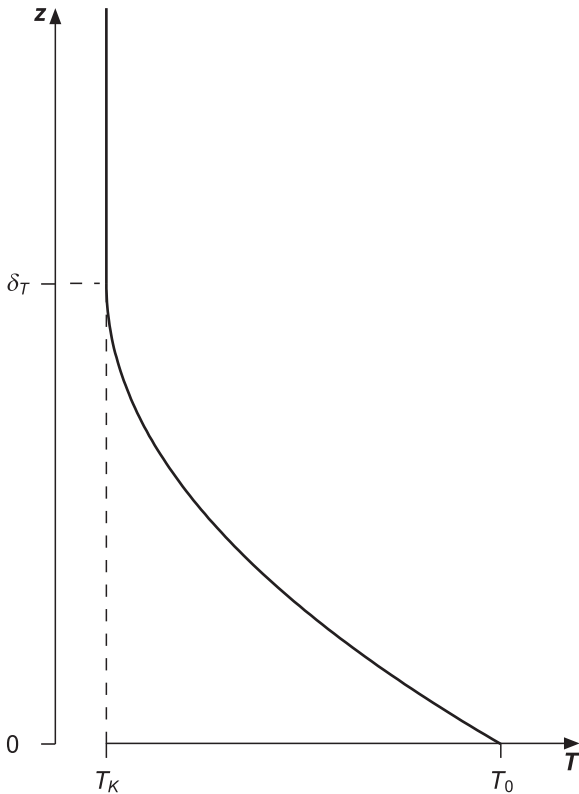


Bild 1.2. Schema einer Temperaturgrenzschicht mit  $T_0 > T_K$

$\delta_T$  Dicke der Temperatur-Grenzschicht. Im Allgemeinen ist  $\delta_T \neq \delta_u$ . Das Profil ist charakterisiert durch die

Randbedingungen

$$T = T_0 \text{ in } z = 0 \text{ und}$$

$$T = T_K \text{ in } z \geq \delta_T$$

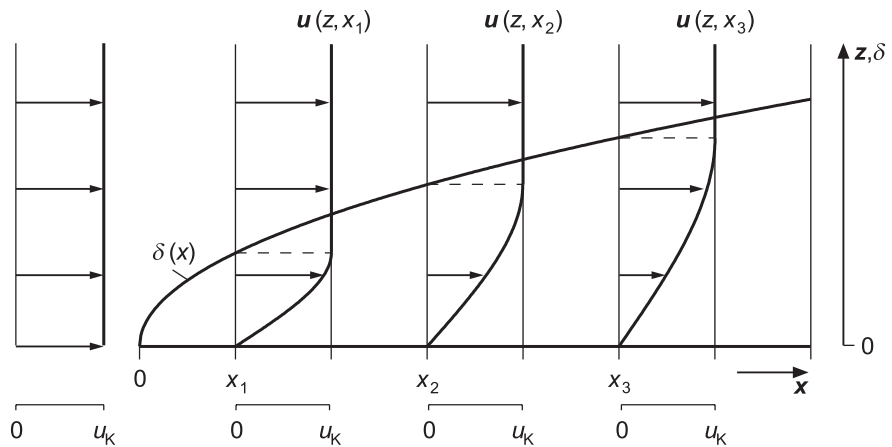
also an der Obergrenze und oberhalb der Grenzschicht.

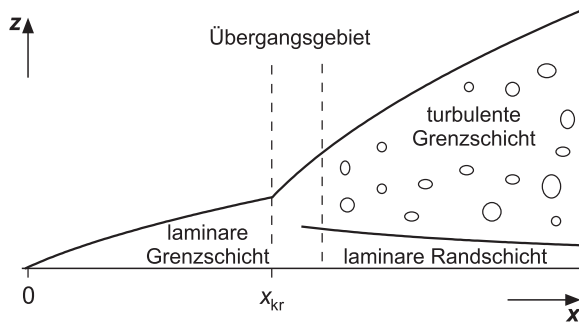
Genauso lassen sich auch Grenzschichten der Luftfeuchtigkeit und von spezifischen Luftbeimengungen definieren. In jedem Falle sind derartige Grenzschichten durch die oberflächennormalen (vertikalen) Gradienten der betrachteten Eigenschaften (hier  $u, T$ , Feuchte, Luftbeimengungen) und die damit verbundenen Flussdichten gekennzeichnet.

- c Der hier zu erwähnende Befund bringt horizontale Gradienten dieser Eigenschaften ins Spiel. Bei einer parallel angeströmten ebenen Platte wächst die Grenzschichtdicke von  $\delta = 0$  am Plattenanfang in Strömungsrichtung ständig an, s. Bild 1.3. Es gelten die Randbedingungen von Fall a), jedoch hängt nun, auch bei einem homogenen Wert der Kernströmung  $u_K$ , die Grenzschicht-Strömung  $u$  nicht allein von  $z$ , sondern auch von  $x$  ab; es gilt also  $u = u(x, z)$  in  $0 < z < \delta_u(x)$ . Gleichermäßen wachsen auch die Temperatur- und Feuchtegrenzschichten mit  $x$  an.
- d Übergang zur Turbulenz. Man unterscheidet zwei grundsätzlich unterschiedliche Arten der Strömung (type of flow), die laminare und die turbulente. Bei ersterer bewegen sich die Flüssigkeitsteilchen geordnet und ohne Vermischung auf parallel zueinander verlaufenden Stromlinien. Bei der anderen gibt es Unordnung durch

Bild 1.3.

Entwicklung der Dicke der Strömungsgrenzschicht über einer parallel angeströmten ebenen Platte in Strömungsrichtung  $x$ . Die Strömungsprofile  $u(z)$  bei festen Werten von  $x$  ( $x_1, x_2, x_3$ ) und vor der Platte sind durch dick ausgezogene Funktionsverläufe und durch Windpfeile dargestellt, die Grenzschichtdicke durch die dick ausgezogene Kurve  $\delta(x)$





**Bild 1.4.** Schema des Übergangs von einer laminaren zu einer turbulenten Grenzschicht bei der parallel angeströmten ebenen Platte. Die in Richtung  $x$  angeströmte Platte beginnt bei  $x = 0$ . Die Stelle  $x_{kr}$  bezeichnet man als Umschlagspunkt. Unter der turbulenten Grenzschicht bleibt eine laminare Randschicht erhalten

Zusatzbewegungen in alle Richtungen (turbulente Bewegungen sind immer dreidimensional), woraus auch eine intensive Vermischung resultiert. Dieser Unterschied beeinflusst bei Überschreiten gewisser kritischer Werte das Bild der parallel angeströmten ebenen Platte, wie wir es unter c) und Bild 1.3 behandelt haben. Bei zunächst laminarer Strömung kann bei größerem  $x$  ein Umschlag in eine turbulente Grenzschichtströmung erfolgen, wie es in Bild 1.4 gezeigt wird. Die Lage des Umschlagspunktes  $x_{kr}$  hängt von verschiedenen Faktoren ab, so von der mit  $x$  gebildeten Reynoldsschen Kennzahl  $Re_x = u_K x_{kr} / \nu$  ( $\nu$  = kinematische Zähigkeit des Fluids, Näheres s. Abschn. 1.3, 1.5 und 1.6), der Rauigkeit der Platte und davon, wie viel Strömungsunruhe bereits in der Anströmung bei  $x = 0$  vorhanden ist. Unter der sich für  $x > x_{kr}$  bildenden turbulenten Grenzschicht bleibt noch eine laminare Randschicht erhalten.

