# §3. La méthode de Dirichlet

### 11 – Le théorème de Dirichlet

Lorsque Dirichlet, au début des années 1820, découvre les travaux de Fourier, il cherche à les justifier par des méthodes rigoureuses. Fourier ayant découvert, après des dizaines de pages d'invraisemblables calculs, la formule générale que nous écrivons maintenant

$$\hat{f}(n) = \int f(u)u^{-n}dm(u) \tag{11.1}$$

et Dirichlet ayant entendu dire par Cauchy que la somme d'une série est la limite de ses sommes partielles, il commence par calculer celles d'une série de Fourier (nous simplifions un peu le calcul à l'aide de produits de convolution) :

$$f_N = \sum_{|n|\leq N} f \star \mathbf{e}_n = f \star \Big( \sum_{|n|\leq N} \mathbf{e}_n \Big) = f \star D_N \tag{11.2}$$

où

$$\begin{aligned} D_N(u) = \sum_{|n|\leq N} u^n \quad &= \quad u^{-N} + u^{-N+1} + \ldots + u^N = \\ &= \quad \frac{u^{-N} - u^{N+1}}{1-u} \quad \text{pour } u \neq 1. \end{aligned} \tag{11.3}$$

Il vient donc

$$f_N(u) = f \star D_N(u) = \int_{\mathbb{T}} f\left(uv^{-1}\right) \frac{v^{N+1} - v^{-N}}{v-1}\, dm(v) \tag{11.4}$$

En posant $v = \mathbf{e}(t)$, on a

$$\begin{aligned} D_N(v) \quad &= \quad \frac{\mathbf{e}((N+1)t) - \mathbf{e}(-Nt)}{\mathbf{e}(t) - 1} = \\ &= \quad \frac{\mathbf{e}\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right) - \mathbf{e}\left(-\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\mathbf{e}(t/2) - \mathbf{e}(-t/2)} = \frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t} \end{aligned} \tag{11.5}$$

comme on le voit en multipliant les deux termes de la fraction par $\mathbf{e}(-t/2) = e^{-\pi i t}$ et en utilisant les formules d'Euler. Le calcul suppose évidemment $v \neq 1$, i.e. $t \notin \mathbb{Z}$; la valeur $D_N(1) = 2N+1$ résulte de la définition (3). En passant au langage des fonctions périodiques, les sommes partielles $f_N(t)$ sont donc encore données par

$$f_N(s) = \oint f(s-t)D_N(t)dt = \oint f(s-t)\frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t}\, dt. \tag{11.6}$$

Comme il s'agit des produits de convolution sur $\mathbb{T}$ de $f$ par la suite des fonctions $D_N$ et comme on aimerait bien que le résultat tende vers $f(t)$

lorsque $N$ augmente indéfiniment, il s'impose, à première vue, d'utiliser la méthode des suites de Dirac exposée au n° 5. La condition

$$\int D_N(u)dm(u) = \oint D_N(s)ds = 1,$$

est vérifiée car cette valeur moyenne est le coefficient de Fourier d'indice 0 du polynôme trigonométrique $D_N$. Mais les $D_N$ changent de plus en plus souvent de signe lorsque $N$ augmente; il n'est donc pas évident (ni même exact) que l'intégrale de $|D_N(u)|$ reste bornée lorsque $N$ augmente. Enfin, si l'on se place dans un arc $|u-1| > \delta$ de $\mathbb{T}$, on a $|D_N(u)| \leq \left|1 - u^{2N+1}\right| / \delta$ d'après (3), ce qui ne suffit pas à faire tendre $D_N(u)$ vers 0. Bref, mauvaise idée.

Au reste, si les $D_N$ formaient une suite de Dirac, la série de Fourier de toute fonction continue convergerait uniformément vers celle-ci d'après le lemme du n° 5 : ce serait le Paradis. Sur la Terre, tout en convergeant "presque partout" au sens de la mesure de Lebesgue[22] (résultat célèbre et fort difficile de Lars Carleson, 1966), elle peut fort bien diverger pour des valeurs de $u$ formant un ensemble non dénombrable[23]. Autrement dit, la méthode ne fonctionne pas parce que le résultat auquel elle conduirait est faux.

