1 Einleitung

Die Finite-Elemente-Methode (FEM, englisch: finite element method) ist das am häufigsten routinemäßig eingesetzte Verfahren zur Berechnung komplexer Konstruktionen im Maschinenbau, im Apparatebau, in der Fahrzeugtechnik, in der Luft- und Raumfahrttechnik und im Bauwesen. Der Einsatz erfolgt nicht nur für Standardprobleme der Festigkeitsberechnung und der Schwingungs- und Stabilitätsuntersuchung sondern auch für Spezialaufgaben, z. B. für Aufgaben der Bruch- und Kontaktmechanik oder bei extrem großen Deformationen und plastischen Beanspruchungen, wie sie etwa bei Crash-Untersuchungen auftreten.

1.1 Beispiele aus Konstruktionsberechnung und Mechanik

Crash-Simulationsrechnungen an Automobilkarosserien, mit denen versucht wird, längerfristig die außerordentlich zeitaufwendigen und kostenintensiven Crash-Versuche zu ersetzen, gehören nicht nur zu den komplexesten derzeit durchgeführten Konstruktionsberechnungen, sie sind auch ein ausgesprochen illustratives Beispiel, das sich für populärwissenschaftliche Darstellungen [1.1] oder sogar für Werbezwecke [1.2] hervorragend eignet.

In Bild 1.1 ist das Finite-Elemente-Modell einer Pkw-Karosserie [1.3] wiedergegeben. An diesem Beispiel wird ein Charakteristikum von Finite-Elemente-Rechnungen deutlich. Berechnet werden soll eine außerordentlich *heterogene Struktur*, deren Bauteile unterschiedliche Dicken, veränderliche Form, Ausparungen und Versteifungen besitzen und auch noch aus unterschiedlichem Material bestehen. Bei dem Beispiel wurde die gesamte Struktur im wesentlichen durch knapp 19 000 Elemente für dünnwandige Schalen modelliert. Diese Modellierung komplexer Strukturen durch eine große Anzahl finiter Elemente, wobei in einer Rechnung zumeist nur wenige Arten von Elementen Verwendung finden, charakterisiert das Verfahren und macht seine Einsetzbarkeit für völlig unterschiedliche Konstruktionen und Aufgabenstellungen deutlich.

An einem zweiten Beispiel wird dies nochmals illustriert. Berechnet werden sollten die *Eigenfrequenzen* und *Eigenschwingungsformen* eines modernen *Leichtbauwagenkastens* für den Hochgeschwindigkeitszug ICT [1.4]. Für die Strukturmodellierung wurden etwa 20 000 Schalenelemente verwendet. Es ergab sich ein Gleichungssystem mit rund 110 000 Freiheitsgraden. In Bild 1.2 sind die Eigenschwingungsformen zu den beiden niedrigsten, von Null verschiedenen Eigenfrequenzen dargestellt. Bei der Form mit einer Eigenfrequenz von 10 Hz handelt es sich um die erste Biegeeigenform des Wagenkasten mit überlagerter Querschnitts-

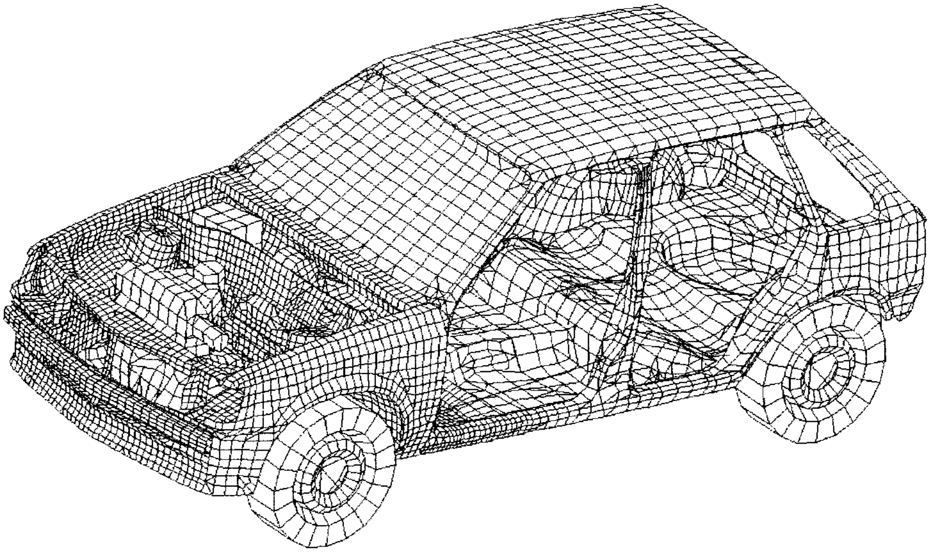


Bild 1.1. Finite-Elemente-Modell (17 939 Knoten, 18 898 Schalenelemente, 160 Balkenelemente) einer Pkw-Karosserie für eine Crash-Rechnung (mit freundlicher Genehmigung der Adam Opel AG)

deformation; bei 13 Hz tritt eine sogenannte ‚Atemschwingung' auf, bei der lokal Boden und Dach gegeneinander schwingen. Kombiniert man eine solche Finite-Elemente-Rechnung mit einer Mehrkörpersimulation [1.4], so läßt sich feststellen, wie sich Gleislagefehler auf den Komfort im Wagenkasten auswirken. Derartige Simulationsrechnungen geben dem Konstrukteur Hinweise, an welchen Stellen konstruktive Veränderungen mit dem Ziel einer Optimierung angebracht sind.

Beide Beispiele haben außer der hohen Komplexität noch eine zweite Gemeinsamkeit: Es sollen *globale Eigenschaften* berechnet werden. Bei dem Wagenkasten sind dies die Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen; bei der Crash-Rechnung soll überprüft werden, ob die Energie beim Auffahrunfall im Motorraum absorbiert wird und die Fahrgastzelle unversehrt bleibt. Die Frage, welche lokalen Beanspruchungen bei plastischen Deformationen genau auftreten, spielt bei dieser Betrachtung keine Rolle.

Die Ermittlung der *lokalen Beanspruchungen* bei unregelmäßig berandeten Strukturen, etwa zur Optimierung einer Konstruktion unter Beanspruchungsgesichtspunkten oder in der Bruchmechanik, ist das zweite große Anwendungsgebiet der Methode der finiten Elemente. Hier wird zunächst ein sehr einfaches Beispiel betrachtet: Um den *Plastizierungsfortschritt* in

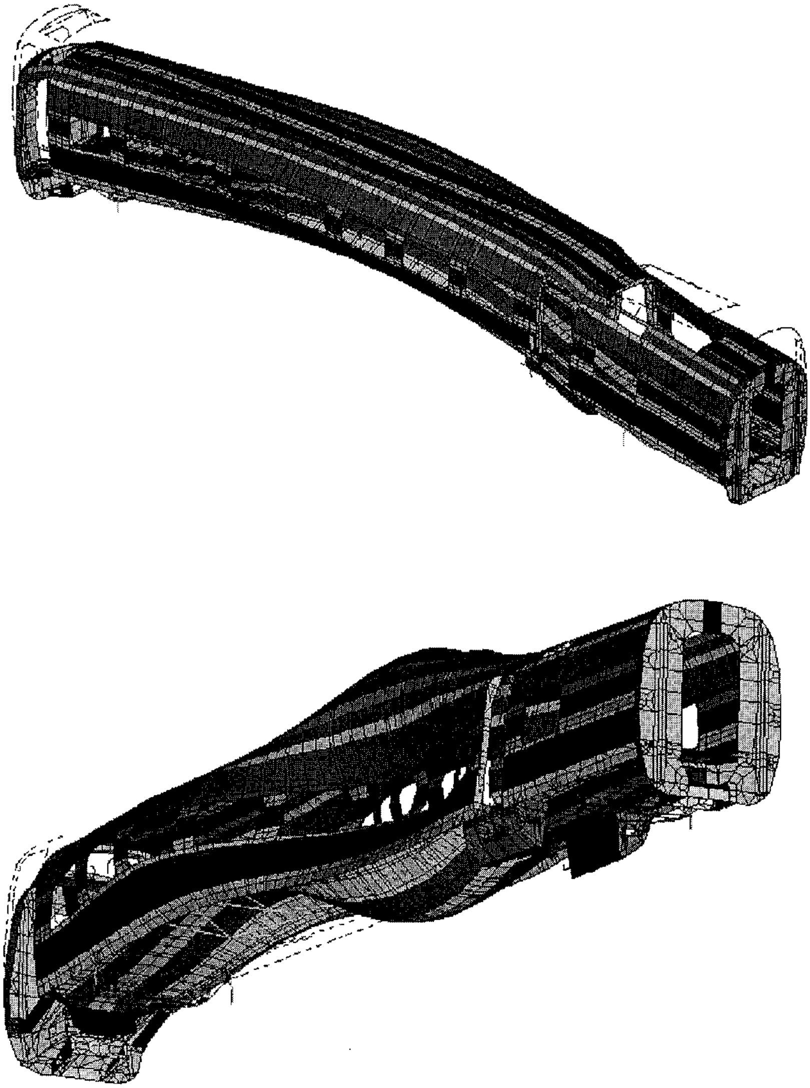


Bild 1.2. Eigenschwingungsformen eines Leichtbauwagenkastens für den ICT (mit freundlicher Genehmigung der DUEWAG AG, Krefeld Uerdingen). Biegung mit überlagerter Querschnittdeformation bei 10 Hz (oben), Querschnittsdeformation bei 13 Hz (unten)

einer doppelt-symmetrischen Kerbscheibe bei Beanspruchungen über die Elastizitätsgrenze hinaus verfolgen zu können, muß relativ fein elementiert werden. Schon die noch relativ grobe Diskretisierung von Bild 1.3 würde, wenn man sie bei der Pkw-Karosserie durchgängig vornimmt, numerisch sehr aufwendig werden.

