# 1 Einführung und Definitionen

## 1.1 Einleitung

Eine allgemein akzeptierte Charakterisierung der Theoretischen Meteorologie als Hochschulfach stößt auf Schwierigkeiten. Zum einen sind in den Kursvorlesungen die thematischen Schwerpunkte relativ stark von den persönlichen Präferenzen der Hochschullehrer bestimmt, zum anderen haben sich in den letzten Jahrzehnten zahlreiche Teilgebiete der Theoretischen Meteorologie zu umfangreichen und eigenständigen Spezialdisziplinen entwickelt.

Schaut man daher in aktuelle Lehr- und Fachbücher, wie sie etwa im Literaturverzeichnis aufgeführt sind, stellt man überraschenderweise fest, dass dort der Begriff *Theoretische Meteorologie* nirgendwo auftritt. Stattdessen wird der Begriff *Dynamische Meteorologie* (im Englischen: *Dynamic Meteorology*) verwendet. Dies kommt wohl daher, dass vor einigen Jahrzehnten Meteorologie meist nur aus synoptischer Meteorologie bestand, unser Fach sich also hauptsächlich mit der Beobachtung des Wettergeschehens befasste. Die dazugehörige theoretische Interpretation bezeichnete man dagegen als *dynamische Meteorologie*. Das Wort *Dynamik* heißt soviel wie Bewegung, und so könnte man die dynamische Meteorologie als die Theorie der Atmosphärenbewegungen bezeichnen.

In der Tat befasst sich auch das vorliegende Lehrbuch fast ausschließlich mit den Bewegungsvorgängen in der Atmosphäre und deren Entstehung. Andere Teilgebiete der Meteorologie haben natürlich auch eine starke theoretische Komponente. Es seien hier die Gebiete Wolkenphysik und Strahlungsübertragung besonders genannt, die sich mittlerweile als Spezialdisziplinen etabliert haben. Trotzdem wird wohl die Dynamische Meteorologie den Hauptteil der Vorlesungen und Prüfungsinhalte des Faches Theoretische Meteorologie ausmachen. Aus diesem Grund hat das vorliegende Buch den Titel *Theoretische Meteorologie* erhalten.

Der Aufbau des Buches ist der folgende: Nach dieser Einleitung und einigen Definitionen, die im weiteren verwendet werden, befassen sich die Kapitel 2 bis 5 mit der Thermodynamik der Atmosphäre. Kapitel 6 behandelt die Vertikalstruktur der Erdatmosphäre und schließt damit die Beschreibung der ruhenden Atmosphäre ab.

Mit Kapitel 7 bis 15 kommt sozusagen Bewegung in die Meteorologie. Hier werden die Eigenschaften von Geschwindigkeitsfeldern aufgezeigt und die Bewegungsgleichungen für atmosphärische Strömungsvorgänge in den verschiedensten Approximationen dargestellt. Dabei werden alle in der Atmosphäre wirkenden Kräfte berücksichtigt, außer der Reibungskraft. Dies ist eine brauchbare Näherung für synoptische Vorgänge (z. B. Entstehung von Tiefdruckgebieten), so dass in diesem Teil des Buches schwerpunktmäßig die großräumige Dynamik der Atmosphäre beschrieben wird.

Die Kapitel 16 und 17 über die Allgemeine Atmosphärische Zirkulation und die Numerische Wettervorhersage sind als Ergänzung zu den bis dahin beschriebenen physikalischen Grundlagen von Thermodynamik und Dynamik gedacht. Diese Teilgebiete – früher meist im Zyklus Theoretische Meteorologie integriert – haben sich in den letzten Jahrzehnten dermaßen ausgeweitet, dass sie heute als Spezialvorlesungen angeboten werden. An dieser Stelle soll deshalb nur ein kurzer Einblick in diese Gebiete der Meteorologie gegeben werden.

Die bisher vernachlässigte Reibungskraft wird in Kapitel 18 eingeführt. Mit der Problematik, dass die Atmosphäre als turbulente Strömung aufgefasst werden muss, befassen sich Kapitel 19 und 20. Die Turbulenz hat ihre größte Bedeutung in der atmosphärischen Grenzschicht, die ausführlich in Kapitel 21 behandelt wird. Als Verknüpfung zwischen theoretischer Meteorologie und der Umweltproblematik kann schließlich das letzte Kapitel über die Ausbreitung von Substanzen in der Atmosphäre aufgefasst werden. Insgesamt kann man die Kapitel 18 bis 22 unter dem Begriff *Dynamik mit Reibung, Turbulenz und Diffusion* zusammenfassen.