Né et mort (1805–1859) trop tôt pour avoir entendu parler de Lebesgue, Dirac, Carleson et même du théorème d'approximation de Weierstrass, Dirichlet ne se pose pas ces questions et, tenant compte de (4) – et en réalité de (5) – calcule la différence

$$f_N(u) - f(u) = \int \left[f(uv^{-1}) - f(u)\right] D_N(v)dm(v) \tag{11.7}$$

ou, en remplaçant $v$ par $v^{-1}$ puisque $D_N$ est symétrique,

[22] On a défini au Chap. V, n° 11 la mesure (de Lebesgue) d'un ouvert $U$ contenu dans un intervalle compact; le n° 31, où l'on a défini l'intégrale d'une fonction sci positive sur $\mathbb{R}$, permettrait de même de définir la mesure d'un ouvert quelconque $U \subset \mathbb{R}$. Cela étant, une partie $N$ de $\mathbb{R}$ est dite *de mesure nulle* si, pour tout $r > 0$, il existe un ouvert $U$ tel que $N \subset U$, $m(U) < r$. En choisissant des $r$ de la forme $1/n$, cela signifie aussi que $N$ est contenu dans l'intersection d'une suite décroissante d'ouverts $U_n$ dont les mesures tendent vers 0. Ceci posé, une propriété – la convergence d'une série de fonctions par exemple – est dite *vraie presque partout* si l'ensemble des $x$ où elle est fausse est de mesure nulle. Voir l'Appendice au Chap. V.

[23] Le premier exemple est de l'Allemand P. du Bois-Reymond : "Avant 1873, c'était bien la conviction générale, entre autres de Lejeune Dirichlet, de Riemann, de Weierstrass, que cette série converge toujours vers la limite $f(x)$ quand $f(x)$ est continue. Eh bien, à force d'essayer de trouver une démonstration pour ce théorème, je parvins à trouver un raisonnement qui prouve le contraire". Lettre de 1883 au Français G. Halphen (Dugac, p. 62). En 1926, le Soviétique A. N. Kolmogoroff a produit une fonction intégrable (mais non de *carré* intégrable) au sens de Lebesgue dont la série de Fourier *diverge partout*. Newton aurait probablement dit qu'on ne rencontre pas de telles fonctions dans la Nature.

$$f_N(u) - f(u) = \int \frac{f(uv) - f(u)}{v - 1} \left(v^{N+1} - v^{-N}\right) dm(v) \tag{11.8}$$

Le second membre de (8) ressemble à la différence entre les coefficients de Fourier d'indices $-N-1$ et $N$ de la fonction

$$g_u(v) = [f(uv) - f(u)]/(v - 1); \tag{11.9}$$

mais cette fonction, aussi réglée que $f$ pour $v \neq 1$, n'a a priori aucun sens pour $v = 1$; son intégrale peut fort bien diverger au voisinage de ce point, ce qui interdit de parler de ses coefficients de Fourier; l'intégrale (8) n'a de sens qu'en raison du fait qu'elle fait intervenir le quotient $\left(v^{N+1} - v^{-N}\right)/(v-1)$, polynôme trigonométrique partout continu.

Puisque $v - 1 = \mathbf{e}(t) - 1 \sim 2\pi i t$ lorsque $t$ tend vers 0, i.e. lorsque $v$ tend vers 1, on a toutefois

$$\lim[f(uv) - f(u)]/(v - 1) = f'(s)/2\pi i \tag{11.10}$$

*si* cette dérivée existe au point $u = \mathbf{e}(s)$ considéré. La fonction $g_u$ possède alors des valeurs limites à gauche et à droite en *tout* point $v \in \mathbb{T}$, donc est réglée dans $\mathbb{T}$ tout entier. Dans ce cas, il est légitime d'écrire que

$$f_N(u) - f(u) = \widehat{g_u}(-N-1) - \hat{g}_u(N) \tag{11.11}$$

et pour montrer que le premier membre tend vers 0, il suffit de savoir que les coefficients de Fourier d'une fonction réglée tendent vers 0 à l'infini, ce que *l'inégalité* de Parseval-Bessel rend évident sans recours au théorème de Weierstrass. Donc :

**Théorème 7.** *Soit $f$ une fonction périodique réglée. On a*

$$f(u) = \sum \hat{f}(n)u^n = \lim_{N \to +\infty} \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n)u^n \tag{11.12}$$

*en tout point $u \in \mathbb{T}$ où $f$ est dérivable.*

**Corollaire (Riemann).** *Le comportement dans un intervalle ouvert de la série de Fourier d'une fonction périodique réglée $f$ ne dépend que du comportement de $f$ dans cet intervalle.*

Si en effet $f = g$ dans un intervalle ouvert $U$, la fonction $f - g$ admet en tout point de $U$ une dérivée. Sa série de Fourier converge donc vers 0 en tout $t \in U$. Cela signifie que, pour tout $t \in U$, deux cas seulement sont possibles : (i) les séries de Fourier de $f$ et $g$ en $t$ sont simultanément divergentes, (ii) elles sont simultanément convergentes et ont la même somme. Autre traduction : si deux fonctions périodiques réglées $f$ et $g$ sont égales dans un intervalle de centre $t$, leurs séries de Fourier en $t$ sont soit simultanément divergentes, soit simultanément convergentes avec la même somme au voisinage de $t$.