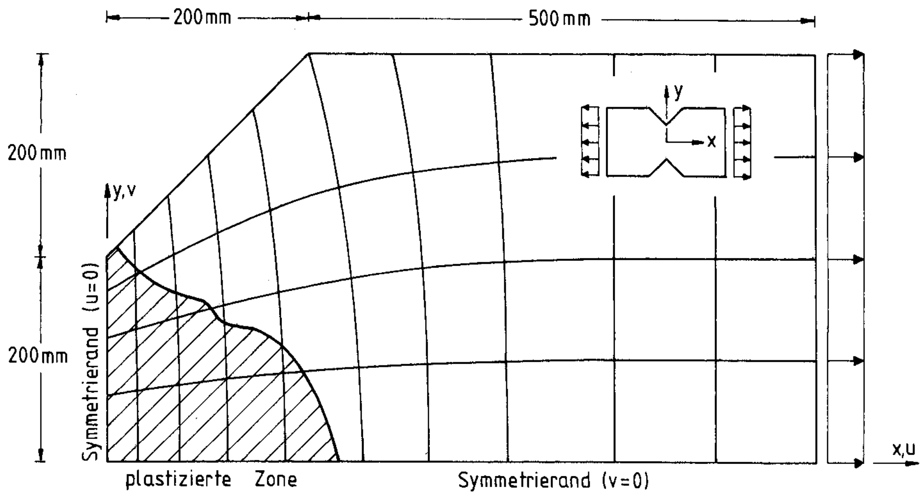


Bild 1.3. Spannungsverlauf und Plastizierungszonen in einer Kerbscheibe.

Ein noch mehr ins Detail gehendes Beispiel ist in Bild 1.4 dargestellt. Simuliert werden sollte in diesem Fall der *Rißfortschritt* in einem Al/SiC-Verbundwerkstoff bei Zugbeanspruchung in vertikaler Richtung. Dabei wurde der Verbundwerkstoff nur in unmittelbarer Nähe der Kerbspitze modelliert, der in der Realität eine Abmessung von 6µm × 6µm hat [1.42].

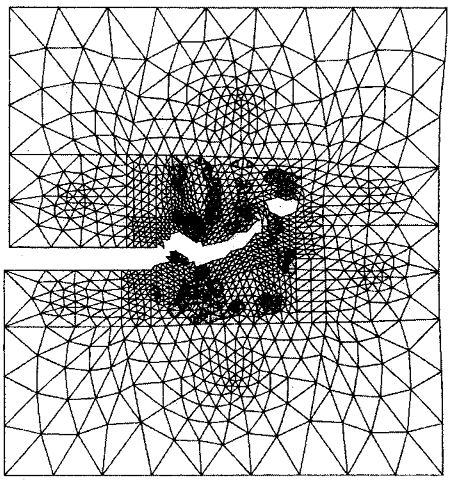
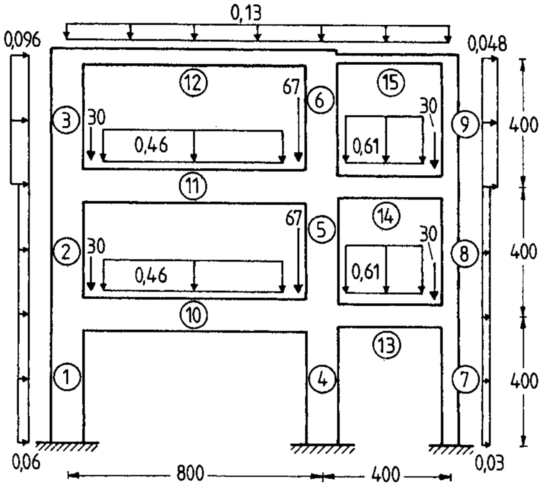


Bild 1.4. Rißfortschritt in einem Al/SiC-Verbundwerkstoff, Simulationsrechnung mit dem Materialmodell von Gurson [1.42]

Auch bei dem letzten Beispiel, einem Stockwerkrahmen (Bild 1.5), kam es auf die Ermittlung der Beanspruchung, in diesem Fall also der Schnittkräfte, in den einzelnen Stäben an. Obwohl es um die Ermittlung lokaler Beanspruchungen geht, sind kaum feinere Diskretisierungen als für eine Eigenschwingungsberechnung erforderlich, selbst dann nicht, wenn es zu Plastizierungen kommt [1.5]. Der Grund dafür ist, daß sich bei Balkenelementen, anders als bei Scheiben-, Platten- oder Schalenelementen, die Gleichgewichtsbedingungen exakt erfüllen lassen. Das erklärt die große Beliebtheit von Rahmentragwerken bei der Modellbildung. Erst wenn man sich für den Plastizierungsfortschritt in den Knotenbereichen interessiert und sie genauer modelliert, steigt der Rechenaufwand.



	A	I	A_s
1-6, 10, 11	118	40920	41,58
7-9, 12	53,8	6950	16,43
13, 14	84,1	19050	27,42
15	13,2	318	4,09

E = 21000
G = 8100

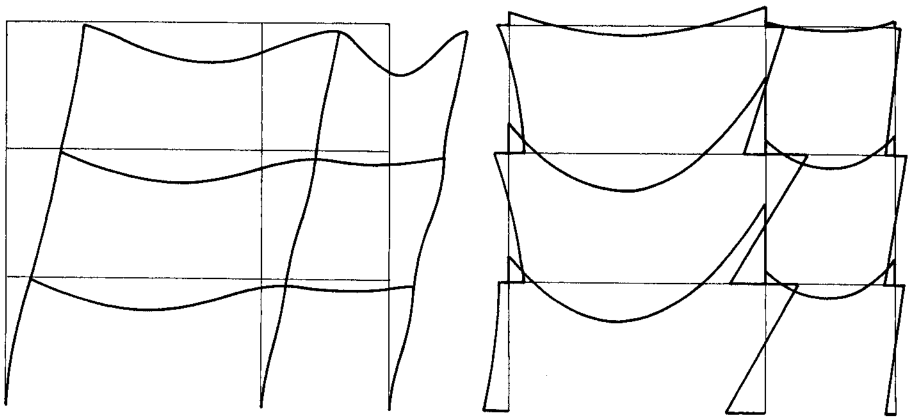


Bild 1.5. Stockwerkrahmen. System und Belastung (oben), Verschiebungszustand und Momentenverlauf (unten) [1.5]

1.2 Einordnung einer Finite-Elemente-Rechnung in den Prozeß der Konstruktionsberechnung

An den vier Beispielen läßt sich auch die Einordnung einer Rechnung nach der Finite-Elemente-Methode in den Gesamtprozeß der Konstruktionsberechnung verdeutlichen (Bild 1.6). In dem Schema werden Daten oder Informationen durch eckige Kästchen, Tätigkeiten oder Rechnungen durch Kästchen mit abgerundeten Ecken gekennzeichnet. Die Schritte der eigentlichen Finite-Elemente-Rechnung sind in der unteren Bildhälfte durch stärkere Umrahmung hervorgehoben.

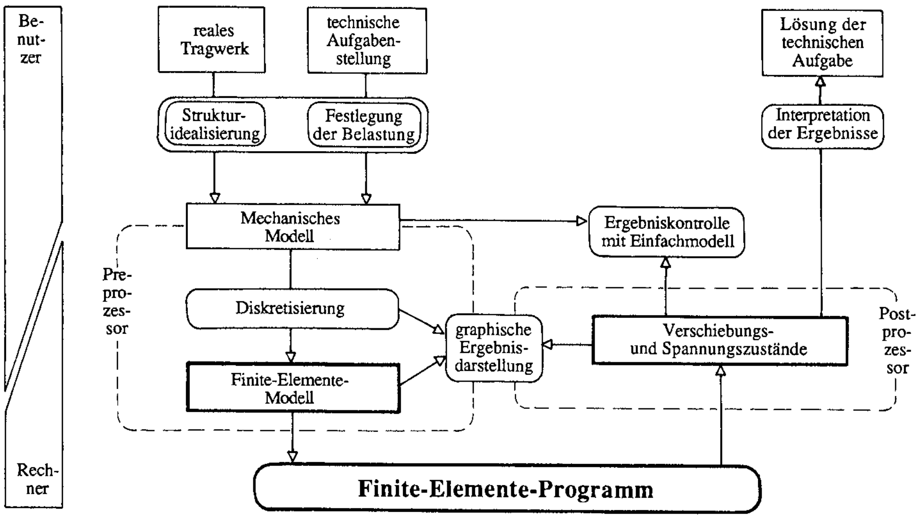


Bild 1.6. Einordnung einer Finite-Elemente-Rechnung in den Konstruktionsberechnungsprozeß

Der Benutzer eines Finite-Elemente-Programms soll ein reales Tragwerk (Pkw-Karosserie, Stockwerkrahmen) unter einer technischen Aufgabenstellung (Simulation eines Crash-Vorganges, Ermittlung der Traglast) untersuchen. Bei der Erstellung des mechanischen Modells wird festgelegt, wie die Struktur *idealisiert* wird (z. B. durch dünne Schalen beim Pkw, durch schubweiche Balken beim Rahmen), welche Strukturdetails unter dem Gesichtspunkt der Aufgabenstellung weggelassen werden können (kleinere Aussparungen für Leitungen, genauere Abbildung der Knoten etc.) und welche Belastung angesetzt werden muß.