In Bild 1.4 und der dazu gehörenden Erläuterung wurde ein sehr wichtiger Begriff eingeführt, die Turbulenz. Wir definieren ihn hier vorläufig, ehe wir ihn in Kap. 2 ausführlicher behandeln:

*Turbulenz innerhalb eines als Kontinuum (AE 6.1) betrachteten Fluids ist die Bewegung von viel kleinerer Längenskala  $L_{turb}$  als die der charakteristischen Länge  $L$  des behandelten Problems.*

Bewegungsformen der Skala  $L_{turb}$  können z. B. kleine, in die Gesamtströmung eingelager-

te Wirbel sein. Bei der Skala  $L$  kann es sich um die Länge der angeströmten Platte oder den Durchmesser einer umströmten Kugel handeln. Die Brownsche Molekularbewegung besitzt eine noch viel kleinere Längenskala als  $L_{turb}$ . Diese liegt weit unterhalb der Skalen, die in der Kontinuums-Hydrodynamik vorkommen. Um die Turbulenz bzw. den Charakter einer turbulenten Strömung anzudeuten, sind kleine Wirbel oder kleine willkürliche unregelmäßige Bewegungen in Bild 1.4 eingezeichnet. Sie sind der skaligen Bewegung (diese orientiert sich an  $L$ ) überlagert und werden als subskalig bezeichnet (AE 6.4). Das Wort *turbulent* kommt aus dem Lateinischen und heißt so viel wie stürmisch, ungestüm, lärmend. Man kann die kleinskaligen turbulenten Zusatzbewegungen analog zum Lärm in akustischen und elektromagnetischen Spektren betrachten. Eine Strömung ohne derartige Zusatzbewegungen nennt man laminar (*lat. lamina* = Blatt, Schicht). Formal beschreibt man die turbulente Bewegung einer Flüssigkeit dadurch, dass man eine ihren Zustand beschreibende Größe in einen skaligen und einen subskaligen Anteil zerlegt, also z. B. die aktuelle Geschwindigkeitskomponente  $u$  in ihren zeitlich gemittelten Anteil  $\bar{u}$  und die Zusatzbewegung  $u'$ , so dass  $u = \bar{u} + u'$  gilt. Bei der laminaren Strömung ist  $u = \bar{u}$ . Näheres dazu folgt in Abschn. 2.1. Bilder, auf denen laminare und turbulente Strömungen sichtbar gemacht sind, findet man in vielen Veröffentlichungen und z. B. auch in dem „Album on fluid motion“ von Van Dyke (1982).

### 1.3 Anwendung der Bewegungsgleichung

Wir wenden nun die Bewegungsgleichung (AE 17) auf die Strömungsgrenzschicht einer *parallel angeströmten ebenen Platte* an. Als Haushaltsgleichung für den Impuls ermöglicht sie ein tieferes Verständnis der ablaufenden Vorgänge. In der Vorstellung von Bild 1.3 nehmen wir an, dass es keine Änderungen senkrecht zur Zeichenebene gibt. In diese Richtung weist die  $y$ -Achse, es gilt also  $\partial/\partial y = 0$ . Zudem sei die Strömung stationär; mit der Zeitkoordinate  $t$  heißt das  $\partial/\partial t = 0$ . Da das Fluid in  $x$ -Richtung strömt, interessiert hier das Gesetz für den  $x$ -Impuls  $u$ ; das ist mit den genannten Vorausset-

zungen, der vertikalen Strömungskomponente  $w$ , dem Druck  $p$ , der Dichte  $\rho$  und der kinematischen Zähigkeit  $\nu$

$$0 = -\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.1)$$

Bei  $\partial u / \partial t = 0$  (linke Seite) verschwindet die rechts stehende Summe aus Advektion, Druckgradientkraft und Reibungskraft. Für letztere wurde ein Ansatz entsprechend AE 17.2C gewählt. Neben der  $u$ -Komponente des Strömungsvektors tritt auch die Vertikalkomponente  $w$  auf. Es gilt ferner die Kontinuitätsgleichung (AE 16.1)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

Der Druckgradient  $\partial p / \partial x$  wird als höhenkonstant (die Höhe ist  $z$ ) angenommen, damit das  $u$ -Profil, also  $\partial u / \partial z$ , allein vom Randeffect abhängt. Wird der Druckgradient vorgegeben, so enthalten die beiden Gleichungen nur zwei unabhängige Variablen,  $u$  und  $w$ . Man erhält sie durch die Lösung des Systems der beiden Differentialgleichungen. Der nichtlineare Charakter der Advektionsterme verhindert aber eine analytische Lösung, so bleibt nur der Weg über ein numerisches Verfahren. Auch der Reibungsterm bereitet Probleme.

Bei dieser Überlegung setzt nun der Gedankengang von Ludwig Prandtl in seiner Arbeit aus dem Jahre 1904 ein, in der er den Grenzschicht-Begriff einführte. Wegen der unangenehmen Eigenschaften der Differentialgleichung zerlegt er die Behandlung eines wandnahen Strömungsvorganges, in der die eng miteinander verknüpften Prozesse der Advektion und der Reibung eine Rolle spielen, in zwei Teile: einerseits die „freie Flüssigkeit“, die als reibungsfrei und vielfach auch als advektionsfrei behandelt werden kann, und andererseits die „Übergangsschichten an den festen Grenzen“. Er schreibt außerdem:

Den physikalischen Vorgängen in der *Grenzschicht* zwischen Flüssigkeit und festem Körper wird man in genügender Weise gerecht, wenn man annimmt, daß die Flüssigkeit an den Wänden haften, daß also dort die Geschwindigkeit überall gleich Null bzw. gleich der Körpergeschwindigkeit sei.

In diesem Satz prägt Prandtl den Begriff „Grenzschicht“. Mit der Idee der Aufteilung in unterschied-

liche Gebiete der Strömung können wandnahe Flüssigkeitsströmungen einfacher behandelt werden: die freie Strömung mit reibungsfreien Ansätzen und die Grenzschicht z. B. mit Hilfe von Annahmen über die Profilkfunktionen der spezifischen Eigenschaften (z. B.  $u(x, z)$ ).

Wir studieren nun die Terme von Gl. (1.1) in dem in Bild 1.3 skizzierten Miteinander von freier Strömung und Grenzschicht. In der freien Strömung gibt es ein stationäres und räumlich homogenes Feld der Geschwindigkeit  $u = u_K$ , was nur mit  $\partial p / \partial x = 0$  möglich ist. Da wir  $\partial p / \partial x$  als höhenkonstant angenommen haben, also in dem Sinne, dass die freie Strömung der Grenzschicht ihre horizontale Druckänderung aufprägt, gilt auch in der Grenzschicht  $\partial p / \partial x = 0$ . Damit erhält man als Bewegungsgleichung für die Grenzschicht

$$0 = -\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.3)$$

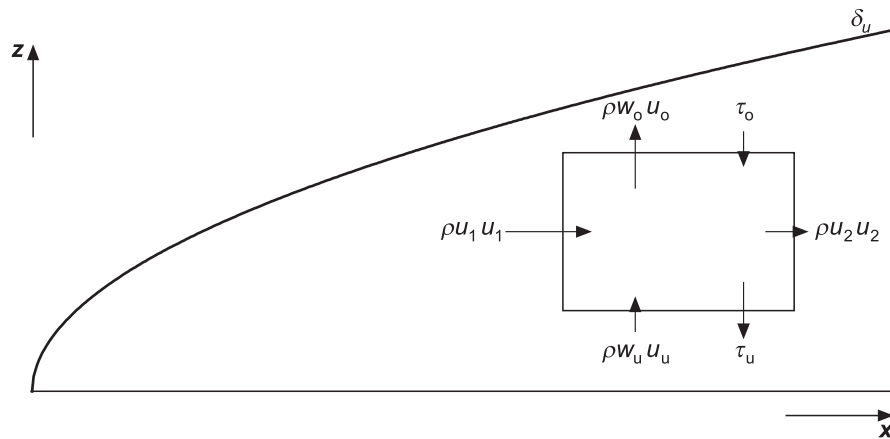
Die so beschriebene Grenzschicht zeigt sich als ein Strömungstyp (type of flow), in dem Reibungskraft und Advektion die entscheidenden Rollen spielen. Das ist ganz anders als etwa beim geostrophischen Wind (AE 17.4 und 18.2), bei dem diese beiden vernachlässigbar sind, dafür aber Druckgradient- und Corioliskraft in den Vordergrund treten. In Abschn. 6.1 werden wir allerdings einen Grenzschichttyp studieren, in dem Druckgradient- und Corioliskraft zusammen mit der Reibung die Hauptrollen spielen.