Wie bereits eingangs erwähnt, wird der Leser ausführliche Darstellungen zur Strahlung sowie zur Wolkenphysik (einschließlich Konvektion) vergeblich suchen. Zwar haben diese Teilgebiete ausgesprochen theoretische Komponenten, jedoch haben sie sich zu eigenen umfangreichen Spezialdisziplinen entwickelt, wie auch aus dem Literaturverzeichnis zu ersehen ist. Da das Hauptinteressengebiet des Autors auf der Dynamik der Atmosphäre liegt, wird auf die genannten Teilgebiete hier nur hingewiesen.

## 1.2 Physikalische Größen und Einheiten

Die in diesem Buch beschriebenen Grundlagen für atmosphärische Bewegungsvorgänge lassen sich durch physikalische Gesetzmäßigkeiten beschreiben. Neben der mathematischen Form dieser Beziehungen müssen stets die dabei auftretenden physikalischen Einheiten berücksichtigt werden. Wir halten uns dabei an das internationale Einheitensystem (SI-Einheiten), dessen Grundeinheiten wie folgt festgelegt sind:

| **Größe** | **Einheit** | **Symbol** |
|---|---|---|
| Länge | Meter | m |
| Masse | Kilogramm | kg |
| Zeit | Sekunde | s |
| Temperatur | Kelvin | K |

Aus den Grundeinheiten lassen sich abgeleitete Größen definieren, die nachfolgend dargestellt sind.

| **Größe** | **Einheit** | **Symbol** | **in Grundeinheiten** |
|---|---|---|---|
| Kraft | Newton | N | $\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$ |
| Druck | Pascal | Pa | $\mathrm{N\,m^{-2}}$ |
| Energie | Joule | J | Nm |
| Leistung | Watt | W | $\mathrm{J\,s^{-1}}$ |

In der Meteorologie verwenden wir als thermodynamische Grundgrößen die Lufttemperatur (Einheit Kelvin) und den Luftdruck (Einheit Pascal). Für letzteren gilt hinsichtlich der früheren Bezeichnungen Bar bzw. Millibar:

$$\begin{aligned} \text{Luftdruck:} \quad & 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} \\ & 1 \text{ mbar} = 100 \text{ Pa} = 1 \text{ hPa (Hektopascal)} \end{aligned}$$

Als dynamische Größe tritt noch die Windgeschwindigkeit hinzu, die in der praktischen Meteorologie in die Windrichtung (geographische Orientierung) und den Geschwindigkeitsbetrag (Einheit: $\mathrm{m\,s^{-1}}$) aufgespalten wird.

Bei der Behandlung atmosphärischer Schwingungen und Wellen tritt auch der Begriff der Frequenz auf. Mit der Schwingungsdauer $\tau$ (Zeitdauer für eine Periode des Vorgangs) erhalten wir

| **Größe** | **Definition** | **Einheit** | **Symbol** |
|---|---|---|---|
| Schwingungsdauer | $\tau$ | Sekunde | s |
| Frequenz | $1/\tau$ | Hertz | Hz, $\mathrm{s^{-1}}$ |
| Kreisfrequenz | $2\pi/\tau$ | Radians/Sekunde | Rad $\mathrm{s^{-1}}$ |

## 1.3 Vektor- und Tensornotation

Die Vorlesungen über Theoretische Meteorologie sind in den Studienplänen meist erst nach dem Vordiplom vorgesehen. Es kann deshalb vorausgesetzt werden, dass bereits Kenntnisse über Differential- und Integralrechnung einschließlich partieller Differentialgleichungen und Vektoranalysis vorliegen. Aus diesem Grund sollen hier lediglich die Notation hinsichtlich der Vektor- und Tensorschreibweise ausgeführt werden, wie sie in diesem Buch verwendet wird. Bei der Frage, ob die Gleichungen in Vektor- oder Tensorschreibweise verwendet werden sollen, hat jeder Autor von Büchern aus dem Bereich der Meteorologie eigene Ansichten. Da in den Fachzeitschriften beide Notationsarten verwendet werden, hält es der Verfasser für sinnvoll, wenn die Studenten mit beiden Schreibweisen gleichermaßen vertraut sind. Deshalb werden in diesem Buch beide Methoden verwandt.