Im nächsten Schritt erfolgt die Unterteilung in finite Elemente, die *Diskretisierung*. Bei der Kerbscheibe von Bild 1.3 kann man das noch mit Papier und Bleistift von Hand erledigen, bei der Diskretisierung einer Pkw-Karosserie oder eines Flugzeuges ist die Unterstützung des Rechners zur Erzeugung des diskreten Finite-Elemente-Modells unerläßlich. Alle große Finite-Elemente-Programme haben dafür Vorlaufprogramme (*Preprozessoren*) , die meist auch eine *grafische Kontrolle* des erzeugten Finite-Elemente-Modells gestatten.

Umgesetzt in Zahlen liefert das Finite-Elemente-Modell die Eingabedaten (Geometrie, Topologie, Materialdaten, Belastungsdaten) für das Finite-Elemente-Programm. Programmintern wird ein Gleichungssystem generiert und gelöst, und es werden alle interessierenden Größen (Verschiebungen, Schnittkräfte) bestimmt. Bei großen Problemen wird die Fülle der Ergebnisdaten nur durch grafische Auswertungsprogramme (*Postprozessoren*) überschaubar.

Jetzt kommt wieder der Benutzer zum Zuge. Den Ergebnissen jeder aufwendigen Finite-Elemente-Rechnung sollte man mit Mißtrauen begegnen, Kontrollen sind unumgänglich. Mit Einfachmodellen wird die Plausibilität und die Größenordnung der Ergebnisse *kontrolliert*, aufwendige Modellrechnungen mit einer Fülle von Modellannahmen werden bei ersten Testrechnungen nach Möglichkeit mit experimentellen Untersuchungen (Crash-Tests) verglichen. Zum zweiten muß der Bearbeiter die Ergebnisse *interpretieren*, er muß also die eingangs formulierte technische Aufgabenstellung lösen.

Aufgrund der Ergebniskontrolle und der Ergebnisinterpretation kann es erforderlich sein, die Rechnung zu wiederholen, wobei unter Umständen sogar die Strukturidealisierung und die Belastungsfestlegung verändert werden müssen. Vielfach muß nur das Finite-Elemente-Modell modifiziert werden.

1.3 Finite-Elemente-Verfahren für allgemeine Feldprobleme

Bei den einführenden Beispielen handelte es sich durchweg um Probleme der *Strukturmechanik*, d. h. der Kontinuumsmechanik fester Körper. Die Strukturmechanik ist auch der Bereich, in dem die Methode der finiten Elemente zuerst entwickelt worden ist. Bereits 1967 erschien das erste Lehrbuch [1.10]. Sie ist aber keineswegs der einzige Einsatzbereich. Die Methode der finiten Elemente kann als Berechnungsverfahren vielmehr für beliebige andere Feldprobleme, also Problemen, bei denen das Verhalten von Kontinua durch partielle, orts- und zeitabhängige Differentialgleichungen beschrieben wird, eingesetzt werden. Ob ein derartiger Einsatz auch sinnvoll ist, muß von Fall zu Fall entschieden werden.

Ein Einsatzgebiet, das parallel zur Strukturmechanik schon früh von der Methode der finiten Elemente erobert worden ist, ist die Untersuchung der *Wärmeleitung* in festen Körpern, also etwa die Ermittlung der Temperaturverteilung und ihres zeitlichen Ablaufs in einer Behälterwandung oder im Zylinder eines Verbrennungsmotors [1.6, 1.7]. Die bei einer derartigen Rechnung ermittelte Temperaturverteilung ist eine notwendige Eingabegröße für die anschließende strukturmechanische Berechnung der entsprechenden Bauteile, z. B. für die Ermittlung der Wärmespannungen. Man spricht dann von *Thermomechanik*. Ein Tragwerk, das eine sehr unregelmäßige Struktur besitzt, hat diese unregelmäßige Eigenschaft auch im Hinblick auf die Wärmeleitung. Der Einsatz der Finite-Elemente-Methode ist also in beiden Fällen gerechtfertigt und notwendig. Spezielle Lehrbücher [1.12, 1.47] befassen sich mit diesem Gebiet.

Ähnlich ist die Situation bei der Untersuchung elektromagnetischer Felder. Sinnvoll ist der Einsatz dann, wenn Verlauf und Veränderung elektromagnetischer Felder in Bauteilen mit unregelmäßiger Berandung und mit unterschiedlichen Materialien untersucht werden und wenn es zu Rückwirkungen mit der Strukturmechanik kommt. Auf zwei Monographien, die sich mit diesem Thema befassen, soll hier verwiesen werden: [1.11,1.48].

Ein weiterer potentieller Anwendungsbereich ist die *Hydro- und Aerodynamik* [1.8, 1.9], die Kontinuumsmechanik flüssiger und gasförmiger Körper. Hier hat sich die Methode der finiten Elemente nicht in dem Maße wie in der Strukturmechanik durchgesetzt. In der Aerodynamik werden heute für die Berechnung laminarer und turbulenter Strömungen, z. B. für die Untersuchung der Wechselwirkungen bei der Umströmung von Flügel, Triebwerk und Rumpf, fast ausschließlich Programmsysteme auf der Basis finiter Differenzenverfahren eingesetzt. Ob daran ein in der 6. Auflage des Werkes von Zienkiewicz erschienener dritter Band zur *Fluiddynamik* [1.51] etwas ändern wird, bleibt abzuwarten.

Als interessante Anwendungsgebiete der Methode der finiten Elemente haben sich in jüngster Zeit Interaktionen zwischen unterschiedlichen physikalischen Phänomenen herausgestellt, z. B. zwischen Struktur und Strömung. Ein typisches Beispiel dafür sind segelförmige Strukturen wie der Flügel eines Drachenseglers. Der Flügel ist ein hochgradig verformbares Gebilde; die Strömung wird von dem sich einstellenden Flügelprofil beeinflußt und wirkt selbst wieder über die aerodynamischen Kräfte auf die Ausbildung des Flügelprofils ein. Schon die quasistatische Behandlung eines derartigen Problems unter Verzicht auf dynamische Übergangszustände stellt ein typisches Beispiel für die Anwendung eines kombinierten Verfahrens dar. Das Segel läßt sich als nichtlineare Membran sehr effektiv mit finiten Elementen behandeln, während für die Ermittlung der aerodynamischen Belastungen aus der umströmenden Luft zweckmäßigerweise ein Integralgleichungsverfahren eingesetzt wird. Für instationäre Zustände wird bei diesem Beispiel die Strömungsmodellierung mit finiten Elementen Bedeutung gewinnen.

Ein Spezialproblem, das eigentlich der Strukturmechanik zuzuordnen ist, sind *Kontaktprobleme*. Der Kontakt Reifen-Straße wird schon seit längerem mit finiten Elementen behandelt, vergleiche z. B. [1.52]. Der Rad-Schiene-Kontakt hingegen wird bisher weitgehend mit Randelementverfahren untersucht [1.53]. Ein weiteres Gebiet ist die Blechumformung. Auch in der Kontaktmechanik gibt es Probleme, bei denen es zu *Interaktionen* kommt. Der Reifen-Straße-Kontakt mit Wasser als Zwischenschicht (Aquaplaning) ist ein hochgradig nichtlineares Problem der Interaktion zwischen Strukturmechanik und Fluiddynamik, das in der Reifenindustrie behandelt. Eine Monographie zur Kontaktmechanik aus mathematisch-mechanischer Sicht ist erst vor einem Jahr erschienen [1.37].