Dirichlet va en fait un peu plus loin que le théorème 1, car la somme de la série des signaux carrés, pour ne mentionner qu'elle, n'est pas dérivable au sens strict aux points où elle est discontinue; elle y possède seulement des dérivées à droite et à gauche; il faut donc modifier les calculs précédents. Or la symétrie de la fonction $D_N$ montre que son intégrale étendue à $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ ou à $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est égale à $\frac{1}{2}$; cela permet de remplacer (7), ou sa version sur $\mathbb{R}$, par

$$\begin{aligned}(11.13)\qquad f_N(s) - \frac{1}{2}[f(s+) + f(s-)] &= \\ = \int_0^{1/2} &[f(s+t) - f(s+)]D_N(t)dt \\ &+ \int_0^{1/2} [f(s-t) - f(s-)]D_N(t)dt.\end{aligned}$$

Dans la première figure le quotient

$$[f(s+t) - f(s+)]/\sin \pi t.$$

Si $f$ possède au point $s$ une dérivée à droite (définition évidente), ce quotient tend vers une limite lorsque $t > 0$ tend vers 0; pour $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, ce quotient possède donc, comme $f$, des valeurs limites à droite et à gauche; la première intégrale est donc, comme dans (11), la valeur en $N$ de la transformée de Fourier d'une fonction périodique réglée nulle dans $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$, donc tend vers 0 lorsque $N$ augmente. Même raisonnement pour la seconde intégrale. D'où un résultat simple, qui a été raffiné de beaucoup de façons (voir par exemple A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, Cambridge UP, 1969) :

**Théorème 7 bis (Dirichlet, 1829).** *Soit $f$ une fonction périodique réglée et $f_N$ la somme partielle d'ordre $N$ de sa série de Fourier. On a*

$$(11.14)\qquad \lim f_N(s) = \frac{1}{2}[f(s+) + f(s-)]$$

*en tout point où $f$ possède des dérivées à droite et à gauche.*

Le résultat précédent, que Dirichlet démontre pour des fonctions monotones par morceaux, s'applique notamment au cas où $f$ est une primitive périodique d'une fonction réglée; $f$ est alors continue et possède en chaque point des dérivées à gauche et à droite. Il s'ensuit que la série de Fourier de $f$ converge partout vers $f$, mais le théorème 4 va plus loin : la série est absolument convergente.

*Exemple 1. Développement de* $\cot z$ *en série de fractions rationnelles.* Considérons sur $\mathbb{R}$ la fonction de période 1 donnée par

$$(11.15)\qquad f(t) = \cos 2\pi z t \qquad \text{pour } |t| < \frac{1}{2},$$

où $z \in \mathbb{C}$ n'est pas un entier rationnel puisqu'autrement il n'y aurait pas de problème. Comme on a $f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$, la fonction périodique qui prolonge $f$ à tout $\mathbb{R}$ est partout continue et il est clair qu'elle vérifie les hypothèses du théorème 1 bis. On a

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos 2\pi z t . e^{-2\pi i n t} dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[e^{2\pi i(z-n)t} + e^{-2\pi i(z+n)t}\right] dt = \\ &= \frac{1}{2}\left.\frac{e^{2\pi i(z-n)t}}{2\pi i(z-n)} + \frac{e^{-2\pi i(z+n)t}}{-2\pi i(z+n)}\right|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = (-1)^n \frac{z . \sin \pi z}{\pi(z^2-n^2)}\end{aligned}$$

comme on le voit en utilisant les formules d'Euler. On a donc

$$\pi . \cos 2\pi z t = \sum (-1)^n \frac{z . \sin \pi z}{z^2 - n^2}\, e^{2\pi i n t} \quad \text{pour } |t| \leq \frac{1}{2}, \tag{11.16}$$

série de Fourier absolument convergente. En particulier, pour $t = \frac{1}{2}$,

$$\cot \pi z = z \sum \frac{1}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}. \tag{11.17}$$

C'est la formule d'Euler que nous avons déjà rencontrée plusieurs fois et établie au Chap. IV, n° 18, en utilisant le produit infini du sinus. La méthode que nous venons d'exposer – l'essentiel s'en trouve chez Fourier – en est sûrement la plus simple démonstration.