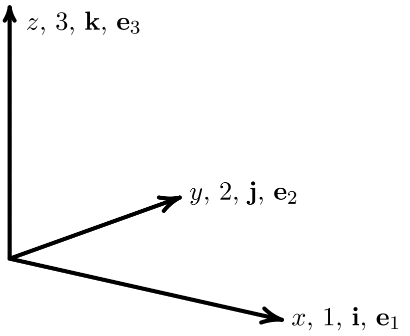


**Bild 1.1**
Das kartesische Koordinatensystem mit den im Buch verwendeten Bezeichnungen

In den ersten Teilen über Thermodynamik und Dynamik ohne Reibung wird überwiegend die Vektorschreibweise verwendet, wobei Vektoren durch Fettdruck der Buchstaben gekennzeichnet werden (z. B. $\mathbf{A}, \mathbf{v}$). Im letzten Teil über Dynamik mit Reibung und Turbulenz wird praktisch ausschließlich die Tensorschreibweise (Indexschreibweise) verwendet (z. B. $A_i$, $u_k$). Bevor auf die genaue Notation eingegangen wird, muss man sich auf ein Koordinatensystem festlegen. Im folgenden gehen wir von einem rechtwinkligen, kartesischen Koordinatensystem aus, wie es in Bild 1.1 gezeigt ist. Die Bezeichnung der einzelnen Koordinaten wird wie folgt festgelegt:

| **Größe** | **Vektorform** | **Tensorform** |
|---|---|---|
| Koordinatenachsen | | |
| – horizontal | $x$, $y$ | $x_1$, $x_2$ |
| – vertikal | $z$ | $x_3$ |
| Einheitsvektoren | | |
| – horizontal | $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ | $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ |
| – vertikal | $\mathbf{k}$ | $\mathbf{e}_3$ |

Die Vektor- und Indexschreibweise lauten für einen Ortsvektor

$$\mathbf{x} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \qquad \text{und} \qquad x_i\,\mathbf{e}_i = x_1\,\mathbf{e}_1 + x_2\,\mathbf{e}_2 + x_3\,\mathbf{e}_3$$

und entsprechend für einen allgemeinen Vektor

$$\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k} \qquad \text{und} \qquad A_i\,\mathbf{e}_i = A_1\,\mathbf{e}_1 + A_2\,\mathbf{e}_2 + A_3\,\mathbf{e}_3 \ .$$

Speziell gilt für den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + w\,\mathbf{k} \qquad \text{und} \qquad u_i\,\mathbf{e}_i = u_1\,\mathbf{e}_1 + u_2\,\mathbf{e}_2 + u_3\,\mathbf{e}_3$$

mit den horizontalen Komponenten $u$, $v$ bzw. $u_1$, $u_2$ und der vertikalen Komponente $w$ bzw. $u_3$. Für das Skalarprodukt der Einheitsvektoren gelten die Regeln

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 \qquad \text{und} \qquad \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \ ,$$

und für das Vektorprodukt die Beziehungen

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \ , \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \ , \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \ .$$

Die Skalar- bzw. Vektorprodukte beliebiger Vektoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ folgen den Regeln

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \ ,$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\, \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\, \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\, \mathbf{k} \ .$$

Bei der Tensorschreibweise (Indexschreibweise) erhält man für das Skalarprodukt zunächst formal

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i\, \mathbf{e}_i \cdot B_i\, \mathbf{e}_i &= (A_1\, \mathbf{e}_1 + A_2\, \mathbf{e}_2 + A_3\, \mathbf{e}_3) \cdot (B_1\, \mathbf{e}_1 + B_2\, \mathbf{e}_2 + B_3\, \mathbf{e}_3) \\ &= A_1 B_1\, \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + A_2 B_2\, \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + A_3 B_3\, \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \\ &= A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \ . \end{aligned}$$

Um nicht immer formal das Skalarprodukt unter Mitführung der Einheitstensoren $e_1$, $e_2$ und $e_3$ durchführen zu müssen, hat man die sogenannte **Summationskonvention** eingeführt: Treten in einem Ausdruck Indizes doppelt auf, so wird über diese summiert. Dabei werden auch die Einheitstensoren $e_i$ fortgelassen, so dass sich das Skalarprodukt vereinfacht schreiben lässt als

