2 Grundlagen

2.1 Maxwell-Gleichungen

2.1.1 Integralform

Ausgangspunkt. Licht lässt sich bei seiner Ausbreitung als elektromagnetische Welle auffassen [2.1]. Elektromagnetische Wellen genügen den aus der Feldtheorie bekannten Maxwell-Gleichungen in Integral- oder Differenzialform.

Feldbegriff. Unter einem Feld versteht man dabei die Gesamtheit der allen Punkten des leeren oder stofferfüllten Raumes zugeordneten Werte einer physikalischen Größe, der Feldgröße. Als Feldgrößen verwendet man orts- und zeitabhängige Vektoren der elektrischen und magnetischen Feldstärke sowie der elektrischen Verschiebungsflussdichte, der magnetischen Flussdichte und der elektrischen Stromdichte.

Gleichungssystem. Die Maxwell-Gleichungen charakterisieren ein elektromagnetisches Feld vollständig und lauten:

- Integrales Induktionsgesetz

$$\boxed{\oint_r \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_F \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{F}} \tag{2.1}$$

  In Worten: Das Linienintegral der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ über die geschlossene Kurve r ist gleich dem Flächenintegral über die negative zeitliche Änderung der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$, wobei F die von der geschlossenen Kurve r eingespannte Fläche darstellt.

- Integrales Durchflutungsgesetz

$$\boxed{\oint_r \vec{H}\cdot d\vec{r} = \int_F \left(\vec{S} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{F}} \tag{2.2}$$

  In Worten: Das Linienintegral der magnetischen Feldstärke $\vec{H}$ über die geschlossene Kurve r ist gleich dem Flächenintegral über die elektrische Stromdichte $\vec{S}$ plus der zeitlichen Änderung der elektrischen Verschiebungsflussdichte $\vec{D}$, wobei F die von der geschlossenen Kurve r eingespannte Fläche bezeichnet.

- Grundgesetz der Elektrostatik in integraler Form

$$\boxed{\oint_F \vec{D}\cdot d\,\vec{F} = \int_V \rho dV} \tag{2.3}$$

  In Worten: Das Hüllenintegral der elektrischen Verschiebungsflussdichte $\vec{D}$ über die Hüllfläche F ist gleich dem Volumenintegral über die Raumladungsdichte ρ, wobei V das von der Hüllfläche F eingeschlossene Volumen darstellt.

- Grundgesetz der Magnetostatik in integraler Form

$$\boxed{\oint_F \vec{B} \cdot d\vec{F} = 0} \tag{2.4}$$

In Worten: Das Hüllenintegral der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$ über die Hüllfläche F ist gleich Null.

- Materialgleichungen

$$\vec{S} = \underline{\kappa}\, \vec{E} \tag{2.5}$$

$$\vec{D} = \underline{\varepsilon}\, \vec{E} \tag{2.6}$$

$$\vec{B} = \mu\, \vec{H} \tag{2.7}$$

Gleichung 2.5 beschreibt die leitenden Eigenschaften eines Stoffes mit dem Leitfähigkeitstensor $\underline{\kappa}$, der vorerst Diagonalform besitzen soll. 2.6 ist die Materialgleichung für die dielektrischen Eigenschaften eines Stoffes mit dem Dielektrizitätstensor $\underline{\varepsilon}$, hier ebenfalls in Diagonalform. Diese Tensoren sind in 2.8 für das kartesische x, y, z-Koordinatensystem gezeigt.

$$\underline{\kappa} = \begin{pmatrix} \kappa_x & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_y & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_z \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

2.8 beschreibt isotrope Stoffe, bei denen die Stromdichte $\vec{S}$ bzw. die Verschiebungsflussdichte $\vec{D}$ mit der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ jeweils ein Paar gleichgerichteter Vektoren bilden, falls für die Hauptleitfähigkeiten und Hauptdielektrizitäten gilt:

$$\begin{aligned} \kappa_x = \kappa_y = \kappa_z = \kappa &\rightarrow \quad \vec{S} \parallel \vec{E} \\ \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon &\rightarrow \quad \vec{D} \parallel \vec{E} \end{aligned} \tag{2.9}$$