Pour $t = 0$, (16) fournit le développement

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2}. \tag{11.18}$$

*Exemple 2. Polynômes de Bernoulli.* Rappelons (Chap. VI, n° 12) que les polynômes de Bernoulli sont définis par les relations de récurrence

$$B_0(x) = 1, \qquad B_k'(x) = kB_{k-1}(x) \tag{11.19}$$

et par la condition

$$B_k(0) = B_k(1) \qquad \text{pour } k \geq 2. \tag{11.20}$$

L'inventeur ne connaissait pas les séries de Fourier, mais la condition (20) est exactement ce qu'il faut pour transformer les $B_k$, pour $k \geq 2$, en fonctions périodiques continues $B_k^*$ en posant

$$B_k^*(t) = B_k(t) \qquad \text{pour } 0 \leq t \leq 1 \tag{11.21}$$

comme nous l'avons fait au Chap. VI à propos de la formule d'Euler-Maclaurin. Les hypothèses des théorèmes de Dirichlet sont évidemment vérifiées. Adoptant pour une fois la notation $a_n(f) = \hat{f}(n)$, nous avons, en intégrant par parties et en supposant $k \geq 2$, $n \neq 0$,

$$a_n\left(B_k^*\right) = \int_0^1 B_k(t)\mathbf{e}_{-n}(t)dt = \frac{1}{2\pi in}\int_0^1 B_k'(t)\mathbf{e}_{-n}(t)dt;$$

(19) montre alors que

$$(11.22) \qquad a_n\left(B_k^*\right) = ka_n\left(B_{k-1}^*\right)/2\pi in \qquad (k \geq 2,\ n \neq 0).$$

En écrivant cette relation pour $k-1, k-2, \ldots, 2$ on obtient

$$(11.23) \qquad a_n\left(B_k^*\right) = k!a_n\left(B_1^*\right)/(2\pi in)^{k-1}.$$

Comme $B_1(t) = t - \frac{1}{2}$ et comme une constante a tous ses coefficients de Fourier nuls pour $n \neq 0$, on a

$$a_n\left(B_1^*\right) = \int_0^1 t\mathbf{e}_{-n}(t)dt = -\frac{t\mathbf{e}_{-n}(t)}{2\pi in}\bigg|_0^1 + \frac{1}{2\pi in}\int_0^1 \mathbf{e}_n(t)dt;$$

la dernière intégrale est nulle et il reste

$$(11.24) \qquad a_n\left(B_1^*\right) = -1/2\pi in,$$

d'où finalement

$$(11.25) \qquad a_n\left(B_k^*\right) = -k!/(2\pi in)^k \qquad \text{pour } k \geq 1,\ n \neq 0.$$

Pour $n = 0$, on a $(k+1)a_0\left(B_k^*\right) = \oint B_{k+1}'(t)dt = 0$ d'après (20) si $k \geq 1$, et $a_0\left(B_0^*\right) = 1$ trivialement.

La formule (25) montre que la série de Fourier est absolument convergente pour $k \geq 2$, d'où

$$(11.26) \qquad \sum \mathbf{e}_n(t)/(2\pi in)^k = -B_k(t)/k! \quad \text{pour } k \geq 2,\ 0 \leq t \leq 1,$$

la somme étant étendue à tous les $n \in \mathbb{Z}$ non nuls. Pour $k = 2$ par exemple, on trouve

$$\sum_1^\infty \cos(2\pi nt)/\pi^2 n^2 = t^2 - t + 1/6 \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

Pour $t = 0$, le premier membre de (26) se réduit à $\sum 1/(2\pi in)^k$, donc est nul pour $k$ impair; pour $k = 2p$, $p \geq 1$, on trouve par contre

$$(11.27) \qquad \sum 1/n^{2p} = (-1)^{p+1}(2\pi)^{2p}b_{2p}/(2p)!$$

où $b_k = B_k(0)$ (Chap. VI, (13.7)). On n'oubliera pas que le premier membre est deux fois la somme de la série d'Euler.