In Gl. (1.3) kompensieren Reibungskraft und Advektion einander. In Bild 1.5 ist der so beschriebene Haushalt des  $u$ -Impulses skizziert. Multipliziert man Gl. (1.3) mit der Dichte  $\rho$ , dann erhält man als Reibungsterm mit  $\mu = \rho \nu =$  dynamische Zähigkeit

$$\rho \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad (1.4)$$

Die Schubspannung  $\tau = \mu(\partial u / \partial z)$  kann auch als Impulsflussdichte mit der Einheit  $(\text{kg m s}^{-1})(\text{m}^2 \text{s})^{-1} = [\text{Impuls}](\text{m}^2 \text{s})^{-1}$  aufgefasst werden. Ihre Änderung mit  $z$  ist demnach die Divergenz dieser Flussdichte mit der Höhe.  $\tau$  besitzt direkt am Rand den größten nach unten gerichteten, positiv gerechneten Wert und verschwindet an der Obergrenze der





**Bild 1.5.** Zum Haushalt des spezifischen Impulses  $u$  nach Gl. (1.3) für das eingezeichnete Volumen innerhalb einer Impulsgrenzschicht mit der Dicke  $\delta_u(x)$ . Die Verhältnisse in  $y$ -Richtung, d. h. senkrecht zur Zeichenebene, sind homogen ( $\partial/\partial y = 0$ ). In diese Richtung gibt es keine Flüsse, die Ausdehnung des Volumens in diese Richtung ist nicht gezeichnet. Nach unten (Index  $u$ ) fließt mehr  $x$ -Impuls  $\tau_u$  heraus als von oben (Index  $o$ ) als  $\tau_o$  hinein. Über die Impulsflussdichte  $\rho u_1 u_1$  wird mehr  $x$ -Impuls  $u$  in das Volumen hineintransportiert als durch  $\rho u_2 u_2$  hinausgeht. Infinitesimal heißt das  $-\rho u \partial u / \partial x > 0$ . Über die Impulsflussdichte  $\rho w_o u_o$  wird mehr  $x$ -Impuls aus dem Volumen heraustransportiert, als durch  $\rho w_u u_u$  hineingeht. Infinitesimal heißt das  $-\rho w \partial u / \partial z < 0$ . Die Länge der Pfeile ist qualitativ. Entsprechend Gl. (1.3) muss der Haushalt ausgeglichen sein

Reibungsschicht. Da  $\tau$  mit der Höhe abnimmt, fließt an der Unterseite eines gedachten Volumens mehr  $\tau$  aus diesem heraus als von oben nachfließt. In unserem stationären Modell erfolgt der Ausgleich des Haushaltes durch die Advektionsterme. Einem negativen  $\partial\tau/\partial z$  stehen in der hier (Bild 1.5) betrachteten Grenzschicht bei positiven  $u, w$  und  $\partial u/\partial z$  und negativem  $\partial u/\partial x$  ein positiver Wert von  $-\rho u \partial u/\partial x$  und ein negativer von  $-\rho w \partial u/\partial z$  zur Seite. Ein infinitesimal kleines Volumen innerhalb der Grenzschicht verliert also  $u$ -Impuls durch  $\partial\tau/\partial z$  und  $-\rho w \partial u/\partial z$ . Der Verlust wird durch einen Gewinn über  $-\rho u \partial u/\partial x$  ausgeglichen.

Eine Möglichkeit, die Bewegungsgleichung für die Grenzschicht näherungsweise zu lösen, ist ein Integralverfahren, das auf von Kármán (1921) und Pohlhausen (1921) (siehe dazu auch Eckert 1959; Schlichting 1965; Baehr und Stephan 2004) zurückgeht. Dies soll hier für die parallel angeströmte ebene Platte ausführlich behandelt werden. Es ist ein sehr schönes Beispiel für die Nützlichkeit der von Prandtl eingeführten getrennten Behandlung der Prozesse in der freien Strömung und der Grenzschicht. Ferner lassen sich so an einem Beispiel eine ganze Reihe für die Grenzschicht bedeutsamer typischer Größen wie die Grenzschichtdicke, die Schubspannung, vertikale Temperatur- und Strömungsprofile und die Advektionsterme als Funk-

tionen der Anströmlänge  $x$  und der freien Strömung  $u_K$  berechnen. Diesen Größen werden wir dann immer wieder begegnen. Dieses Beispiel bedeutet so einen weiteren Schritt, die Grenzschichtprozesse zu verstehen.

Wir benutzen hier drei der hydrodynamischen Grundgleichungen als Basisgleichungen zur Behandlung unseres Grenzschichtproblems: die oben bereits erläuterte Bewegungsgleichung (1.3) als Haushaltsgleichung für den  $x$ -Impuls

$$0 = -\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.5a)$$

die Kontinuitätsgleichung (1.2)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.5b)$$

und die Energiegleichung als Haushaltsgleichung für die Enthalpie  $c_p T$ ; sie lautet unter Weglassen der spezifischen Wärme bei konstantem Druck  $c_p$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (1.5c)$$

$T$  ist die Temperatur und  $a$  die Temperaturleitzahl. Es gelten die gleichen Voraussetzungen wie

bei den Gl. (1.2) und (1.3), also stationäre Verhältnisse  $\partial/\partial t = 0$  und Homogenität in  $y$ -Richtung  $\partial/\partial y = 0$ . In (1.5c) treten keine Wärmequellen auf. Die Variablen kennzeichnen eine laminare Strömung mit molekularer Viskosität  $\nu$  und Temperaturleitzahl  $a$ .