In allen anderen Fällen kennzeichneten $\underline{\kappa}$ und $\underline{\varepsilon}$ anisotrope Stoffe, bei denen $\vec{S}$ bzw. $\vec{D}$ und $\vec{E}$ unterschiedliche Richtungen aufweisen. 2.7 beschreibt die magnetischen Materialeigenschaften, vermittelt durch die Permeabilität μ. Es wird vorausgesetzt, dass μ gleich der Induktionskonstanten μ_o für die zu behandelnden optischen Netzwerke sei:

$$\boxed{\mu = \mu_o} \tag{2.10}$$

Außerdem sollen die Voraussetzungen

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\kappa} &= const. \\ \underline{\varepsilon} &= const. \\ \mu &= const. \end{aligned}} \tag{2.11}$$

für lineare und homogene Stoffe gelten. Bei linearen Stoffen hängen $\underline{\kappa}, \underline{\varepsilon}$ und μ nicht von den jeweiligen Feldstärken in 2.5 bis 2.7 ab. Homogenität bedeutet, dass $\underline{\kappa}, \underline{\varepsilon}$ und μ nicht von den Ortskoordinaten abhängen.

2.1.2 Differenzialform

Integralsätze. Ausgangspunkt zur Ableitung der Maxwell-Gleichungen in Differenzialform sind die Integralsätze von Gauß und Stokes.

Der Integralsatz von Gauß ermöglicht die Umformung zwischen Hüllen- und Volumenintegral in der Form

$$\boxed{\oint_F \vec{A}\cdot d\vec{F} = \int_V div\,\vec{A}\,dV}, \tag{2.12}$$

wobei $\vec{A}$ einen beliebigen Vektor und $div\,\vec{A}$ die Divergenz von $\vec{A}$ im jeweiligen Raumpunkt darstellt [2.2].

Der Integralsatz von Stokes gestattet die Umformung zwischen Umlauf- und Flächenintegral in folgender Form:

$$\boxed{\oint_r \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_F rot\,\vec{A}\cdot d\vec{F}} \tag{2.13}$$

$rot\,\vec{A}$ ist die Rotation des Vektors $\vec{A}$ im entsprechenden Raumpunkt [2.2].

Gleichungssystem. Mit Hilfe der Integralsätze von Gauß und Stokes erhält man die Maxwell-Gleichungen in Differenzialform [2.3].

- Induktionsgesetz in Differenzialform

$$\boxed{rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \tag{2.14}$$

Beweis:

$$\oint_r \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_F rot\,\vec{E}\cdot d\vec{F} = -\int_F \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{F}$$

Die beiden Flächenintegrale sind identisch für gleiche Integranden. Daraus folgt 2.14.

In Worten: In jedem Punkt des Raumes ist der Wirbel der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ gleich der negativen zeitlichen Änderung der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$.

- Durchflutungsgesetz in Differenzialform

$$\boxed{rot\,\vec{H} = \vec{S} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \tag{2.15}$$

Beweis:

$$\oint_r \vec{H}\cdot d\vec{r} = \int_F rot\,\vec{H}\cdot d\vec{F} = \int_F \left(\vec{S} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{F} \quad \rightarrow \quad rot\,\vec{H} = \vec{S} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

In Worten: Der Wirbel der magnetischen Feldstärke $\vec{H}$ ist in jedem Punkt des Raumes gleich der Leitungsstromdichte $\vec{S}$ plus der Verschiebungsstromdichte $\dot{\vec{D}}$.

- Grundgesetz der Elektrostatik in Differenzialform

$$\boxed{div\,\vec{D} = \rho} \tag{2.16}$$

Beweis:

$$\oint_F \vec{D} \cdot d\vec{F} = \int_V div\, \vec{D}\, dV = \int_V \rho\, dV$$

Die beiden Volumenintegrale sind gleich für identische Integranden. Daraus folgt 2.16.

In Worten: Die Divergenz der Verschiebungsflussdichte $\vec{D}$ ist an jedem Ort gleich der Raumladungsdichte ρ.