Pour $k = 1$, la fonction $B_1^*$, égale à $t - \frac{1}{2}$ pour $0 < t < 1$, est discontinue aux points $t \in \mathbb{Z}$. En groupant les termes en $n$ et $-n$ de sa série de Fourier, on retrouve

$$(11.28) \qquad \frac{1}{2} - t = \sum_{n=1}^\infty \sin(2\pi nt)/\pi n \qquad \text{pour } 0 < t < 1,$$

la série étant nulle pour $t = 0$ ou $1$ comme on peut le vérifier sans invoquer Dirichlet. Pour $t = \frac{1}{4}$, on obtient la série de Leibniz pour $\pi/4$.

## 12 – Le théorème de Fejér

Nous avons observé au n° précédent que les noyaux de Dirichlet ne constituent pas une suite de Dirac au sens du n° 5. A la fin du XIX[e] siècle, l'Italien Cesàro a l'idée de rendre convergentes des suites divergentes $(u_n)$ en considérant les moyennes arithmétiques

$$v_n = (u_1 + \ldots + u_n)/n. \tag{12.1}$$

Si vous appliquez cela à la suite $1, 0, 1, 0, \ldots$, vous constatez qu'elle "converge" alors vers $\frac{1}{2}$. La méthode ne fonctionne pas toujours, même si on l'itère – toute suite qui tend vers $+\infty$ refuse le procédé –, mais il est rassurant de constater du moins que, si la suite converge vers $u$ au sens usuel, elle converge aussi vers $u$ au sens de Cesàro : si en effet on a $|u - u_n| < r$ pour $n > p$ et si l'on écrit que

$$v_n = (u_1 + \ldots + u_p)/n + (u_{p+1} + \ldots + u_n)/n,$$

le premier quotient est, pour $p$ donné, $< r$ pour $n$ grand; en remplaçant dans le second chaque $u_k$ par $u$, on commet une erreur majorée par $(n-p)r/n < r$, d'où une erreur totale $< 2r$ pour $n$ grand, cqfd.

On peut aussi l'appliquer à une série $\sum u_n$ en remplaçant ses sommes partielles standard $s_n = u_1 + \ldots + u_n$ par leurs moyennes

$$\sigma_n = (s_1 + \ldots + s_n)/n. \tag{12.2}$$

Cela permet de rendre convergentes des séries qui ne l'étaient pas; on retrouve par exemple la formule

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots = \frac{1}{2},$$

conformément aux anticipations quelque peu prématurées de Jakob Bernoulli (Chap. II, n° 7). Le sujet a fait l'objet de nombreuses recherches, mais c'est de l'analyse "fine" rarement utilisée.

Si l'on reprend la formule de Dirichlet

$$f_N(t) = \oint f(t-x)D_N(x)dx = f \star D_N(t)$$

pour le calcul des sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction $f$, il est clair que les moyennes arithmétiques de celles-ci sont les fonctions $f \star F_N$ où la fonction

$$F_N = (D_0 + \ldots + D_{N-1})/N \tag{12.3}$$

a été introduite par le Hongrois L. Fejér (1880–1959).

Contrairement aux $D_N$, les fonctions de Fejér forment une suite de Dirac sur le cercle unité $\mathbb{T}$. Pour le voir, il faut les calculer. Posant $q = e^{\pi i t}$, on a d'après (10.5)

$$D_k(t) = \left(q^{2k+1} - q^{-2k-1}\right) / \left(q - q^{-1}\right),$$

d'où, en sommant de 0 à $N - 1$,

$$\begin{aligned} N\left(q - q^{-1}\right) F_N(t) = \\ &= \left(q + q^3 + \ldots + q^{2N-1}\right) - \left(q^{-1} + q^{-3} + \ldots + q^{-2N+1}\right) = \\ &= q\left(q^{2N} - 1\right) / \left(q^2 - 1\right) - q^{-1}\left(q^{-2N} - 1\right) / \left(q^{-2} - 1\right) = \\ &= \left(q^{2N} - 2 + q^{-2N}\right) / \left(q - q^{-1}\right) \end{aligned}$$

et finalement

$$F_N(t) = \frac{\left(q^N - q^{-N}\right)^2}{N\left(q - q^{-1}\right)^2} = \frac{\sin^2 \pi N t}{N \sin^2 \pi t}, \tag{12.4}$$

pour $t \neq 0$, avec $F_N(0) = N$ pour cause de continuité ou d'après (3).