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \ .$$

Das Vektorprodukt $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ kann man mit Hilfe des alternierenden Einheitstensors $\epsilon_{ijk}$ in der Tensorschreibweise wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \epsilon_{ijk}\, A_j\, B_k\, \mathbf{e}_i \\ &= (A_2 B_3 - A_3 B_2)\mathbf{e}_1 + (A_3 B_1 - A_1 B_3)\mathbf{e}_2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1)\mathbf{e}_3 \ . \end{aligned}$$

Der sogenannte *alternierende Einheitstensor* $\varepsilon_{ijk}$, auch **Permutationssymbol** genannt, hat folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1 \\ &\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1 \\ &\varepsilon_{ijk} = 0 \qquad \text{sonst} \end{aligned}$$


Außer Vektoren und Skalaren werden im weiteren noch deren räumliche Ableitungen benötigt. Da im allgemeinen eine Funktion von allen drei Raumkoordinaten abhängt (z. B. $\psi(x,y,z)$), benötigen wir die partiellen Differentiale:

$$\frac{\partial}{\partial x}\ ,\quad \frac{\partial}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial}{\partial z}\quad \text{bzw.}\quad \frac{\partial}{\partial x_1}\ ,\quad \frac{\partial}{\partial x_2}\ ,\quad \frac{\partial}{\partial x_3}\ .$$

Diese werden häufig im sogenannten **Nabla-Operator** $\boldsymbol{\nabla}$ zusammengefasst:

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\ .$$

In der Tensorschreibweise lautet dieser:

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i} = \mathbf{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3}\ .$$

Mit den bisher vereinbarten Schreibweisen wollen wir einige immer wieder auftretende Differentialoperatoren in Vektor- und Tensorschreibweise auflisten. Als Operanden werden zur Veranschaulichung für einen Vektor die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ und für einen Skalar die potentielle Temperatur $\theta$ gewählt.

Entsprechend der Summationskonvention werden in der Tensornotation die Einheitsvektoren $\mathbf{e}$ fortgelassen. Eine Komponente eines Tensors erhält man, indem man statt $i$ die gewünschte Koordinate einsetzt, also z. B. $i = 3$ für die $z$-Koordinate.

Gradient:

$$\boldsymbol{\nabla}\theta = \frac{\partial\theta}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\theta}{\partial z}\mathbf{k}\ ,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_k} = \frac{\partial\theta}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\theta}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial\theta}{\partial x_3}\mathbf{e}_3\ .$$

Divergenz:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\ ,$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\ .$$

Advektion:

$$\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta = u\frac{\partial\theta}{\partial x} + v\frac{\partial\theta}{\partial y} + w\frac{\partial\theta}{\partial z}\ ,$$

$$u_k\frac{\partial\theta}{\partial x_k} = u_1\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial\theta}{\partial x_3}\ .$$

Advektion von $\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v} &= \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)\mathbf{i} \\
&+ \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathbf{j} \\
&+ \left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathbf{k}\ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k} &= \left(u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)\mathbf{e_1} \\
&+ \left(u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{e_2} \\
&+ \left(u_1\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\mathbf{e_3}\ .
\end{aligned}$$

Laplace-Operator:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}^2\theta &= \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\ , \\
\frac{\partial^2\theta}{\partial x_k^2} &= \frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_3^2}\ .
\end{aligned}$$

Rotation:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v} &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{k}\ , \\
\varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} &= \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{e}_3\ .
\end{aligned}$$

Zum Schluss noch einige Regeln zur Vektoranalysis. Es seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ Vektoren und $\psi$ ein Skalar. Für diese gelten folgende Regeln:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\psi = 0 \\
&\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) = 0 \\
&\boldsymbol{\nabla}\cdot(\psi\mathbf{A}) = \psi\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} + (\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\psi \\
&\boldsymbol{\nabla}\times(\psi\mathbf{A}) = \psi\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} + (\boldsymbol{\nabla}\psi)\times\mathbf{A} = \psi\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\psi) \\
&\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) \\
&\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A} + \mathbf{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) \\
&\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}) + (\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A} - \mathbf{B}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}) - (\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B} \\
&\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}) - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} \\
&\mathbf{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) - (\mathbf{A}\times\boldsymbol{\nabla})\times\mathbf{B} = \mathbf{A}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}\ .
\end{aligned}$$