- Differenzialform des Grundgesetzes der Magnetostatik

$$\boxed{div\, \vec{B} = 0} \tag{2.17}$$

Beweis:

$$\oint_F \vec{B} \cdot d\vec{F} = \int_V div\, \vec{B}\, dV = 0 \quad \rightarrow \quad div\, \vec{B} = 0$$

In Worten: Das Feld der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$ ist überall quellenfrei.

2.2 Grenzflächenbedingungen

2.2.1 Grenzflächen

In Bild 2.1 sind die zu untersuchenden Grenzflächen gezeigt. Es wird für beide Medien die Permeabilität μ_o vorausgesetzt. Die Leitfähigkeits- und Dielektrizitätstensoren sollen unterschiedlich sein und sind mit $\underline{\kappa}_1, \underline{\varepsilon}_1, \underline{\kappa}_2, \underline{\varepsilon}_2$ bezeichnet.

a) b)

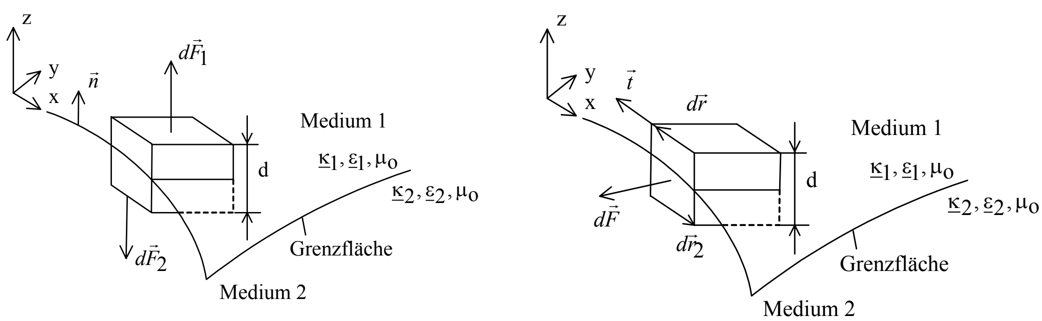

Bild 2-1 Zu den Stetigkeitsbedingungen
a) Normalkomponenten
b) Tangentialkomponenten

2.2.2 Normalkomponenten [2.3]

Magnetische Flussdichte. Aus 2.4 folgt, angewandt auf den im Bild 2-1a gezeigten Bereich,

$$\lim_{d \to 0} \oint \vec{B} \cdot d\vec{F} = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{F}_1 + \int \vec{B}_2 \cdot d\vec{F}_2 = \int \left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2\right) \cdot \vec{n}\, dF = 0\,, \tag{2.18}$$

wenn man beachtet, dass $d\vec{F}_1 = -d\vec{F}_2 = \vec{n}\, dF$ gesetzt werden darf, wobei $\vec{n}$ die Flächennormale bezeichnet. Da 2.18 für beliebige Oberflächen gilt, muss der Integrand verschwinden. Damit besteht die Bedingung

$$\boxed{\left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2\right) \cdot \vec{n} = 0 \quad oder \quad B_{n1} = B_{n2}} \tag{2.19}$$

mit $B_{n1} = \vec{B}_1 \cdot \vec{n}$ und $B_{n2} = \vec{B}_2 \cdot \vec{n}$.

In Worten: An der Grenzfläche zwischen zwei Stoffen ist die Normalkomponente $B_n = \vec{B} \cdot \vec{n}$ der magnetischen Flussdichte stetig.

Magnetische Feldstärke. Da entsprechend 2.7 und Bild 2-1a

$$\vec{B}_1 = \mu_o\, \vec{H}_{1,} \vec{B}_2 = \mu_o \vec{H}_2$$

gelten soll, folgt aus 2.19 auch die Stetigkeit der Normalkomponenten der magnetischen Feldstärke.

$$H_{n1} = \vec{H}_1 \cdot \vec{n} = H_{n2} = \vec{H}_2 \cdot \vec{n} \tag{2.20}$$