Pour montrer que les $F_N$ constituent, sur $\mathbb{T}$, une suite de Dirac, il suffit alors de montrer que les $F_N$ sont positives (évident), que leurs intégrales sur $\mathbb{T}$ sont égales à 1 (évident car c'est le cas des $D_k$, donc de leurs moyennes arithmétiques) et enfin que, quels que soient $r > 0$ et $\delta > 0$, la contribution de l'arc $|u - 1| > \delta$ de $\mathbb{T}$ à l'intégrale de $F_N$ est $< r$ pour $N$ grand ou, ce qui revient au même, que l'on a

$$\int_{\delta \leq |t| \leq 1/2} F_N(t)dt < r \qquad \text{pour } N \text{ grand.} \tag{12.5}$$

Mais dans ce domaine d'intégration, on a d'après (4)

$$F_N(t) \leq 1/N \sin^2 \pi\delta, \tag{12.6}$$

de sorte que les $F_N$ convergent uniformément vers 0 dans $|u - 1| \geq \delta$ quel que soit $\delta > 0$, cqfd.

**Théorème 8 (Fejér).** *Pour toute fonction périodique réglée $f$, les moyennes arithmétiques des sommes partielles de la série de Fourier de $f$ convergent vers $\frac{1}{2}[f(t+) + f(t-)]$ quel que soit $t$. Si $f$ est continue dans un intervalle ouvert $J$, la convergence vers $f(t)$ est uniforme sur tout compact $K \subset J$.*

La seconde assertion résulte du lemme du n° 5.

Pour établir la première, on écrit comme en (11.13) que

$$\begin{aligned} f \star F_N(t) - \frac{1}{2}[f(t+) + f(t-)] = \\ = \int [f(t+s) - f(t+)]F_N(s)ds + \int [f(t-s) - f(t-)]F_N(s)ds, \end{aligned} \tag{12.7}$$

les intégrales étant étendues à $(0, \frac{1}{2})$, et on raisonne comme au n° 5.

On notera en passant qu'en supposant $f$ continue partout, on obtient une démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass du n° 6 (sans l'avoir utilisé préalablement ...).

**Corollaire.** *Soit $f$ une fonction périodique réglée. On a*

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{-N}^{N}\hat{f}(n)\mathbf{e}_n(t) = \frac{1}{2}[f(t+) + f(t-)] \tag{12.8}$$

*en tout point où la série de Fourier de $f$ converge.*

Car les sommes partielles $f_N(t)$, si elles convergent, convergent vers la même limite que leurs moyennes arithmétiques, lesquelles convergent toujours vers le second membre de (8). Le corollaire ne prétend pas que la relation (8) soit vraie quels que soient $t$ et $f$.

## 13 – Séries de Fourier uniformément convergentes

Le théorème de Dirichlet montre la convergence *simple* de la série de Fourier d'une fonction périodique réglée en tous les points où celle-ci possède des dérivées à droite et à gauche. Dans le cas des signaux carrés, nous avons montré à l'aide de calculs ad hoc (Chap. III, n° 11) qu'en fait la série converge *uniformément* sur tout intervalle compact ne contenant pas de discontinuités de $f$. On peut raffiner la démonstration du théorème 7 de façon à couvrir ce cas et beaucoup d'autres, par exemple la série (11.28).

Les raisonnements qui suivent étant quelque peu subtils, le lecteur est invité à les considérer plutôt comme un exercice.

**Théorème 9.** *Soient $f$ une fonction réglée sur $\mathbb{T}$ et $J$ un arc ouvert dans lequel $f$ est une primitive d'une fonction réglée (par exemple, est de classe $C^1$). Alors la série de Fourier de $f$ converge vers $f$ uniformément sur tout arc compact $K \subset J$.*

La démonstration que nous allons détailler fait appel à des techniques d'usage courant en analyse fonctionnelle et peut se décomposer en plusieurs parties.

(i) Considérons à nouveau la fonction

$$g_u(v) = [f(uv) - f(u)]/(v-1) \tag{$*$}$$

utilisée pour démontrer le théorème de Dirichlet. Comme on l'a vu alors, $g_u$ est réglée dans $\mathbb{T}$ si $f$ admet en $u$ des dérivées à droite et à gauche, donc, dans les hypothèses du théorème 9, pour tout $u \in J$. On a bien alors

$$f_N(u) - f(u) = \widehat{g_u}(-N-1) - \widehat{g_u}(N)$$

et le théorème revient à montrer que, lorsque $n \to +\infty$, *les fonctions*

$$u \mapsto \widehat{g_u}(n) = G_n(u)$$

*convergent vers 0 uniformément sur tout compact $K$ de $J$*, i.e. que, pour tout $r > 0$, il existe un $N$ tel que