An dieser Stelle soll ausdrücklich davor gewarnt werden, die Finite-Elemente-Methode unkritisch als ‚Allheilmittel' für neuartige, noch ungelöste Feldprobleme anzusehen. Abgesehen davon, daß für neuartige Feldprobleme das entsprechende Finite-Elemente-Verfahren erst einmal entwickelt werden muß, sollte man zuerst prüfen, ob die aufwendige Entwicklung und der Einsatz eines Finite-Elemente-Verfahrens wirklich notwendig sind oder das Problem nicht mit einfacheren Verfahren viel besser behandelt werden kann. Ein Finite-Elemente-Verfahren kann in aller Regel nichts dazu beitragen, das Verhalten der Lösung eines physikalischen oder mechanischen Problems grundsätzlich zu verstehen. Was man braucht, um ein derartiges Verständnis zu erreichen, sind analytische oder halbanalytische Lösungen. Die Kunst besteht dann darin, alle wesentlichen Eigenschaften eines Problems beizubehalten, die Struktur aber so weit zu idealisieren und die Belastung so weit zu vereinfachen, daß analytische Lösungen möglich werden. Erst wenn ein grundsätzliches Problemverständnis vorliegt, sollte man für analytisch nicht mehr behandelbare Probleme Näherungsverfahren nach Art der Methode der finiten Elemente einsetzen. Zum Austesten des Näherungsverfahrens wird man dann wieder auf analytische Lösungen einfacher Fälle zurückgreifen.

1.4 Die Finite-Elemente-Methode und andere Diskretisierungsverfahren

Die Finite-Elemente-Methode (FEM) ist nur eines von vielen Näherungsverfahren, die bei Feldproblemen eingesetzt werden. Wir wollen im folgenden die Verknüpfung der Methode der finiten Elemente zu den zwei wichtigsten anderen *Diskretisierungsverfahren*, der Finite-Differenzen-Methode (FDM), und der Randelementmethode (REM, englisch: BEM = boundary element method) darstellen (Bild 1.7) und dabei deutlich machen, wieso sich die Methode der finiten Elemente im Gegensatz zu den beiden anderen Diskretisierungsverfahren für die Strukturberechnung allgemeiner Tragwerke durchgesetzt hat. Gemeinsam ist allen drei Verfahren, daß sie bei linearen, statischen Problemen (oder äquivalenten Aufgaben bei anderen Feldproblemen) auf ein Gleichungssystem der Form $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ führen.

Ausgangspunkt für die Verfahrensentwicklung bei der *Finite-Differenzen-Methode* sind die Differentialgleichungen des jeweiligen Feldproblems. Das Tragwerk wird mit einem Koordinatensystem überdeckt, wobei die Ränder nach Möglichkeit Koordinatenlinien sein sollten. In dem Koordinatennetz werden Gitterpunkte (Knoten) eingeführt. Die Differentialgleichungen werden für jeden der Knoten durch Differenzengleichungen ersetzt [1.13, 1.14]. Auf diese Weise erhält man ein algebraisches Gleichungssystem.

Bei der *Finite-Elemente-Methode* ist der Ausgangspunkt ein Variationsprinzip oder ein Prinzip der virtuellen Arbeiten oder, sofern diese nicht existieren, ein Integralausdruck in *schwacher Formulierung*. Ein derartiges Prinzip läßt sich aus der Differentialgleichungsformulierung durch integrale Mittelwertbildung gewinnen. Der Bereich wird mit einem Elementnetz überzogen. In jedem der Elemente werden durch Einführung von Ansatzfunktionen, die mit den Funktionswerten in den Knoten gewichtet werden, die Integralausdrücke durch algebraische Ausdrücke ersetzt. Der Aufbau des Gleichungssystems für die Knotenfreiheitsgrade erfolgt elementweise, man erhält aber auch hier für jeden Knotenpunkt Gleichungen, in die wie bei der finiten Differenzenmethode die Freiheitsgrade des gerade betrachteten und der umliegenden Knoten eingehen.

Ausgangspunkt für das *Randelementverfahren* sind Integralgleichungen [1.15]. Derartige Integralgleichungen gewinnt man aus der Differentialgleichung oder dem Variationsprinzip, indem man die Lösung aus Einflußfunktionen (Greenschen Funktionen) superponiert. Als unbekannte Zustandsgrößen treten beim Randintegralverfahren nur noch Zustandsgrößen auf dem Rand (Randbelegungen) auf. Bei dem Verfahren braucht daher auch nur der Rand elementiert zu werden. Für jeden Knotenpunkt erhält man nach Einführung von Ansatzfunktionen in den Randelementen algebraische Gleichungen, in die die Freiheitsgrade aller anderen Randknoten Eingang finden.

Aufgrund dieser sehr knappen Schilderung, die erst nach der Ableitung der Finite-Elemente-Gleichungen klarer werden wird, lassen sich Unterschiede der einzelnen Verfahren für Aufgaben der Strukturmechanik diskutieren.

- Beim *Randelementverfahren* ist die Zahl der Knoten und damit der Freiheitsgrade wesentlich niedriger als bei den beiden anderen Verfahren, allerdings erhält man eine vollbesetzte, unsymmetrische Matrix $\boldsymbol{A}$. Der entscheidende Nachteil ist, daß bei beliebig inhomoge-

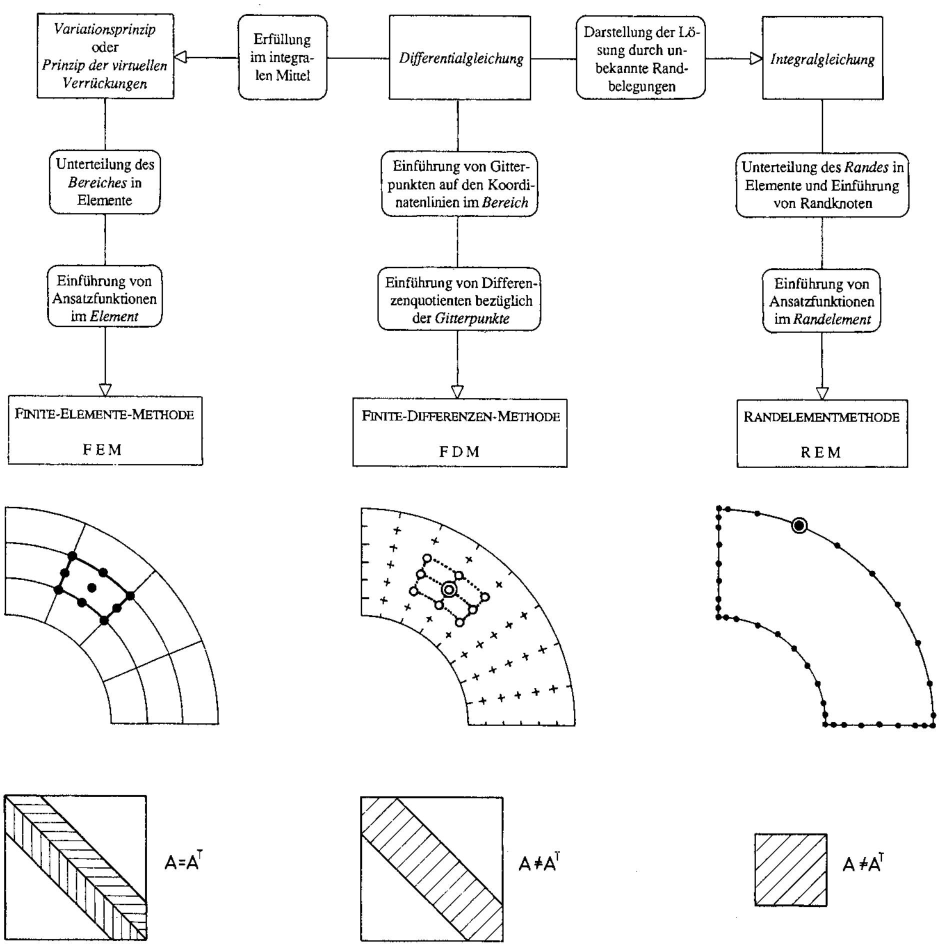


Bild 1.7. Zusammenhang zwischen Finite-Differenzen-Methode, Finite-Elemente-Methode und Randelementmethode

nen Strukturen (z. B. Scheiben veränderlicher Dicke) oder bei nichtlinearen Problemen (z. B. Plastizität) die Überführung in eine Integralgleichung nicht gelingt oder zumindest Terme übrig bleiben, bei denen weiterhin unbekannte Zustandsgrößen im Bereich auftreten. Die großen Vorteile der geringen Unbekanntenzahl gehen dadurch praktisch verloren, zudem wird die Programmorganisation in diesen Fällen um einiges mühsamer als bei der Methode der finiten Elemente.

- Bei der *finiten Differenzenmethode* ist vor allem störend, daß man krummlinige Koordinaten einführen muß, um beliebige Berandungen der Bereiche erfassen zu können. Bei all-

gemeinen Tragwerken mit einer Vielzahl von Ausschnitten, Versteifungen, etc. (Bild 1.1) wird das praktisch unmöglich. Bedingt durch den knotenweisen Aufbau des Gleichungssystems wird der programmorganisatorische Aufwand bei allgemeinen Tragwerken recht hoch. Die Unbekanntenanzahl ist die gleiche wie bei der Finite-Elemente-Methode, das Gleichungssystem ist aber nicht symmetrisch, was einen zusätzlichen Nachteil darstellt.
- Mit der *Finite-Elemente-Methode* lassen sich, da die Struktur elementweise erfaßt wird, auch völlig irreguläre Tragwerke mit allgemeiner Berandung, Diskontinuitäten und Materialinhomogenitäten behandeln. Nichtlinearitäten bereiten methodisch wenige Schwierigkeiten. Trotz des elementweisen Vorgehens beim Aufbau des Gleichungssystems gelangt man letztlich zu knotenbezogenen Gleichungen, die Differenzengleichungen entsprechen.