Verschiebungsflussdichte. Aus 2.3 ergibt sich bei Anwendung des Grundgesetzes der Elektrostatik auf die Anordnung nach Bild 2-1a:

$$\lim_{d \to 0} \oint \vec{D} \cdot d\vec{F} = \int \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right) \cdot \vec{n}\, dF = \lim_{d \to 0} \int \rho\, dV = \lim_{d \to 0} \int dQ = \int \Delta\sigma\, dF \tag{2.21}$$

Hierbei ist $\Delta\sigma = \mathrm{dQ}/\mathrm{dF}$ die Flächenladungsdichte. Damit folgt in Analogie zu 2.19:

$$\boxed{\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right) \cdot \vec{n} = \Delta\sigma \quad \text{oder} \quad D_{n1} = D_{n2} + \Delta\sigma} \tag{2.22}$$

mit $D_{n1} = \vec{D}_1 \cdot \vec{n}$ und $D_{n2} = \vec{D}_2 \cdot \vec{n}$.

Im Fall einer verschwindenden Grenzflächenladung gilt:

$$\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{oder} \quad D_{n1} = D_{n2} \tag{2.23}$$

In Worten: Bei fehlender Grenzflächenladung ist die Normalkomponente $D_n = \vec{D} \cdot \vec{n}$ der elektrischen Verschiebungsflussdichte an der Grenzfläche stetig.

2.2.3 Tangentialkomponenten [2.3]

Elektrische Feldstärke. Aus Bild 2-1b und 2.1 folgt für die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke $E_t \quad E \quad \vec{t}$

Aus 2.25 erkennt man: An einer Grenzfläche zwischen verschiedenen Stoffen bleibt die Tangentialkomponente $E_t = \vec{E} \cdot \vec{t}$ der elektrischen Feldstärke stetig.

Magnetische Feldstärke. Für 2.2 und Bild 2-1b führen die gleichen Überlegungen mit

$$\begin{aligned}
\lim_{d \to 0} \oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2 \right) \cdot \vec{t}\ dr \\
= \lim_{d \to 0} \int \left(\dot{\vec{D}} + \vec{S} \right) \cdot d\vec{F} \\
= \lim_{d \to 0} \int \dot{\vec{D}} \cdot d\vec{F} + \lim_{d \to 0} \int dI \\
= 0 + \int \Delta S_\sigma\ dr
\end{aligned} \tag{2.26}$$

zu der Bedingung

$$\int \left[\left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2 \right) \cdot \vec{t} - \Delta S_\sigma \right] dr = 0$$

bzw.

$$\boxed{\left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2 \right) \cdot \vec{t} = \Delta S_\sigma \quad \text{oder} \quad H_{t1} = H_{t2} + \Delta S_\sigma}\ , \tag{2.27}$$

wobei $H_{t1} = \vec{H}_1 \cdot \vec{t}\ ,\quad H_{t2} = \vec{H}_2 \cdot \vec{t}$ gilt.

Dabei bezeichnet $\Delta S_\sigma = dI / dr$ die Flächenstromdichte.

Somit gilt: Bei verschwindender Flächenstromdichte ΔS_σ ist die Tangentialkomponente $H_t = \vec{H} \cdot \vec{t}$ der magnetischen Feldstärke an der Grenzfläche stetig.

Magnetische Flussdichte. Wegen Bild 2-1b und

$$\vec{B}_1 = \mu_o \vec{H}_1\ ,\quad \vec{B}_2 = \mu_o \vec{H}_2$$

folgt dann auch die Stetigkeit der Tangentialkomponenten von $\vec{B}$ in der Form

$$B_{t1} = \vec{B}_1 \cdot \vec{t} = B_{t2} = \vec{B}_2 \cdot \vec{t} \tag{2.28}$$

2.2.4 Stetigkeitsbedingungen in Differenzenform

Flächenladungsdichte und Flächenstromdichte. Die grundsätzlichen Stetigkeitsbedingungen lauten also:

$$\begin{aligned}
\left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2 \right) \cdot \vec{n} = 0 \\
\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2 \right) \cdot \vec{n} = \Delta\sigma \\
\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right) \cdot \vec{t} = 0 \\
\left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2 \right) \cdot \vec{t} = \Delta S_\sigma
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Nun werden die Flächenladungsdichte $\Delta\sigma$ und die Flächenstromdichte ΔS_σ aufgeteilt in die Größen σ_1, $S_{\sigma 1}$ unmittelbar oberhalb der Grenzflächen nach Bild 2-1 und σ_2, $S_{\sigma 2}$ unmittelbar unterhalb davon.