(13.1) $$(u \in K) \;\;\&\;\; (|n| > N) \Longrightarrow |\widehat{g_u}(n)| < r.$$

(ii) Considérons l'espace vectoriel[24] $L^1(\mathbb{T})$ des fonctions réglées sur $\mathbb{T}$, muni de la norme $\|f\|_1 = \int |f(v)|dm(v)$. On a $g_u \in L^1(\mathbb{T})$ pour tout $u \in J$, et la majoration la plus simple des coefficients de Fourier d'une fonction intégrable montre que l'on a

(13.2) $$|G_n(u') - G_n(u'')| = |\widehat{g_{u'}}(n) - \widehat{g_{u''}}(n)| \leq \|g_{u'} - g_{u''}\|_1$$

quels que soient $u'$ et $u'' \in J$.

Supposons démontré que l'application $u \mapsto g_u$ de $J$ dans $L^1(\mathbb{T})$ est continue, i.e. que pour tout $u \in J$ et tout $r > 0$, il existe un $r' > 0$ tel que

(13.3) $$(u' \in J) \;\;\&\;\; (|u' - u| < r') \Longrightarrow \|g_{u'} - g_u\|_1 < r.$$

La relation (2) montre alors que

(13.4) $$(u' \in J) \;\;\&\;\; (|u' - u| < r') \Longrightarrow |G_n(u') - G_n(u)| < r \quad \text{pour tout } n.$$

Cela signifie exactement que les fonctions $G_n$ sont *équicontinues* dans $J$ (Chap. III, n° 5). Le fait que les $G_n(u)$ convergent vers 0 uniformément sur tout compact $K \subset J$ résultera alors du lemme général suivant :

**Lemme.** *Si une suite de fonctions $f_n$ définies et équicontinues dans un compact $K$ converge simplement dans $K$, elle converge uniformément dans $K$.*

Soit en effet $f$ la limite des $f_n$ et choisissons un $r > 0$. Pour tout $a \in K$, il existe dans $K$ une boule ouverte $B(a)$ de centre $a$ telle que

$$x \in B(a) \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(a)| \leq r \quad \text{pour tout } n;$$

c'est la définition de l'équicontinuité. L'inégalité est encore valable pour $f$ par passage à la limite, donc entraîne la continuité de $f$; comme $|f_n(a) - f(a)| \leq r$ pour $n$ grand, on en déduit que, pour $n$ grand, on a

$$|f(x) - f_n(x)| \leq 3r$$

pour tout $x \in B(a)$. Mais puisque $K$ est compact, on peut (Borel-Lebesgue) le recouvrir à l'aide d'un nombre fini de boules $B(a_i)$. L'inégalité ci-dessus est alors, pour $n$ grand, valable dans toutes ces boules, donc dans $K$, cqfd.

(iii) Pour démontrer la continuité de l'application $u \mapsto g_u$ de $J$ dans $L^1(\mathbb{T})$, considérons d'abord, dans cette partie de la démonstration, le numérateur $f(uv) - f(u)$ de $(*)$. C'est la différence entre, d'une part, la fonction $f_u$ : $v \mapsto f(uv)$ obtenue en "translatant" la fonction $f$, d'autre part la fonction

[24] L'authentique espace $L^1$ de la théorie de Lebesgue contient bien d'autres fonctions, mais comme il contient à tout le moins les fonctions réglées c'est bien de lui qu'il s'agit ici.

constante $c_u : v \mapsto f(u)$. Comme on a $\|c_{u'} - c_{u''}\|_1 = |f(u') - f(u'')|$, il est clair que $u \mapsto c_u$ est une application continue de $J$ dans $L^1(\mathbb{T})$.

Quant à $u \mapsto f_u$, c'est une application continue de $\mathbb{T}$ (et non pas seulement de $J$) dans $L^1(\mathbb{T})$. C'est évident si $f$ est continue dans $\mathbb{T}$, car $f$ étant alors uniformément continue dans $\mathbb{T}$, on a $|f(u'v) - f(u''v)| \leq r$ pour tout $v \in \mathbb{T}$, donc aussi $\|f_{u'} - f_{u''}\|_1 \leq r$, dès que $|u' - u''| < r'$. Dans le cas général, choisissons, grâce au lemme du n° 8, une fonction $\varphi \in C^0(\mathbb{T})$ telle que $\int |f(v) - \varphi(v)| dm(v) = \|f - \varphi\|_1 < r$. Puisque l'on intègre par rapport à la mesure *invariante*, on a encore $\|f_u - \varphi_u\|_1 < r$ pour tout $u \in \mathbb{T}$. Si donc l'on choisit des $\varphi \in C^0(\mathbb{T})$ qui convergent vers $f$ dans $L^1(\mathbb{T})$, les applications $u \mapsto \varphi_u$ correspondantes de $\mathbb{T}$ dans $L^1(\mathbb{T})$ convergent vers $u \mapsto f_u$ *uniformément* dans $\mathbb{T}$. Une limite uniforme de fonctions continues à valeurs dans n'importe quel espace métrique étant encore continue, le résultat cherché s'ensuit.