Die hier zu erläuternde Integralmethode (anstelle einer numerischen Lösung) basiert auf der Integration der Gln. (1.5) zwischen der Oberfläche ( $z = 0$ ) und der Obergrenze der Grenzschicht ( $z = \delta$ ). Dadurch wird  $\delta$  in die Gleichungen eingeführt und kann so ermittelt werden. Das Integral über die Kontinuitätsgleichung (1.5b)

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_0^{\delta} \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0$$

führt mit  $w(z=0) = 0$  zu

$$w(\delta) = - \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dz$$

(s. dazu auch AE 16.1). Die Impulsgleichung (1.5a) lässt sich durch Addition der mit  $u$  multiplizierten Kontinuitätsgleichung (1.5b) umschreiben in

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Beachtet man ferner

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial(uw)}{\partial z} dz = u(\delta)w(\delta) = -u(\delta) \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dz$$

und  $u(\delta) = u_K = \text{const.}$ , dann gelangt man zur (integrierten) *Impulsgleichung der Strömungsgrenzschicht*

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial u^2}{\partial x} dz - u_K \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dz = \nu \int_0^{\delta} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u(u_K - u) dz = \nu \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0}} \quad (1.6)$$

Die vertikale Impulsflussdichte  $\tau_0/\rho = \nu(\partial u/\partial z)_0$  an der Oberfläche (rechte Seite) beschreibt den  $x$ -Impuls, der aus der Grenzschicht nach unten herausfließt. An der Obergrenze (in  $z = \delta$ ) ist  $\tau(\delta) = 0$ . Dieser Impulsverlust wird durch einen etwas kom-

plizierten integralen Advektionsterm (linke Seite) ersetzt. Die Größen  $\tau_0$  und  $\delta$  lassen sich nun ermitteln, wenn man das Geschwindigkeitsfeld  $u(x, z)$  kennt. Nach von Kármán (1921) und Pohlhausen (1921) wählen wir den Polynom-Ansatz

$$\frac{u}{u_K} = a_0 + a_1 \left( \frac{z}{\delta} \right) + a_2 \left( \frac{z}{\delta} \right)^2 + a_3 \left( \frac{z}{\delta} \right)^3 \quad (1.7)$$

mit den dimensionslosen Variablen  $u/u_K$  und  $z/\delta$ . Da die Grenzschichthöhe  $\delta$  von  $x$ , der Entfernung vom Rand der angeströmten Platte, abhängt, beschreibt (1.7)  $u$  in Abhängigkeit von  $x$  und  $z$ . Mit den dem Problem angepassten Randbedingungen

$$u(z=0) = 0 \quad ; \quad u(z=\delta) = u_K \quad ;$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} = 0 \quad ; \quad \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)_{z=0} = 0 \quad (1.8)$$

(letztere wegen (1.5a) mit  $u = 0$  und  $w = 0$  in  $z = 0$ ) erhält man

$$\frac{u}{u_K} = \frac{3}{2} \left( \frac{z}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{z}{\delta} \right)^3 \quad \text{gültig im Bereich } 0 \leq z \leq \delta \quad (1.9)$$

Die  $u/u_K$ -Kurve bei festem  $\delta(x)$  zeigt kein asymptotisches Verhalten beim Übergang von der Grenzschicht zur Kernströmung. Das kubische Polynom erreicht bei  $z = \delta$  den Wert 1 ( $u = u_K$ ) und verliert darüber seine Gültigkeit. Für die hier gesuchte Näherung und den Zweck der Erläuterung des Grenzschicht-Begriffes genügt dieses Verhalten jedoch.

Einsetzen von (1.9) in die Impulsgleichung (1.6) und Integration führt zu einer Beziehung, die angibt, wie die Grenzschichtdicke  $\delta$  in Abhängigkeit von  $\nu$  und  $u_K$  mit dem Abstand  $x$  vom Plattenrand zunimmt:

$$\delta = 4,64 \sqrt{\frac{\nu x}{u_K}} \quad \text{oder} \quad \frac{\delta}{x} = \frac{4,64}{\sqrt{Re_x}} \quad \text{mit} \quad Re_x = \frac{u_K x}{\nu} \quad (1.10)$$

Die zweite Gleichung ist die dimensionslose Form der ersten, wobei die Reynoldssche Kennzahl  $Re_x$  benutzt wird. Die in ihr verwendete charakteristische Länge ist der in unserem Problem so bedeutende Abstand vom Plattenrand. Näheres s. Abschn. 1.5 und 1.6.

Wir können nun noch weitere für die Charakterisierung der Grenzschicht wichtige Größen berechnen:

- Die Wandschubspannung = die Impulsflussdichte an der Oberfläche

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \rho \nu \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} = \rho \nu \frac{3u_K}{2\delta} \\ &= 0,323 \rho u_K^2 \sqrt{\frac{\nu}{u_K x}} = 0,323 \rho u_K^2 \frac{1}{\sqrt{Re_x}}\end{aligned}\quad (1.11)$$

- Der lokale Widerstandsbeiwert  $c_f$ , definiert aus

$$\tau_0 = c_f \cdot \frac{1}{2} \rho u_K^2 \Rightarrow c_f = \frac{2\tau_0}{\rho u_K^2} = \frac{0,646}{\sqrt{Re_x}}\quad (1.12)$$

- Der mittlere Widerstandsbeiwert  $c_{fm}$ , definiert aus

$$\begin{aligned}\int_0^x \tau_0 dx &= c_{fm} x \frac{1}{2} \rho u_K^2 \quad \text{als} \\ c_{fm} &= \frac{1}{x} \frac{2 \int_0^x \tau_0 dx}{\rho u_K^2} = \frac{1,292}{\sqrt{Re_x}}\end{aligned}\quad (1.13)$$

In derselben Weise, wie wir in (1.6) die Impulsgleichung der Strömungsgrenzschicht hergeleitet haben, lässt sich mit Hilfe der Energiegleichung (1.5c) und der Kontinuitätsgleichung (1.5b) auch eine Energiegleichung der Temperaturgrenzschicht gewinnen. Aus (1.5c) und (1.5b) folgt

$$\frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(wT)}{\partial z} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\quad (1.14)$$

Integration von der Oberfläche ( $z = 0$ ) bis zur Obergrenze der Temperaturgrenzschicht ( $z = \delta_T$ ) und Beachtung von

$$\int_0^{\delta_T} \frac{\partial(wT)}{\partial z} dz = w(\delta_T)T(\delta_T) - T(\delta_T) \int_0^{\delta_T} \frac{\partial u}{\partial x} dz$$

und

$$T(\delta_T) = T_K = \text{const.},$$

führt zur (integrierten) *Energiegleichung der Temperaturgrenzschicht*

$$\begin{aligned}\int_0^{\delta_T} \frac{\partial(uT)}{\partial x} dz - T_K \int_0^{\delta_T} \frac{\partial u}{\partial x} dz &= a \int_0^{\delta_T} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dz \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_T} u(T_K - T) dz &= a \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0}\end{aligned}\quad (1.15)$$

Die vertikale Flussdichte  $\rho c_p a (\partial T / \partial z)_0$  an der Oberfläche (rechte Seite) beschreibt die Enthalpie, die aus der Grenzschicht nach unten heraus- oder dort in sie hineinfließt. An der Obergrenze (in  $z = \delta_T$ ) ist dieser Fluss gleich Null. Dieser Enthalpieverlust oder -gewinn wird durch einen etwas komplizierten integralen Advektionsterm (linke Seite) ersetzt. Energiefluss und Dicke der Temperaturgrenzschicht  $\delta_T$  lassen sich nun in derselben Weise wie oben ermitteln, wenn man das Temperaturfeld  $T(x, z)$  und das Geschwindigkeitsfeld  $u(x, z)$  kennt, s. die Ausführungen bei Baehr und Stephan (2004, Abschn. 3.7.1).

Auch für die turbulente Grenzschicht lassen sich derartige Rechnungen durchführen, wenn man die obigen Grundgleichungen (1.5) für skalige Größen  $\bar{u}$ ,  $\bar{w}$  und  $\bar{T}$  schreibt und anstelle der Viskosität  $\nu$  und der Temperaturleitzahl  $a$  die viel größeren turbulenten Diffusionskoeffizienten einführt. Wegen des komplizierteren Aufbaus der turbulenten Grenzschicht, bei der unmittelbar an der Oberfläche noch eine laminare Randschicht auftritt (s. Bild 1.4), sind dabei aber weitere Annahmen notwendig (s. dazu auch Eckert 1959). Auch dies wird hier nicht weiter verfolgt, weil wir mit den bisherigen Überlegungen in diesem Abschnitt bereits das Ziel eines weiteren Beitrags zum Verständnis des Grenzschicht-Begriffs und der dabei wichtigen Größen erreicht haben.