$$\begin{aligned} \Delta\sigma &= \sigma_1 - \sigma_2 \\ \Delta S_\sigma &= S_{\sigma 1} - S_{\sigma 2} \end{aligned} \tag{2.30}$$

Mit den Vektoren

$$\begin{aligned} \Delta\vec{\sigma} &= \Delta\sigma\,\vec{n} = \sigma_1\,\vec{n} - \sigma_2\,\vec{n} = \vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_2 \\ \Delta\vec{S}_\sigma &= \Delta S_\sigma\,\vec{t} = S_{\sigma 1}\,\vec{t} - S_{\sigma 2}\,\vec{t} = \vec{S}_{\sigma 1} - \vec{S}_{\sigma 2} \end{aligned} \tag{2.31}$$

kann man eine Differenzenform der Stetigkeitsbedingungen angeben.

Differenzenform. Die Grenzflächenbedingungen 2.29 lauten nun mit 2.30 und 2.31:

$$\boxed{\begin{aligned} &\Delta\,\vec{E}_1 \cdot \vec{t} = \Delta\,\vec{E}_2 \cdot \vec{t} \\ &\Delta\,\vec{D}_1 \cdot \vec{n} = \Delta\,\vec{D}_2 \cdot \vec{n} \\ &\Delta\,\vec{H}_1 \cdot \vec{t} = \Delta\,\vec{H}_2 \cdot \vec{t} \\ &\Delta\,\vec{B}_1 \cdot \vec{n} = \Delta\,\vec{B}_2 \cdot \vec{n} \end{aligned}} \tag{2.32}$$

Dabei gilt:

$$\begin{aligned} \Delta\,\vec{E}_\nu &= \vec{E}_\nu - \frac{\vec{\sigma}_\nu}{\varepsilon_{n\nu}} \\ \Delta\,\vec{D}_\nu &= \vec{D}_\nu - \vec{\sigma}_\nu \\ \Delta\,\vec{H}_\nu &= \vec{H}_\nu - \vec{S}_{\sigma\nu} \\ \Delta\,\vec{B}_\nu &= \vec{B}_\nu - \mu_o\,\vec{S}_{\sigma\nu} \end{aligned} \tag{2.33}$$

für $\nu = 1{,}2$.

Die $\varepsilon_{n\nu}$ sind die Dielektrizitäten in Normalenrichtung zur Grenzfläche.

2.2.5 Feldgleichungen an Grenzflächen

2.2.5.1 Grundzusammenhänge

Ausgangspunkt. Bisher wurde für die gezeigten Ansätze das Kollektiv von Photonen und Ladungsträgern gemeinsam betrachtet. Die Maxwellsche Theorie sagt aus, dass die Feldgleichungen sowohl für die Photonen als auch für die Ladungsträger gelten. In 2.33 beschreiben die Feldvektoren $\vec{E}_\nu, \vec{D}_\nu, \vec{H}_\nu, \vec{B}_\nu$ das Gesamtfeld. Nimmt man Felder auf oder durch Flächen an, so kennzeichnen die Terme mit $\vec{\sigma}_\nu$ und $\vec{S}_{\sigma\nu}$ das elektromagnetische Feld der Ladungsträger und die Differenzen $\Delta\vec{E}_\nu$, $\Delta\vec{D}_\nu$, $\Delta\vec{H}_\nu$ und $\Delta\vec{B}_\nu$ das elektromagnetische Feld der Photonen. Die Überlagerung der einzelnen Anteile in 2.33 ist zulässig, da lineare Stoffe vorausgesetzt werden. Bei alleiniger Anwesenheit der Ladungsträger sind die in 2.33 gebildeten Differenzen Null.