Diese Übersicht besagt nicht, daß der Finite-Elemente-Formulierung in jedem Fall der Vorzug zu geben ist. Bei einer sehr gleichmäßigen Struktur, die eine regelmäßige Diskretisierung ermöglicht, kann die Differenzenformulierung von Vorteil sein. Das ist z. B. bei der Zeit-Diskretisierung der Fall. Die unterschiedlichen Zeitschrittintegrationsverfahren, die zumeist auf Differenzenformulierungen basieren, sind so gründlich untersucht und so ausgefeilt, daß man es sich zweimal überlegen soll, ehe man eine Zeitschrittdiskretisierung auf der Basis eines Finite-Elemente-Algorithmus vornimmt, obwohl auch das mit Erfolg versucht worden ist.

Die Formulierung über ein Randelementverfahren hat in einer Fülle von Sonderfällen unbestreitbare Vorteile, insbesondere bei linearen Problemen und in Fällen, in denen sich bei der Einführung von finiten Elementen eine unvertretbar hohe Zahl von Freiheitsgraden ergeben würde. Das ist beispielsweise bei Kontaktproblemen (Fundament auf elastischem Halbraum) der Fall, bei denen sich der Boden als Teil der betrachteten Struktur bis ins Unendliche erstreckt. Auch beim Kontakt von Eisenbahnrad und Schiene ist der Einsatz des Randelementverfahrens heute Standard [1.53], obwohl Rad und Schiene streng genommen keine Halbräume sind.

Reizvoll, aber bisher nur unzureichend entwickelt sind Verfahrenskombinationen, bei denen etwa in Teilbereichen einer Struktur unterschiedliche Verfahren eingesetzt werden, die den jeweiligen Anforderungen optimal entsprechen. Hier eröffnet sich ein weites Feld für zukünftige Forschungsarbeiten.

1.5 Zur historischen Entwicklung der Finite-Elemente-Methode

Die Finite-Elemente-Methode wurde vom Ende der 50er Jahre an als Berechnungsverfahren der Strukturmechanik entwickelt, wobei die Entwicklung teilweise erheblich weiter zurückreicht. Wir wollen im folgenden versuchen, die Wurzeln dieser Entwicklung (von rechts nach links) nachzuzeichnen (Bild 1.8).
- Eine Wurzel ist die *Baustatik* und hier besonders die konsequente Systematisierung der klassischen Stabwerkstatik zur Matrizenstatik.

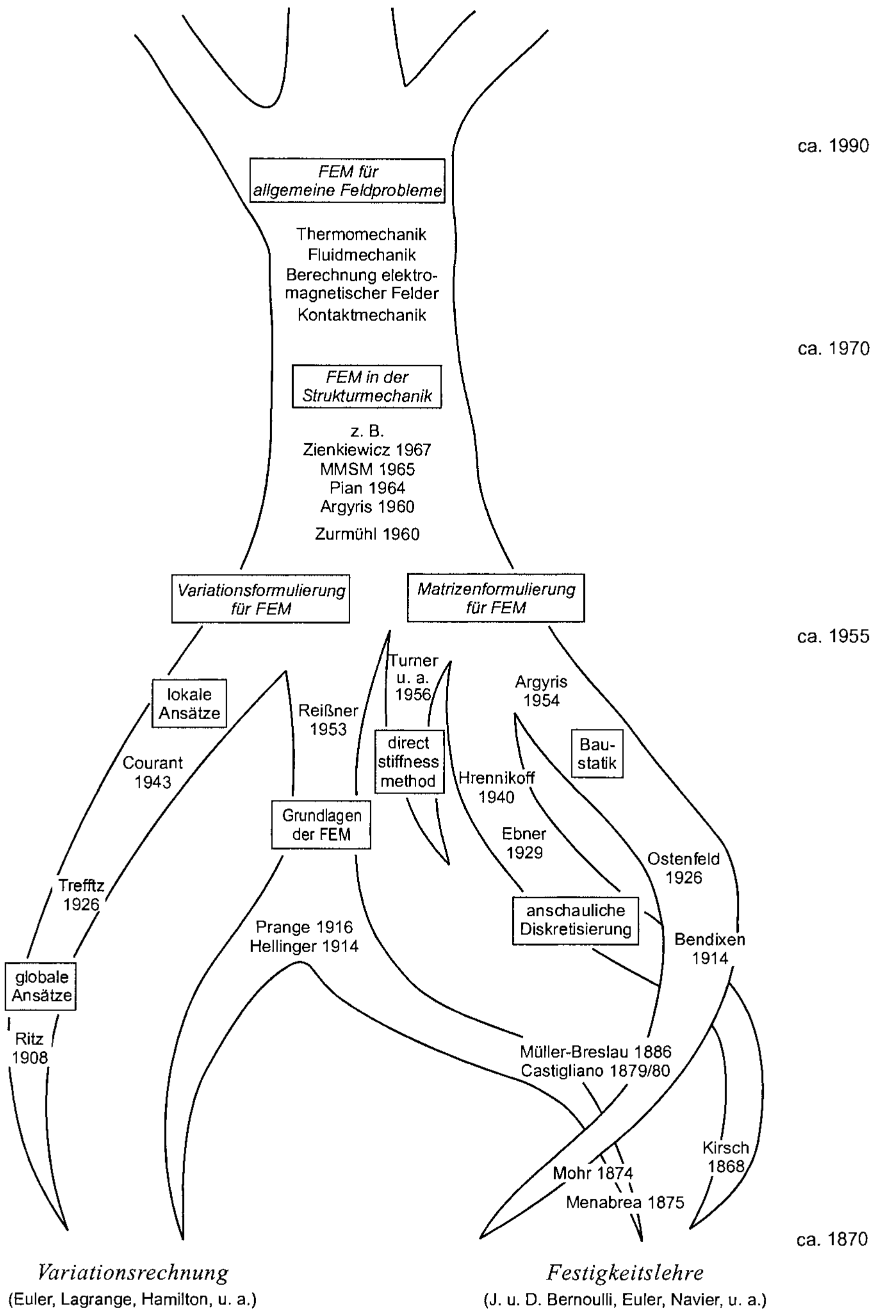


Bild 1.8. Entwicklungslinien der Finite-Elemente-Methode

- Eine zweite Wurzel bilden *anschauliche Diskretisierungen*, mit denen versucht wurde, Flächentragwerke und sogar dreidimensionale Kontinua durch Stabwerke zu ersetzen, um sie so mit baustatischen Verfahren berechnen zu können.
- Eine dritte Wurzel ist die als *‚direct stiffness method'* bezeichnete Vorgehensweise, die heute als Geburtsstunde der Methode der finiten Elemente angesehen wird. Hierbei wird auf anschauliche, ingenieurmäßige Weise versucht, Flächentragwerke elementweise auch flächenhaft zu erfassen.
- Die beiden letzten und stärksten Wurzeln, durch die mit einem Schlag beliebige Feldprobleme der mathematischen Behandlung zugängig wurden, beinhalten die Nutzbarmachung der Variationsrechnung für die Elemententwicklung. Hierbei geht es zum einen um eine Systematisierung und Erweiterung der *Grundlagen*, zum anderen um geeignete *‚lokale'* Ansätze.

Von der Baustatik zur Matrizenstatik

Die Baustatik ist im wesentlichen Stabwerkstatik. Aufbauend auf den Arbeiten von Navier, Menabrea [1.45], Castigliano [1.44] u. a., wurde sie in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts entwickelt [1.16]. In Deutschland ist diese Entwicklung mit den Namen Müller-Breslau [1.17], Mohr [1.18], Hertwig und Weingarten verknüpft. In der Stabwerkstatik konkurrieren das Kraftgrößenverfahren, bei dem als Freiheitsgrade statisch unbestimmte Schnittkräfte eingeführt werden, und das Formänderungsgrößenverfahren (die Deformationsmethode), bei dem Verschiebungen oder Verdrehungen der Knoten als Freiheitsgrade dienen. Beide Verfahren waren etwa 1910 soweit entwickelt, daß sich mit ihnen in den nachfolgenden fünfzig Jahren die Mehrzahl der in der Baupraxis vorkommenden Probleme behandeln ließen. Noch heute wird das Kraftgrößenverfahren in der von Müller-Breslau entwickelten Form eingesetzt. Entsprechendes gilt für das Formänderungsgrößenverfahren, dessen Grundlagen durch eine Arbeit von Mohr gelegt wurden und dessen Systematisierung durch Bendixen (1914) [1.40] und Ostenfeld (1926) [1.19] erfolgte.