Betrachtungen, wie sie hier dargestellt sind, treten auch in der Grenzschicht-Meteorologie auf, so z. B. in einfachen Modellen der konvektiven Grenzschicht (Kap. 9) und bei der Behandlung der internen Grenzschichten (Abschn. 12.3).

---

## 1.4 Gedanklicher Übergang zur Atmosphärischen Grenzschicht

Von Bild 1.3 und 1.4 ausgehend, können wir uns vorstellen, dass sich bei den langen Strömungswegen auf der Erde turbulente Grenzschichten von ganz erheblicher Dicke in der Größenordnung von 1 000 m ausbilden. Man gelangt damit zu einer den



ganzen Planeten umfassenden Grenzschicht, weshalb man die Atmosphärische Grenzschicht (AGS) (*engl.* atmospheric boundary layer = ABL) auch als Planetarische Grenzschicht (*engl.* planetary boundary layer = PBL) bezeichnet. Jedoch sollten wir bei einer solchen Vorstellung bedenken, dass die Verhältnisse auf der Erdkugel ganz anderer Natur sind als bei einer parallel angeströmten ebenen Platte. Die Erdkugel wird nicht von außen angeströmt. In der Atmosphäre entwickeln sich die dynamischen Prozesse in einem höchst komplexen thermodynamischen System, und da gibt es eben diesen Rand der Erdoberfläche, an dem sich die AGS entwickelt. Zudem handelt es sich um ein rotierendes System. Bei allen größerskaligen Strömungsvorgängen spielt die Corioliskraft eine bedeutsame Rolle. So ist zu erwarten, dass sie auch die Grenzschichtprozesse und dabei auch die Höhe der AGS mitbestimmt (s. dazu die Abschn. 1.5.3 und 6.2).

Wie auf den rechten Seiten der Haushaltsgleichungen (1.6) und (1.15) spielen auch in der AGS die Flussdichten unterschiedlicher Eigenschaften an der Erdoberfläche als Quellen und Senken eine bedeutende Rolle. Über diese Flussdichten in  $z = 0$  hinaus ist ihre Änderung mit  $z$  von Interesse, wie es auch die Gln. (1.5a) und (1.5c) zeigen. Fließt z. B. mehr  $x$ -Impuls  $\tau_u$  unten aus einer Schicht heraus als an der Oberseite als  $\tau_o$  hinein (s. z. B. Bild 1.5), dann verliert die Schicht  $x$ -Impuls durch den mit  $\tau$  verbundenen Reibungseffekt. Fließt durch  $a \partial T / \partial z$  mehr Wärme von unten hinein als nach oben heraus, dann bewirkt dies eine Erwärmung in den betreffenden Volumina. In diesem Sinne spielen Flussdichten und ihre Divergenzen in der AGS eine große Rolle. Im Unterschied zu den Darstellungen in Abschn. 1.3 handelt es sich aber durchwegs um turbulente Flüsse. Tabelle 1.1 stellt einige der so wirksamen Größen für den turbulenten

Transport zusammen. Diese Überlegungen für die AGS schließen also nahtlos an die in Abschn. 1.3 an. Wir sehen aus Tabelle 1.1, dass wir in den folgenden Kapiteln sehr viel tun müssen, um die hier genannten Größen sauber zu fassen, wobei die hydrodynamischen Grundgleichungen die wichtigste Basis sind.

## 1.5 Skalenanalyse

Im Folgenden sollen zwei Werkzeuge erläutert werden, die in der Hydrodynamik und in der Meteorologie von großem Wert sind, die Skalenanalyse und die Dimensionsanalyse (Abschn. 1.6). Die hier folgenden Darstellungen sind dem generellen Ziel von Kap. 1 untergeordnet, das Verständnis des Grenzschicht-Begriffs zu vertiefen.

Mit Hilfe der Skalenanalyse (Skala = Größenordnung, s. AE 2) lässt sich die Größenordnung der einen physikalischen Prozess bestimmenden Terme auf einfache Weise bestimmen. Dabei wird keine spezifische Lösung einer den Prozess beschreibenden Differentialgleichung gesucht, sondern nur die Größenordnung einzelner Terme auf der Basis einer derartigen Gleichung abgeschätzt. Von diesem Verfahren wurde z. B. in AE 17.4 Gebrauch gemacht, um zur geostrophischen und hydrostatischen Approximation der Bewegungsgleichung zu gelangen. Hier betrachten wir auch den Unterschied zwischen molekularer und turbulenter Diffusion, weil diesem in der Grenzschicht besonderes Interesse zukommt.

### 1.5.1 Beispiel 1: Thermische Diffusion bei vorgegebener charakteristischer Länge

Wir stellen uns ein Luftvolumen mit einer charakteristischen Höhe  $L_z$  vor, das vom Boden her geheizt

**Tabelle 1.1.** Turbulente vertikale Flussdichten verschiedener spezifischer Eigenschaften und ihre Abhängigkeit von der Höhe  $z$  in der Atmosphärischen Grenzschicht

1. spezifische Eigenschaft	spezifischer $x$ -Impuls $u$	fühlbare Wärme $c_p \Theta$	spezifische Feuchte $q$	spezifische Verunreinigung $q_v$
2. vertikale Komponente der turbulenten Flussdichte ... an der Oberfläche ( $z = 0$ )	$\tau(z)$ $\tau_0$	$H(z)$ $H_0$	$W(z)$ $W_0$	$V(z)$ $V_0$
3. Divergenz dieser Flussdichte	$\partial \tau / \partial z$	$\partial H / \partial z$	$\partial W / \partial z$	$\partial V / \partial z$
4. Wirkung der Divergenz auf die Luftschicht	Reibung	Erwärmung/ Abkühlung	Anfeuchten/ Trocknen	Zu-/Abnahme der Verunreinigung

wird. Die Differentialgleichung dieses Prozesses ist die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{1.16}$$

mit  $T$  = Temperatur,  $t$  = Zeit,  $z$  = Höhe und  $a$  = Temperaturleitzahl =  $\lambda/(\rho c)$ ,  $\lambda$  = Wärmeleitfähigkeit,  $\rho$  = Dichte der Luft und  $c_p$  deren spezifische Wärme bei konstantem Druck. Wir fragen: Nach welcher charakteristischen Zeit  $\Delta t$  wird eine vom Boden ausgehende Erwärmung, ausgedrückt durch eine charakteristische Temperaturdifferenz  $\Delta T$ , in der charakteristischen Höhe  $L_z$  spürbar? Mit dem Wort charakteristisch meinen wir dabei Größenordnungen.

Zunächst soll der Wärmetransport nur durch molekulare Diffusion erfolgen. Strahlungsübertragung wird ausgeschlossen, das zeigt schon die Natur der obigen Gleichung. Aus (1.16) folgt als Beziehung zwischen den Größenordnungen (als Vergleichszeichen wird dabei „~“, nicht „=“ benutzt)

$$\frac{\Delta T}{\Delta t_{\text{mol}}} \sim a \frac{\Delta T}{L_z^2} \Rightarrow \Delta t_{\text{mol}} \sim \frac{L_z^2}{a} \tag{1.17}$$

Daraus errechnet sich mit der molekularen Temperaturleitzahl für Luft  $a = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  und  $L_z = 5 \text{ m}$  eine charakteristische Zeit  $\Delta t_{\text{mol}} \sim 1,25 \cdot 10^6 \text{ s} = 347 \text{ h}$ .