Gleichungssystem für die Photonen. Die Feldgleichungen für die Photonen lauten:

$$rot\,\Delta\vec{E} = -\frac{\partial\,\Delta\vec{B}}{\partial\,t} \tag{2.34}$$

$$rot\,\Delta\vec{H} = \Delta\vec{S} + \frac{\partial\,\Delta\vec{D}}{\partial\,t} \tag{2.35}$$

$$div\,\Delta\vec{D} = 0 \tag{2.36}$$

$$div\,\Delta\dot{\vec{B}} = 0 \tag{2.37}$$

$$\Delta\vec{D} = \underline{\varepsilon}\,\Delta\vec{E} \tag{2.38}$$

$$\Delta\vec{S} = \underline{\kappa}\,\Delta\vec{E} \tag{2.39}$$

$$\Delta\vec{B} = \mu_o\,\Delta\vec{H} \tag{2.40}$$

Gleichungssystem für die Ladungsträger. Für die Ladungsträger gelten die Feldgleichungen:

$$rot\,\vec{\sigma} = -\mu_o\,\varepsilon_n\,\frac{\partial\,\vec{S}_\sigma}{\partial\,t} \tag{2.41}$$

$$rot\,\vec{S}_\sigma = \frac{\kappa_n}{\varepsilon_n}\,\vec{\sigma} + \frac{\partial\,\vec{\sigma}}{\partial\,t} \tag{2.42}$$

$$div\,\vec{\sigma} = \rho \tag{2.43}$$

$$div\,\dot{\vec{S}}_\sigma = 0 \quad . \tag{2.44}$$

In 2.34 bis 2.44 ist dabei der Index ν aus 2.33 weggelassen. Zu diesen Gleichungssystemen gelangt man wie folgt:

- Induktionsgesetz:

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial\,\vec{B}}{\partial\,t}$$

$$rot\,\Delta\vec{E} + \frac{1}{\varepsilon_n}\,rot\,\vec{\sigma} = -\frac{\partial\,\Delta\vec{B}}{\partial\,t} - \mu_o\,\frac{\partial\,\vec{S}_\sigma}{\partial\,t}$$

Mit $rot\,\Delta\vec{E} = -\Delta\dot{\vec{B}}$ erhalten Sie:

$$rot\,\vec{\sigma} = -\mu_o\,\varepsilon_n\,\frac{\partial\,\vec{S}_\sigma}{\partial\,t}$$

- Durchflutungsgesetz:

$$rot\,\vec{H} = \vec{S} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$rot\,\Delta\vec{H} + rot\,\vec{S}_\sigma = \vec{S} + \frac{\partial \Delta\vec{D}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} = \underline{\kappa}\,\vec{E} + \frac{\partial \Delta\vec{D}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t}$$

$$= \underbrace{\underline{\kappa}\,\Delta\vec{E}}_{\Delta\vec{S}} + \frac{\underline{\kappa}\,\vec{\sigma}}{\varepsilon_n} + \frac{\partial \Delta\vec{D}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} = \Delta\vec{S} + \frac{\partial \Delta\vec{D}}{\partial t} + \frac{\kappa_n}{\varepsilon_n}\,\vec{\sigma} + \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t}$$

Mit $rot\,\Delta\vec{H} = \Delta\vec{S} + \Delta\dot{\vec{D}}$ gilt:

$$rot\,\vec{S}_\sigma = \frac{\kappa_n}{\varepsilon_n}\,\vec{\sigma} + \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t}$$

κ_n ist die Leitungsfähigkeit in Normalenrichtung zur Grenzfläche.

- Grundgesetz der Elektrostatik:

$$div\,\vec{D} = \rho$$

$$\rightarrow \quad div\,\Delta\vec{D} + div\,\vec{\sigma} = \rho\,.$$

Mit $\sigma = \partial^2 Q / \partial F$ und $\rho = \partial^3 Q / \partial V$ sieht man ein, dass

$$div\,\vec{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{\partial^3 Q}{\partial z\,\partial F} = \frac{\partial^3 Q}{\partial V} = \rho\,,$$

wobei $\partial V = \partial z\,\partial F$ gilt. Daraus folgt

$$div\,\Delta\vec{D} = 0\,.$$

- Grundgesetz der Magnetostatik:

$$div\,\vec{B} = 0$$

$$\rightarrow div\,\Delta\vec{B} + \mu_o\,div\,\vec{S}_\sigma = 0$$

$$\rightarrow div\,\Delta\dot{\vec{B}} + \mu_o\,div\,\dot{\vec{S}}_\sigma = 0$$

Wegen 2.34 gilt

$$div\,rot\,\Delta\vec{E} = 0 = div\,\Delta\dot{\vec{B}}$$

Damit ergibt sich auch

$$div\,\dot{\vec{S}}_\sigma = 0$$

Die Lösung der Feldgleichungen für die Ladungsträger ist für einen Spezialfall Gegenstand der Aufgabe A 2.1.

Punktladung und Punktphoton. Führt man als Modelle für die Ladungsträger und Photonen die Punktladung und das Punktphoton ein, so lassen sich beide Felder nach Bild 2-2 veranschaulichen.

a) b)

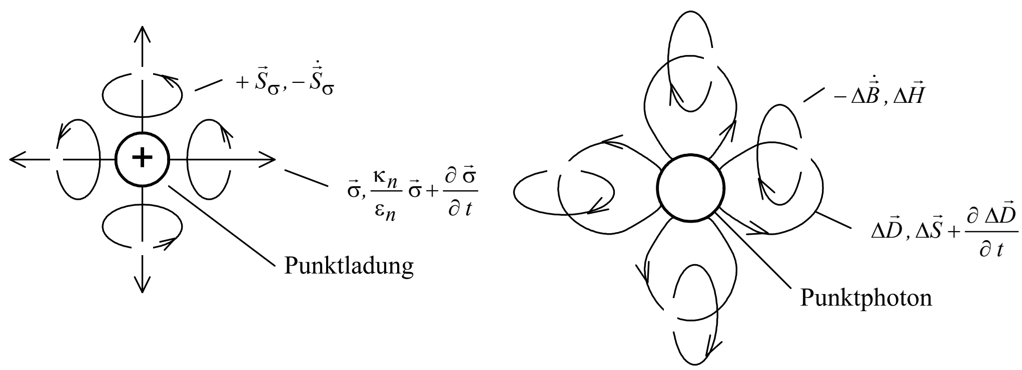

Bild 2-2 Feldbilder
a) Punktladung
b) Punktphoton

Das Punktphoton kann dabei in der Bewegung als Vereinigung von Elektron und Loch aufgefasst werden. Aus Punktladungen und Punktphotonen kann man kompliziertere Ladungs- und Photonenverteilungen im Raum zusammensetzen. Für die nachfolgenden Betrachtungen werden grundsätzlich Punktladungen und Punktphotonen vorausgesetzt. Damit befindet sich an einem Ort entweder eine Punktladung oder ein Punktphoton, und es wird nur die Wirkung der zugehörigen Felder auf die Emissions-, Transmissions- und Absorptionseigenschaften untersucht.

2.2.5.2 Photonenstromdichte

Divergenz. Die Divergenz der Photonenstromdichte $\Delta\vec{S}$ erhalten Sie aus 2.35:

$$div\, rot\, \Delta\vec{H} = div\, \Delta\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{div\, \Delta\vec{D}}_{=0} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{div\, \Delta\vec{S} = 0} \tag{2.45}$$

In Worten: Die Divergenz von $\Delta\vec{S}$ ist überall gleich Null.

Stetigkeitsbedingung. Mit dem Integralsatz von Gauß nach 2.12 gilt unter Beachtung von 2.45 und Bild 2-1 a:

$$\oint \Delta\vec{S}\cdot d\vec{F} = \int div\, \Delta\vec{S}\; dV = 0$$

$$\int \left(\Delta\vec{S}_1 - \Delta\vec{S}_2\right)\cdot \vec{n}\; dF = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta\vec{S}_1\cdot\vec{n} = \Delta\vec{S}_2\cdot\vec{n}} \tag{2.46 a}$$

In Worten: Die Normalkomponente der Photonenstromdichte $\Delta S_n = \Delta\vec{S}\cdot\vec{n}$ ist an der Grenzfläche zweier Medien stetig.