Aus heutiger Sicht wäre eine Weiterentwicklung der Baustatik im Hinblick auf eine konsequente Formalisierung durch Einführung der Matrizenschreibweise möglich gewesen. Eine entsprechende an Ingenieure gerichtete Darstellung lag mit dem Buch von Zurmühl [1.46] vor. Die Matrizenschreibweise ist zur Erhaltung der Übersichtlichkeit erforderlich, wenn bei der Analyse von komplexen Rahmentragwerken Gleichungssysteme mit vielen Freiheitsgraden auftreten. Gleichungssysteme mit einer großen Anzahl an Freiheitsgraden - darunter versteht man bei einer Handrechnung schon Gleichungssysteme mit mehr als 10 Unbekannten - konnten aber bis 1950 mit erträglichem Aufwand nicht bearbeitet werden. Auf die Einführung der Matrizenschreibweise in der Baustatik konnte daher verzichtet werden. Die Notwendigkeit, auch Tragwerke zu untersuchen, die auf Gleichungssysteme mit 50 und mehr Freiheitsgraden führen, ergab sich zuerst im Flugzeugbau. Die Möglichkeit dazu war mit der Inbetriebnahme der ersten elektronischen Rechenanlagen gegeben. 1952 wurden in allen Industriestaaten kaum 50 Rechenanlagen verwendet, während ihre Anzahl bis 1962 auf etwa 12000 gestiegen war (davon 1400 in Europa). Motor dieser Rechnerentwicklung und damit letztlich auch der Entwicklung der Finite-Elemente-Methode war der Rüstungssektor. Die ersten Versuche, die Statik durch Einführung von Matrizenschreibweise klar und übersichtlich zu gestalten und die Rechenabläufe zu schematisieren, erfolgten zwar durch Bauingenieure, aber vor dem Hintergrund des Flugzeugbaus. Ein entscheidender Verdienst kommt hierbei ohne Zweifel Argyris [1.20] zu. Argyris, von der Ausbildung her selber Bauingenieur, hat die aus der Baustatik übernommenen und in der Flugzeugindustrie verwendeten Verfahren in Matrizenschreibweise überführt, wobei das Kraftgrößenverfahren und das Formänderungsgrößenverfahren (Deformationsmethode) zur Behandlung des Gesamtsystems dual dargestellt wurden.

Einsatz von Stabelementen, Schubblechen und Torsionskästen zur Modellierung von Flächentragwerken und räumlichen Kontinua

Als die Baustatik zumindest theoretisch in der Lage war, beliebige Stabwerke zu analysieren, lag es nahe, stabförmige Bausteine (Elemente) zur Modellierung von Flächentragwerken zu verwenden. Der Grundgedanke für eine derartige Modellierung findet sich bereits in einer Arbeit von Kirsch (1868) [1.21]. Kirsch zerlegt ein dreidimensionales Kontinuum in einzelne quaderförmige Bausteine und ersetzt dann jeden dieser Quader durch ein regelmäßiges räumliches Fachwerk (Bild 1.9). Durch geeignete Wahl der Stabquerschnitte dieses Ersatzfachwerkes wird erreicht, daß sich das Ersatzfachwerk im Mittel genauso wie der kontinuierliche, rechtwinklige Baustein verhält. Prinzipiell besteht damit die Möglichkeit, ein komplettes, quaderförmiges Kontinuum in ein Fachwerk-Diskontinuum zu überführen. Die dabei entstehenden Gleichungssysteme wären aber im 19. Jahrhundert nicht zu lösen gewesen. Daher wurde der Gedanke von Kirsch nicht aufgegriffen, die Arbeit geriet in Vergessenheit.

Im Jahre 1940 wurde die Idee, Scheiben durch Fachwerke und Platten durch Trägerroste zu ersetzen, von Hrennikoff [1.22] in den USA neu entwickelt. Eine sehr detaillierte Weiterentwicklung (Entwicklung von Dreieckelementen, Übertragung auf Schalen) nahm Spierig [1.23] im Jahre 1963 vor. Praktisch angewandt wurde das Hrennikoff-Modell in einem Programm bei Daimler-Benz durch Zimmer [1.24].

Der Vorzug von Stabelementen mit Biege-, Dehn- und Torsionseigenschaften liegt in ihrer Anschaulichkeit und darin, daß der Schnittkraftverlauf in einem Einzelstab bei Vorgabe der Endwerte eindeutig ist. Ähnlich ist die Situation bei zwei flächenhaften Elementen, dem

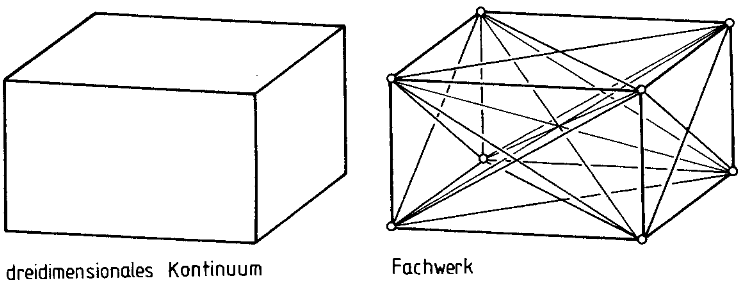


Bild 1.9. Räumliches Ersatzfachwerk als Baustein für die Modellierung eines dreidimensionalen Kontinuums

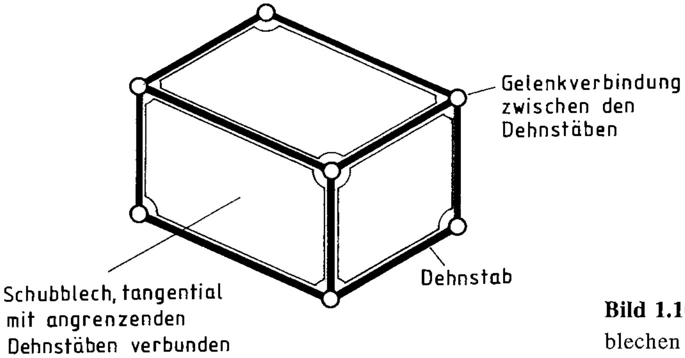


Bild 1.10. Kasten mit Schubblechen

Schubblech und dem Torsionskasten, auf die daher an dieser Stelle hingewiesen werden soll. Bereits 1929 wurde durch Ebner im Flugzeugbau das Schubblech als ebenes Element eingeführt (Bild 1.10). Die Schubkraft im Schubblech ist konstant, andere Schnittkräfte treten nicht auf. Eine Tragkonstruktion aus Dehnstäben und Schubblechen oder Balken und Torsionskästen (als dem entsprechenden Element für die Platte [1.25]) kann prinzipiell genauso wie ein einfaches Stabwerk behandelt werden.

Ingenieurmäßige Entwicklung finiter Elemente im Rahmen der *,direct stiffness method'*

Die Modellierung von Flächentragwerken mit Stabelementen im Rahmen des Hrennikoff-Modells wirkt etwas künstlich. Schubbleche und Torsionskästen sind zwar flächenhafte Gebilde, sie sind aber auf rechteckige Formen beschränkt, lassen sich kaum verallgemeinern und auch nur im Rahmen des Kraftgrößenverfahrens sachgerecht einsetzen. Die zweite Wurzel ist daher heute für die Entwicklung der Finite-Elemente-Methode kaum noch von Bedeutung.

Die erste Arbeit, in der ein finites Element im heute üblichen Sinn vorgestellt wurde, stammt von Turner, Clough, Martin und Topp aus dem Jahr 1956 [1.26]. Üblicherweise wird diese Arbeit als ,Geburtsurkunde' der Methode der finiten Elemente angesehen. Die Vorgehensweise bei dieser sehr anschaulichen, ingenieurmäßigen Entwicklung eines finiten Scheibenelementes ist in Bild 1.11 dargestellt:

- Der Verschiebungszustand im Rechteckelement wird durch einen einfachen Ansatz beschrieben, bei dem die Verschiebungen an den Rändern sich linear ändern.
- Zu diesem Verschiebungszustand werden die Verzerrungen im Element ermittelt.
- Aus diesen Verzerrungen werden über das Elastizitätsgesetz der Spannungs- bzw. der Schnittkraftzustand und damit die Randschnittkräfte im Element ermittelt.
- Die verteilten Randschnittkräfte werden in statisch äquivalente Knotenkräfte umgerechnet und können in den Knoten mit den Kräften aus den angrenzenden Elementen ins Gleichgewicht gesetzt werden.