Gibt es in dem betrachteten Luftvolumen eine horizontale Luftbewegung (Wind) der Geschwindigkeit  $u$  und erzeugt diese Turbulenz, dann erfolgt der vertikale Transport mit einem turbulenten Diffusionskoeffizienten  $K$  (anstelle von  $a$  in (1.16)). Die Variable  $T$  ist dann eine skalige bzw. mittlere Temperatur (s. dazu Abschn. 1.2, 1.3 und 2.1). Aus einer Einheitenanalyse mit  $[a] = \text{m}^2 \text{ s}^{-1} = \text{m m s}^{-1}$  folgt, dass man den Diffusionskoeffizienten als Produkt aus einer Länge und einer Geschwindigkeit darstellen kann. Wir setzen so  $K \sim 0,1 L_z U$ , wobei der Faktor 0,1 die Größenordnung der Beziehung

kennzeichnet.  $U$  ist die charakteristische Geschwindigkeit der Luftbewegung. Wir erhalten nun statt (1.17)

$$\frac{\Delta T}{\Delta t_{\text{turb}}} \sim K \frac{\Delta T}{L_z^2} \sim 0,1 \cdot L_z U \frac{\Delta T}{L_z^2} = 0,1 \cdot U \frac{\Delta T}{L_z} \Rightarrow \Delta t_{\text{turb}} \sim \frac{L_z}{0,1 \cdot U} \tag{1.18}$$

und somit bei  $U \sim 1 \text{ m s}^{-1}$  eine Zeit von  $\Delta t_{\text{turb}} \sim 50 \text{ s}$ .

Beim Wärmetransport ist also die molekulare Diffusion im Vergleich zur turbulenten sehr wenig effizient. Ein Vergleich der ausgerechneten charakteristischen Zeiten lässt sich ausdrücken durch den Quotienten  $\Delta t_{\text{mol}}/\Delta t_{\text{turb}} \sim 347 \text{ h}/50 \text{ s} = 25000$ . Denselben Wert erhalten wir aus dem Verhältnis  $K/a \sim 0,1 L_z U/a$ . Formal ausgedrückt, ergibt sich mit der kinematischen Zähigkeit  $\nu$

$$\frac{\Delta t_{\text{mol}}}{\Delta t_{\text{turb}}} \sim 0,1 \frac{L_z^2 U}{a L_z} = 0,1 \frac{L_z U}{a} = 0,1 \frac{\nu L_z U}{a \nu} \tag{1.19}$$

Dies ist eine Beziehung, in der lauter dimensionslose Quotienten auftreten. Das sind dimensionslose Kennzahlen, die in der Hydrodynamik eine große Rolle spielen als

$$\text{Reynolds-Zahl } Re = \frac{L_z U}{\nu}$$

$$\text{Peclet-Zahl } Pe = \frac{L_z U}{a} \text{ und}$$

$$\text{Prandtl-Zahl } Pr = \frac{\nu}{a}$$

Die Reynoldssche Kennzahl ist uns bereits in den Abschn. 1.2 und 1.3 begegnet. Reynolds- und Peclet-Zahl sind hier mit der Länge  $L_z$  gebildet. Beide sind ein Produkt aus charakteristischer Länge und charakteristischer Geschwindigkeit dividiert durch einen Diffusionskoeffizienten  $\nu$  bzw.  $a$ . Sie unter-

**Tabelle 1.2.**  
Temperaturleitzahl  $a$ , kinematische Zähigkeit  $\nu$  und Prandtl-Zahl  $Pr = \nu/a$  trockener Luft bei einem Druck von 1013 hPa

Temperatur in °C	$a = \lambda/(\rho c_p)$ in $10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$	$\nu$ in $10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$	$Pr = \nu/a$
0,0	1,872	1,328	0,709
20,0	2,124	1,510	0,711

scheiden sich durch das Verhältnis  $\nu/a$ , also durch die Prandtl-Zahl. Da dieser Quotient aber in der Größenordnung von 1 liegt, unterscheiden sich  $Re$  und  $Pe$  nicht stark. Einige genaue Werte von  $\nu$  und  $a$  enthält Tabelle 1.2.

Die Reynolds-Zahl kann in verschiedener Weise gedeutet werden:

- primär als Verhältnis von Advektionsterm  $U(U/L)$  zum Reibungsterm  $\nu(U/L^2)$  in der Bewegungsgleichung bei gleicher charakteristischer Länge in beiden Termen, aber auch
- als Verhältnis der molekularen zur turbulenten Zeitskala bei derselben charakteristischen Länge und
- als Verhältnis des turbulenten zum molekularen Diffusionskoeffizienten.

Mehr zu den dimensionslosen Kennzahlen folgt in Abschn. 1.6.

### 1.5.2 Beispiel 2: Höhe einer stationären Laborgrenzschicht

Die Differentialgleichung dieses Prozesses sei die Bewegungsgleichung in der einfachen Form (1.3), in der sich bei stationären Verhältnissen Advektion und Reibungskraft kompensieren.

$$0 = -\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.3)$$

Wir stellen uns hier wieder die parallel angeströmte ebene Platte vor. Die charakteristische Länge in der Vertikalen sei  $L_z$ , das ist die Grenzschichtdicke bei der charakteristischen Länge (Stelle)  $L_x$ . Mit der charakteristischen Geschwindigkeit  $U$ , die etwa der der Kernströmung entspricht, ist die Größenordnung des Advektionsterms  $U^2/L_x$  und die des Reibungsterms  $\nu U/L_z^2$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} \frac{U^2}{L_x} \sim \nu \frac{U}{L_z^2} &\Rightarrow L_z \sim \delta \sim \sqrt{\frac{\nu L_x}{U}} \\ &\Rightarrow \frac{\delta}{L_x} \sim \sqrt{\frac{\nu}{L_x U}} = \frac{1}{\sqrt{Re_x}} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Dieses Ergebnis einer Analyse der Größenordnung möge man mit (1.10) in Abschn. 1.3 vergleichen.

### 1.5.3 Beispiel 3: Höhe einer stationären Atmosphärischen Grenzschicht

Wieder gehen wir von der stationären Bewegungsgleichung aus, können aber nun weder Druckgradientkraft noch Corioliskraft vernachlässigen. Die Strömung sei turbulent, den turbulenten Diffusionskoeffizienten im Reibungsterm bezeichnen wir mit  $K$ . Dieser Fall ist in AE 18.6 näher beschrieben. Wir übernehmen die dortige in Vektornotation geschriebene Gl. (3)

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right) = f \vec{k} \times (\vec{v} - \vec{v}_g) \quad (1.21)$$

Hier ist  $\vec{v}$  der horizontale Windvektor,  $\vec{v}_g$  der geostrophische Wind,  $\vec{k}$  der vertikale Einheitsvektor und  $f$  der Coriolisparameter. In Skalenschreibweise wird daraus

$$K \frac{U}{L_z^2} \sim fU \Rightarrow L_z \sim \delta \sim \sqrt{\frac{K}{f}} \quad (1.22)$$

Setzen wir wie in (1.18)  $K = 0,1 L_z U$ , dann ergibt sich

$$0,1 \cdot L_z U \frac{U}{L_z^2} \sim fU \Rightarrow L_z \sim \delta \sim 0,1 \cdot \frac{U}{f} \quad (1.23)$$

Mit  $f \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  und  $U \sim 1 \text{ m s}^{-1}$  ergibt sich als Höhe der Atmosphärischen Grenzschicht  $\delta \sim 1000 \text{ m}$ . In Abschn. 6.2.2 werden wir eine Grenzschichthöhe  $\approx 0,2 u_* / f$  ( $u_* =$  Schubspannungsgeschwindigkeit, s. Gln. (6.27) und (7.1)) ableiten und uns an die groben Skalierungen in diesem Abschnitt erinnern.