Nous voyons donc que le numérateur de la formule $(*)$, considéré comme fonction de $u \in J$ à valeurs dans $L^1(\mathbb{T})$, est continu.

(iv) Il faut maintenant tenir compte du dénominateur $v - 1$ et, pour cela, utiliser les hypothèses de l'énoncé. Nous allons d'abord faire la démonstration dans le cas où $f = 0$ dans $J$; on montrera ensuite que le cas général s'y ramène.

Comme les compacts $K$ et $\mathbb{T} - J$ sont disjoints, leur distance $d$ est $> 0$. Puisque $|uv - u| = |v - 1|$, on voit que

$$(13.5) \qquad (u \in K) \ \& \ (|v-1| < d) \implies uv \in J \implies f(uv) = f(u) = 0.$$

Lorsqu'on se restreint aux $u \in K$, les fonctions de $v$ figurant au numérateur de la formule $(*)$ sont donc toutes nulles dans l'arc $|v - 1| < d$ de $\mathbb{T}$. Posons alors

$$(13.6) \qquad h(v) = (v-1)^{-1} \quad \text{si } |v-1| > d, \ h(v) = 0 \text{ sinon.}$$

La formule définissant $g_u$ montre que, pour $u \in K$, on a

$$(13.7) \qquad g_u(v) = h(v)\,[f_u(v) - c_u(v)] \quad \text{pour tout } v \in \mathbb{T}.$$

C'est en effet la définition de $g_u$ dans l'arc $|v-1| > d$ et, d'après (5), se réduit à l'identité $0 = 0$ dans l'arc $|v - 1| < d$.

Or on a $|h(v)| < 1/d$ quel que soit $v \in \mathbb{T}$ d'après (6). La relation (7) montrant que l'on a $g_u = h\,(f_u - c_u)$ pour $u \in K$ (et non pour tout $u \in \mathbb{T}$) et l'application $u \mapsto f_u - c_u$ de $\mathbb{T}$ dans $L^1(\mathbb{T})$ étant continue d'après le point (iii), il reste donc à montrer que la multiplication par la fonction $h$, *bornée* et indépendante de $u$, préserve la continuité. Ce n'est pas plus difficile que dans le cadre des fonctions à valeurs complexes : il suffit d'écrire que, quelles que soient $f', f'' \in L^1(\mathbb{T})$, on a

$$\|hf' - hf''\|_1 = \int |h(v)|.|f'(v) - f''(v)| dm(v) \leq \|h\|.\, \|f' - f''\|_1$$

où $\|h\| = \sup |h(v)|$ comme toujours. Comme, pour $u', u'' \in K$ assez voisins, la distance de $f' = f_{u'} - c_{u'}$ à $f'' = f_{u''} - c_{u''}$ est arbitrairement petite, il en est de même de la distance de $g_{u'}$ à $g_{u''}$, ce qui prouve le théorème dans le cas où $f = 0$ dans $J$.

(v) Reste à passer au cas général. L'arc $K$ étant compact et l'arc $J$ ouvert, la distance $d$ de $K$ au compact $\mathbb{T} - J$ est $> 0$, de sorte que l'arc ouvert $J'$ de $\mathbb{T}$ défini par $d(u, K) < d/2$ vérifie $K \subset J' \subset J$. En modifiant le graphe de $f$ en dehors de $J'$, on construit une fonction $g$ qui, dans $\mathbb{T}$ tout entier, est une primitive d'une fonction réglée et qui, dans $J'$, coïncide avec $f$. Comme $f - g$ est nulle dans $J'$, sa série de Fourier converge uniformément vers 0 dans $K$ d'après ce que nous savons déjà. Or la série de Fourier de $g$ converge vers $g$ uniformément dans $\mathbb{T}$ (n° 9, théorème 4) et donc vers $f$ uniformément dans $K$. La relation $f = (f - g) + g$ achève alors la démonstration.