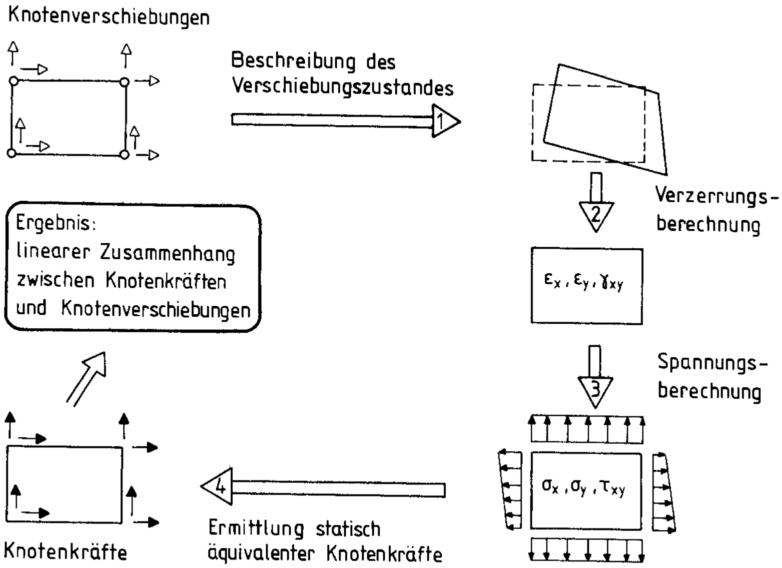


Bild 1.11. ‚direct stiffness method'

Elemententwicklung auf der Grundlage der Variationsrechnung

Die im letzten Abschnitt sehr knapp geschilderte Vorgehensweise der ‚direct stiffness method' ist noch recht anschaulich, ihr haften allerdings eine Reihe von Nachteilen an. Die Hauptnachteile lassen sich in zwei Fragen zusammenfassen: Ist das Vorgehen mathematisch zulässig? Läßt es sich auf beliebige, z. B. krummlinig berandete Elemente übertragen? Sehr bald wurde erkannt, daß man viel leichter zum Ziel kommt, wenn man Ansatzfunktionen zur Beschreibung des Verschiebungszustandes in ein Variationsprinzip (Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie) einsetzt. Die Methode der finiten Elemente ist dann nichts anderes als ein spezielles Ritz-Verfahren.

Beim Ritz-Verfahren [1.27] müssen die Ansatzfunktionen die geometrischen Randbedingungen erfüllen. Fast alle früheren Einzeluntersuchungen auf Basis des Ritz-Verfahrens verwenden Ansatzfunktionen, die sich über die gesamte Struktur erstrecken. Derartige Ansatzfunktionen sind dann im betrachteten Bereich praktisch beliebig stetig; für etwas kompliziertere Berandungen lassen sich aber keine Ansatzfunktionen mehr angeben.

Daß man anstelle von *‚globalen'* Ansatzfunktionen auch *‚lokal begrenzte'* Ansatzfunktionen verwenden konnte, verstand sich für einen Mathematiker fast von selbst. Es gibt mindestens zwei ältere Arbeiten, bei denen lokal begrenzte Ansätze verwendet wurden. In der Originalarbeit von Trefftz [1.28] aus dem Jahre 1926, in der ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren vorgestellt wird, wird als Beispiel ein Torsionsprofil in vier Rechteckfelder zerlegt. Courant schlägt 1943 [1.29] die Verwendung von elementweisen Ansätzen für Schwingungsaufgaben vor.

Daß diese Gedanken von Ingenieurwissenschaftlern nicht weiterentwickelt wurden, lag daran, daß man bei Verwendung elementweise begrenzter Ansatzfunktionen zu Gleichungssystemen mit großen Unbekanntenzahlen kommt, die ohne elektronische Rechenanlagen nicht mehr behandelbar sind. Die mathematischen Grundlagen lagen in Deutschland in dem bereits erwähnten Buch von Zurmühl [1.46] vor. Sobald Rechenanlagen verfügbar waren, das war Anfang der 60er Jahre der Fall, konnte das Konzept einer Elemententwicklung auf der Basis der Variationsrechnung durch Einführung lokal begrenzter Ansatzfunktionen voll zur Entfaltung kommen. Pionierarbeiten auf diesem Gebiet haben Zienkiewicz [1.34] und Argyris [1.33] geleistet. Alle Finite-Elemente-Entwicklungen von 1960 bis heute basieren auf diesem Konzept. Eine erste Konferenz zum Thema ‚Matrix Methods in Structural Mechanics' (MMSM) fand 1965 in den USA statt [1.54].

Mit der Variationsrechnung eröffneten sich auf dem Gebiet der Strukturmechanik noch andere Möglichkeiten zur Entwicklung finiter Elemente. Verwendet man andere Variationsprinzipien als das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie, so wird es z. B. möglich, im Element nicht den Verschiebungszustand sondern den Schnittkraftzustand zu approximieren. Wie man zu derartigen alternativen Variationsprinzipien gelangt, ergibt sich bereits aus der Habilitation von Prange [1.30], die eigentlich eine Zusammenfassung unterschiedlicher Methoden der Strukturmechanik und der Baustatik unter dem Gesichtspunkt der Variationsrechnung darstellt. Die von Prange aufgezeigte Möglichkeit, alternative oder modifizierte Variationsprinzipien einzusetzen, war über fünfzig Jahre nahezu in Vergessenheit geraten und wurde erst zu dem Zeitpunkt von Ingenieurwissenschaftlern (Reissner [1.31]) wiederentdeckt, als die Möglichkeit bestand, entsprechende Verfahren durch den Einsatz von Rechenanlagen auch numerisch zu erproben. Wir werden diese Verfahren in unserem Buch nicht darstellen, wollen aber ausdrücklich auf die Arbeiten von Pian [1.32, 1.39] hinweisen.

Die inzwischen fünfzigjährige Geschichte der Methode der finiten Elemente hat eine Fülle von Lehrbüchern und Monographien hervorgebracht. Eine Zusammenstellung aus dem Jahr 1990 findet man in [1.41]. Wir beschränken uns darauf, dem Leser, der sich über diese Einführung hinaus mit der Finite-Elemente-Methode beschäftigen will, nur zwei Bücher zu empfehlen. Das inzwischen in sechster Auflage erschienene Buch von Zienkiewicz [1.49-1.51], das den Charakter eines Handbuches besitzt, gibt einen guten Überblick über die Einsatzmöglichkeiten der Finite-Elemente-Methode. Besonders wertvoll sind die vielen Literaturhinweise zu den einzelnen Einsatzgebieten. Das in 2. Auflage erschiene Buch von Bathe [1.35] ist ein hervorragendes Lehrbuch für Fortgeschrittene. Schwerpunkte sind numerische Lösungsalgorithmen und die Behandlung nichtlinearer Probleme, wobei der Autor auf seine umfangreichen Erfahrungen bei der Entwicklung des Programmsystems ADINA für nichtlineare, strukturmechanische Untersuchungen zurückgreifen kann. Ein weiteres Lehrbuch zum Einsatz des Finite-Elemente-Verfahrens für nichtlineare Probleme stammt von Wriggers [1.36].

Wer sich für den Einsatzbereich und die Leistungsfähigkeit von Finite-Elemente-Programmsysteme interessiert, sollte im Internet recherchieren. Dort findet man Informationen zu praktisch allen Programmsystemen.

1.6 Gliederung des Buches

Der Aufbau des Buches und die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Kapiteln sind in Bild 1.12 verdeutlicht. Einen ersten Block bilden **strukturmechanische Grundlagen**. Im *Kapitel 2* werden die Grundgleichungen der Strukturmechanik für den statischen, linear-elastischen Fall zusammengestellt. Am Beispiel der Scheibe und des Dehnstabes soll sich der Leser mit dem verwendeten Begriffsapparat und mit der symbolische Schreibweise vertraut machen. Tabellarische Zusammenstellungen ermöglichen es, auch für das dreidimensionale Kontinuum sowie für schubstarre und schubweiche Balken und Platten die Symbole mit Inhalt zu füllen. Um ein Finite-Elemente-Verfahren entwickeln zu können, müssen die punktweise gültigen Grundgleichungen der Strukturmechanik zuerst in eine integrale Mittelwertaussage überführt werden. Diese Transformation zum Prinzip der virtuellen Verrückungen erfolgt in *Kapitel 3* in symbolischer Schreibweise und ist damit prinzipiell für alle Kontinua gültig. Am Beispiel der instationären Wärmeleitung wird zudem demonstriert, daß die Logik der Überführung bei allen physikalischen Feldproblemen dieselbe ist.

Die Entwicklung eines Finite-Elemente-Verfahrens und die dabei auftretenden Probleme werden in den Kapiteln 4, 5, 7 und 8 am Beispiel der **Scheibe** diskutiert. Die Scheibe wurde als Beispiel gewählt, weil hierbei alle wesentlichen Probleme der Diskretisierung eines Kontinuums mit finiten Elementen erkennbar werden. Eindimensionale Kontinua (Stäbe) nehmen in vieler Hinsicht eine Sonderstellung ein, dreidimensionale Kontinua sind als Einführung ungeeignet, da illustrierende Darstellungen und Beispielrechnungen mit einem hohen Aufwand verbunden sind. Am denkbar einfachsten Element, dem 4-Knoten-Rechteckelement, wird in *Kapitel 4* dargestellt, wie man durch Einführung von Ansatzfunktionen in das Prinzip der virtuellen Verrückungen zu einem Finite-Elemente-Verfahren gelangt. Anschließend werden an einem numerischen Beispiel die Einsetzbarkeit des Elementes demonstriert. Den Abschluß dieses Kapitels bildet die Entwicklung eines Finite-Elemente-Verfahrens für Fachwerke, um zum einen die Allgemeingültigkeit der Verfahrensentwicklung zu demonstrieren und zum anderen auf die Besonderheiten eindimensionaler Elemente zu einzugehen. In *Kapitel 5* werden einzelne Aspekte der programmtechnischen Umsetzung behandelt, ohne damit eine allgemeine Einführung in die Programmiertechnik geben zu wollen.