Gehen wir zurück auf Gl. (1.22), dann kann man versuchsweise ausrechnen, welche Grenzschichthöhe sich bei laminarer Strömung ergibt, wobei wir dann  $K = \nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  setzen. Es ergibt sich  $\delta \approx 0,4 \text{ m}$ .

Als ein wichtiges Ergebnis dieses dritten Beispiels zeigt sich, dass die Höhe der Atmosphärischen Grenzschicht auch vom Coriolisparameter abhängt, sofern die Zeitskala, in der sich diese Schicht entwickelt, nicht *viel kleiner als*  $1/f \sim 10^4 \text{ s} = 2,78 \text{ h}$  ist. Darauf wird auch in AE 17.2G hingewiesen.

## 1.6 Dimensionsanalyse

Die Dimensionsanalyse betrachtet die Dimensionen (z. B. Länge, Masse, Zeit, Temperatur; die Geschwindigkeit besitzt die Dimension Länge/Zeit)

der Einflussgrößen eines physikalischen Prozesses. Sie ermittelt dimensionslose Kennzahlen (z. B. die Reynoldssche Kennzahl), die als unabhängige Variablen zur Beschreibung dimensionsloser Größen (z. B. des Strömungsprofils) des betrachteten Problems dienen. Die durch derartige Beziehungen ausgedrückte „Ähnlichkeit“ von Prozessen bedeutet eine erhebliche Reduktion der Variablen und so eine große Erleichterung bei der Behandlung von Strömungsprozessen. Dies sei hier an nur einem Beispiel erläutert.

Wir betrachten die in Abschn. 1.3 durch die Gln. (1.5a) und (1.5b) beschriebene Impulsgrenzschicht und versuchen nun nicht, dieses Differentialgleichungssystem in irgendeiner Weise zu lösen. Wir stellen lediglich fest, dass die Größen, die man als abhängige Variablen ermitteln möchte (z. B.  $u, w, \delta$ ), nur von den 4 unabhängigen Variablen  $x, z, u_K$  und  $\nu$  abhängen. Diese besitzen die Dimensionen, in derselben Reihenfolge aufgezählt, Länge, Länge, Länge/Zeit und Länge<sup>2</sup>/Zeit. So wird sofort klar, dass bei den unabhängigen Variablen nur zwei voneinander unabhängige Grunddimensionen, nämlich Länge und Zeit, auftreten.

Das *Buckingham-Theorem der Dimensionsanalyse* sagt nun: Aus  $n$  physikalischen Größen, die  $m$  voneinander unabhängige Grunddimensionen enthalten, lassen sich nur  $(n - m)$  dimensionslose, voneinander unabhängige Parameter bilden. In unserem Beispiel ist  $n = 4$ ,  $m = 2$  und  $(n - m) = 2$ . Die zwei einzigen dimensionslosen, voneinander unabhängigen Parameter sind

$$\frac{z}{x} \text{ und } Re = \frac{u_K x}{\nu} \quad (1.24)$$

Hier tritt also die in den Abschn. 1.3 und 1.5 schon benutzte Reynoldssche Kennzahl auf.

Mit der *Ähnlichkeitshypothese* gelangen wir nun ans Ziel: Alle dimensionslosen Kenngrößen (abhängigen Variablen) der von uns betrachteten Impulsgrenzschicht (z. B.  $u/u_K, \delta/x$ ) sind nur von  $z/x$  und  $Re$  abhängig. Damit können wir z. B. schreiben

$$\frac{u}{u_K} = f\left(\frac{z}{x}, Re\right) \quad (1.25)$$

Man bezeichnet nun Felder physikalischer Größen (z. B.  $u$ ) als ähnlich, wenn sie in normierter, also

dimensionsloser Form (z. B.  $u/u_K$ ) und aufgetragen über dimensionslosen Koordinaten (hier:  $z/x$  und  $Re$ ) deckungsgleich sind. Die aus verschiedenen Experimenten gewonnenen und mit den jeweiligen  $u_K$  normierten  $u$ -Felder zeigen dementsprechend in unserem Beispiel die gleiche funktionelle Abhängigkeit von  $z/x$  und  $Re$ , sofern bei allen die Voraussetzungen der Gln. (1.5a) und (1.5b) erfüllt sind. Wie diese funktionelle Abhängigkeit aussieht, darüber sagt die Ähnlichkeitshypothese nichts aus. Dies muss gesondert (z. B. experimentell) herausgefunden werden.

Die Gesamtheit dieser Bemühungen von der Dimensionsanalyse über die Ähnlichkeitshypothese bis zur Aufstellung der entsprechenden funktionellen Abhängigkeit bezeichnet man auch als *Ähnlichkeitstheorie* des betreffenden Problems. Mit ihrer Hilfe erreicht man eine Reduzierung der unabhängigen Variablen von  $n$  auf  $(n - m)$ , also in unserem Beispiel von 4 auf 2. Dies erweist sich z. B. als großer Vorteil, wenn man funktionelle Abhängigkeiten experimentell bestimmen will; es reduziert die Anzahl der durchzuführenden Experimente beträchtlich.

Es drängt sich nun der Wunsch auf, die Aussagen in (1.24) und (1.25) mit den Ergebnissen in Abschn. 1.3 zu vergleichen. Man erkennt aus (1.10), dass  $\delta/z$  nur von  $z/x$  und  $Re$  oder  $\delta/x$  nur von  $Re$  abhängt. Aus (1.7) sieht man, dass mit  $\delta = f(x, Re)$  (s. dazu Gl. (1.10)) für das normierte Windfeld die Beziehung (1.25) gilt.

Ähnlichkeitsbetrachtungen spielen in der Hydrodynamik und so auch in der Grenzschicht-Meteorologie eine große Rolle. In den Abschn. 7.5, 8.1 und 9.2 werden drei für die Atmosphärische Grenzschicht wichtige Ähnlichkeitstheorien ausführlich erläutert.

---

## 1.7 Unterschiedliche Definitionen der Grenzschichthöhe $\delta$ aus dem Profilverlauf

Entsprechend den Ausführungen in Abschn. 1.1 wird eine Grenzschicht durch das wandnahe Profil einer spezifischen Eigenschaft  $e$  definiert, das den Übergang vom Wert der Eigenschaft unmittelbar an der Wand  $e_0$  zu dem der Kernströmung  $e_K$  beschreibt. Dabei nähert sich im oberen Teil der Grenzschicht  $e(z)$  asymptotisch dem Wert  $e_K$ . Die Festlegung eines genauen Wertes der Grenzschicht-

höhe  $\delta$  ist deshalb nicht so einfach wie etwa bei einem unstetigen Übergang. Hier sollen nun zwei Wege erwähnt werden,  $\delta$  zu bestimmen.

1. **Die 90 %-Definition:**  $\delta_{90}$  ist jene Höhe, in der sich  $e$ , von unten kommend, um 90 % der Differenz zwischen  $e_K$  und  $e_0$  verändert hat.

$$\begin{aligned} e(\delta_{90\uparrow}) - e_0 &:= 0,90(e_K - e_0) \\ \Rightarrow e(\delta_{90\uparrow}) &:= 0,90e_K + 0,10e_0 \end{aligned} \quad (1.26)$$

Man könnte dies auch über

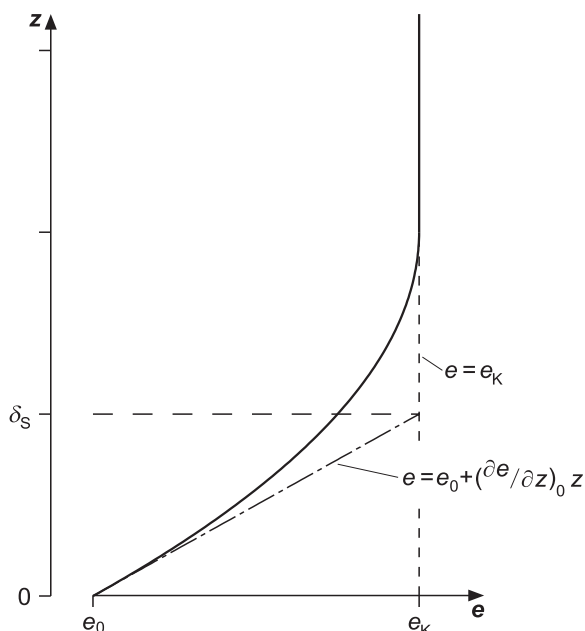
$$e(\delta_{10\downarrow}) - e_K := 0,10(e_0 - e_K)$$

von oben kommend, als 10 %-Regel bezeichnen, da  $e(\delta_{90\uparrow}) = e(\delta_{10\downarrow})$ . Natürlich kann man genauso auch eine 99 %- bzw. 1 %- Regel aufstellen.

2. **Die Schnittpunkt-Definition:**  $\delta_s$  ist jene Höhe, in der sich die beiden Geraden

$$e = e_K = \text{const. und } e = e_0 + \left(\frac{\partial e}{\partial z}\right)_0 z \quad (1.27)$$

schnneiden, s. dazu Bild 1.6. Eine konstante Steigung  $(\partial e / \partial z)_0 = \text{const.}$  ergibt sich z. B. in den Randbedingungen von Gl. (1.8).



**Bild 1.6.** Zur Definition der Grenzschichthöhe aus dem Schnittpunkt der Geraden von (1.27)

Beide Definitionen sind sowohl für die lamina-re als auch für die turbulente Grenzschicht von Bedeutung. Mittels  $\delta_s$  lässt sich die Flussdichte der Eigenschaft  $e$  unmittelbar am Rand durch

$$c \left( \frac{\partial e}{\partial z} \right)_{z=0} = c \frac{e_K - e_0}{\delta_s} = c'(e_K - e_0)$$

beschreiben, wobei die Koeffizienten  $c$  und  $c' = c / \delta_s$  dem speziellen Prozess angepasst sind. Als Beispiel sei die Wärmeleitung erwähnt, bei der  $e$  die Temperatur  $T$  und  $c$  die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  bedeuten.

## 1.8 Typen der Atmosphärischen Grenzschicht

Die Atmosphärische Grenzschicht (AGS) betrachten wir als die Übergangsschicht von der Erdoberfläche zur Freien Atmosphäre. Letztere spielt hier dieselbe Rolle wie die Kernströmung in der Technischen Hydrodynamik (s. Abschn. 1.2). Gekennzeichnet ist die AGS durch die Profile der verschiedenen spezifischen Eigenschaften (Impuls, fühlbare Wärme, latente Wärme des Wasserdampfes, Luftbeimengungen) und die mit diesen eng verbundenen vertikalen turbulenten Flussdichten dieser Eigenschaften zwischen der Erdoberfläche als Quelle und Senke und der Grenzschicht-Obergrenze, wo die Flüsse verschwinden. Dazwischen zeigen sie Divergenzen ( $\partial / \partial z$  der Flüsse), die für eine Fülle von Erscheinungen (z. B. Reibung und Erwärmung; s. Tabelle 1.1) verantwortlich sind.

In einer groben Einteilung lassen sich drei Grundtypen der AGS unterscheiden. Diese wollen wir hier im Sinne der bisherigen Erörterungen kurz charakterisieren.

1. **Die rein dynamische Grenzschicht.** Sie lässt sich allein über die Bewegungsgleichung beschreiben, allerdings, wie oben bereits verdeutlicht (s. Abschn. 1.4 und 1.5.3), mit Berücksichtigung der Corioliskraft. Das Windprofil wird durch eine Spirale beschrieben; beide horizontale Komponenten nähern sich so asymptotisch dem geostrophischen Wind. Die turbulente Schubspannung (= turbulente Impulsflussdichte) geht mit  $z$  asymptotisch gegen Null, so zusammen mit dem Windprofil die Obergrenze markierend. Der spiralenförmige Hodograph wird als Ekman-



Spirale bezeichnet. Näheres findet der Leser in Kap. 6 und AE 18.6. In reiner Form tritt dieser Grenzschichttyp nur sehr selten auf.

2. **Die konvektive Grenzschicht.** Man spricht auch von einer gut durchmischten Grenzschicht unter einer abgehobenen Inversion (s. AE 13.5 und AE 15.2A3). Die Durchmischung ist so groß, dass die Profile der konservativen Größen (z. B. der potentiellen Temperatur und der spezifischen Feuchte) nahezu höhenkonstant sind. In diesem Fall herrscht in der Freien Atmosphäre Absinken, während in der Grenzschicht Turbulenz erzeugt wird. Dies geschieht außer durch Reibung vor allem durch thermische Prozesse, die an die Flüsse fühlbarer und latenter Wärme gebunden sind. Die Höhe der Obergrenze dieser turbulenten Schicht mit intensiver Durchmischung – das ist gleichzeitig die Untergrenze der abgehobenen Inversion – ergibt sich als Gleichgewicht zwischen dem Bestreben der Absinkbewegung, sich weiter nach unten durchzusetzen, und der Turbulenzvorgänge, auch höhere Schichten in die Durchmischung einzubeziehen. Nimmt also die Turbulenz zu und/oder das Absinken ab, dann verschiebt sich die Obergrenze der AGS nach oben; bei Abnahme der Turbulenz und/oder Verstärkung des Absinkens verschiebt sie sich nach unten.

Diesen zweiten Typ kann man – im Gegensatz zu den beiden anderen – oft sehr deutlich sehen und beobachten. Die Obergrenze der starken Durchmischung erscheint als Dunstobergrenze, wenn von unten Trübungsbestandteile (Luftverunreinigungen, Aerosolteilchen) in der AGS verwirbelt werden. Häufig bilden sich *in* der Turbulenzschicht auch Wolken und zwar immer dann, wenn das Kondensationsniveau der von unten hochgemischten Luft tiefer liegt als die abgehobene Inversion. Die Wolken – meist Cumulus und/oder Stratocumulus – stoßen in ihrer Vertikalbewegung allerdings an diese Inversion und können kaum in diese oder in die Freie Atmosphäre eindringen. Die Wolken machen so den oberen Teil der AGS sichtbar. Man spricht in diesem Fall von einer Cloud Topped Boundary Layer (CTBL). Näheres findet man in Kap. 9.

3. **Die stabile Grenzschicht.** Anstelle des indifferenten Temperaturprofils bei Typ 1 zeichnet sie sich durch ein stabiles Temperaturprofil aus, wie es z. B. in wolkenlosen Nächten auftritt. Es gibt eine große Mannigfaltigkeit der Erscheinungsformen dieses Typs je nach Beschaffenheit der Freien Atmosphäre, nach Windstärke und nach Stärke der Inversion, die so intensiv sein kann, dass die Erzeugung von Turbulenz unterbunden wird. Näheres findet man in Kap. 10.