Die Verfahrensentwicklung läuft bei Elementen mit anderer Knotenanzahl oder anderer Berandung im wesentlichen in der gleichen Form wie im vierten Kapitel ab, man benötigt nur die geeigneten Ansatzfunktionen. Welche Möglichkeiten der Elemententwicklung bei der Scheibe bestehen, wird in *Kapitel 7* erörtert. Im Mittelpunkt von *Kapitel 8* stehen numerische Probleme bei der Entwicklung und Erprobung von Scheibenelementen, die in die Frage münden, ob es ein ‚optimales‘ Scheibenelement gibt.

Sowohl schubstarre als auch schubweiche **Platten** und **Balken**, die den Inhalt des dritten Themenblocks bilden, unterscheiden sich grundsätzlich von Scheibe, Dehnstab und dreidimensionalem Kontinuum, da sie einem anderen Problemtyp angehören. Maßgebend für den Problemtyp sind, wie aus der Klassifikation in *Kapitel 6* hervorgeht, die Differentiationsvorschriften im Prinzip der virtuellen Verrückungen. Geht man von der Deformationsmethode zum Kraftgrößenverfahren und damit vom Prinzip der virtuellen Verrückungen zum

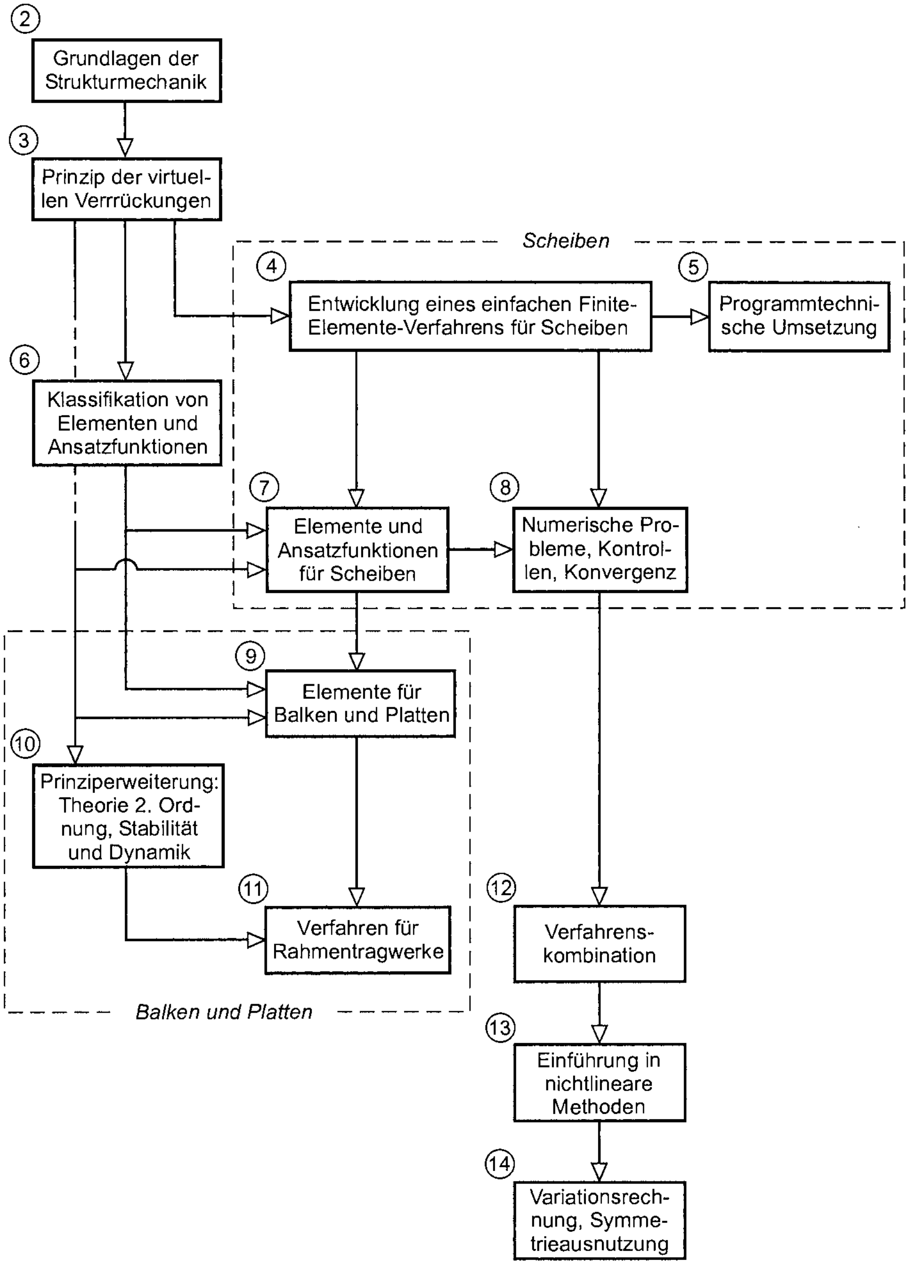


Bild 1.12. Kapitelgliederung

Prinzip der virtuellen Kräfte über, so ergeben sich keine weiteren Problemtypen. Für die Elemententwicklung hat der Problemtyp gravierendere Konsequenzen als Knotenanzahl und Elementberandung. Möglichkeiten zur Elemententwicklung für Balken und Platten, die einem anderen Problemtyp als die Scheibe angehören, werden daher gesondert in *Kapitel 9* behandelt, einschließlich der dabei auftretenden Komplikationen (Forderung nach C^1-Stetigkeit bei der schubstarren Platte, ‚Shear-Locking' bei der schubweichen Platte). Bevor in *Kapitel 11* im Hinblick auf die dabei auftretenden Besonderheiten die Entwicklung eines Verfahrens für Rahmentragwerke vorgestellt wird, wird in *Kapitel 10* das Prinzip der virtuellen Verrückungen erst noch für dynamische Probleme und für Rechnungen nach Theorie 2. Ordnung erweitert, die bei Biegestrukturen eine erhebliche Rolle spielen.

In *Kapitel 12* wird eine Möglichkeiten behandelt, durch die sich der Rechenaufwand zum Teil drastisch reduzieren läßt. Durch Kombination unterschiedlicher Methoden lassen sich zwei- und dreidimensionale in eindimensionale Probleme überführen, zu deren Behandlung am Schluß einer Kette von Verfahren die Finite-Elemente-Methode eingesetzt wird.

Zusätzlich wurde in der 4. Auflage das *Kapitel 13* zur Behandlung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik aufgenommen. Die Darstellung erfolgt im Interesse der Allgemeingültigkeit für dreidimensionale Kontinua. Geometrische Nichtlinearitäten stehen im Mittelpunkt der Betrachtung. Wie Materialnichtlinearitäten prinzipiell zu behandeln sind, wird am Beispiel des NeoHookeschen (nichtlinear-elastischen) Materialverhaltens erläutert.

Der Anhang (*Kapitel 14*) enthält Erläuterungen zu den Integralsätzen und eine Einführung in die Grundlagen der Variationsrechnung, die zum besseren Verständnis an einer Reihe von Stellen hilfreich sind. Außerdem werden Möglichkeiten der Unbekanntenreduktion durch systematische Symmetrieausnutzung erörtert. Die Lösungen zu den in Kapitel *2* bis *14* formulierten Übungsaufgaben sind in Kapitel *15* zusammengestellt.

Einer der Grundgedanken, der sich durch fast alle Kapitel des Buches zieht, ist die Frage von Kontrollen. Nach Ansicht der Autoren werden sie auch in der Zukunft unabdingbar sein. Die Notwendigkeit von Kontrollen steht außer Zweifel, wenn man selbst Elemente oder Verfahren entwickelt. Auf systematische Kontrollen ist man aber genauso angewiesen, wenn man sich in große Programme einarbeiten und deren Leistungsfähigkeit erkunden will - man lese hierzu beispielsweise die sehr offene Schilderung der ‚Kinderjahre' von NASTRAN [1.38] oder einen Hinweis eines Praktikers aus jüngerer Zeit [1.43]. Und schließlich sollte man das Ergebnis jeder numerischen Rechnung kontrollieren, um Eingabefehler ausschließen zu können. Allerdings sollte man sich vor Beginn der Rechnung darüber klar werden, auf welche Weise man ein Ergebnis kontrollieren will, da der Mensch nur allzuleicht geneigt ist, die Ergebnisse einer aufwendigen numerischen Rechnung als richtig zu interpretieren. Übertrieben formuliert: Um kontrollieren zu können, muß man das Ergebnis (zumindest qualitativ) schon kennen, und hierzu werden auch in Zukunft analytische Lösungen für stark vereinfachte Modelle unabdingbar sein.

Vieles findet sich nicht in dieser Einführung. Dazu gehören z. B. Schalenelemente und selbstadaptive Finite-Elemente-Verfahren. Und auch Elemente auf der Grundlage von gemischten und hybriden Variationsprinzipien werden nur am Rande gestreift. Aber irgendwo muß Schluß sein!