

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|----|
| 1 | Einleitung | |
| 1.1 | Vorgehensweise bei der FEM | 3 |
| 1.2 | Verschiedene Elementtypen | 5 |
| 1.3 | Beispiele zur Finite-Elemente-Methode | 10 |
| 1.3.1 | Beispiel zu nichtlinearen Problemen | 10 |
| 1.3.2 | Beispiele zur Optimierung | 11 |
| 2 | Mathematische Grundlagen | |
| 2.1 | Schreibweisen | 19 |
| 2.2 | Vektoren | 20 |
| 2.2.1 | Definition eines n dimensionalen Vektors | 20 |
| 2.2.2 | Skalarprodukt | 20 |
| 2.2.3 | Kreuzprodukt | 20 |
| 2.2.4 | Ableitung von Vektoren | 21 |
| 2.2.5 | Der Nabla-Vektor | 22 |
| 2.2.6 | Der Gradientenvektor | 22 |
| 2.2.7 | Divergenz und Laplace-Operator | 23 |
| 2.3 | Matrizen | 23 |
| 2.3.1 | Definition einer Matrix | 23 |
| 2.3.2 | Rechenregeln | 24 |
| 2.3.3 | Transponierte Matrix | 26 |
| 2.3.4 | Orthogonale Matrix | 27 |
| 2.4 | Die Dyade (Tensor zweiter Stufe) | 27 |
| 2.4.1 | Differentialoperator | 28 |
| 2.4.2 | Tensor höherer Stufe | 28 |
| 2.5 | Felder | 28 |
| 2.5.1 | Skalarfelder | 28 |
| 2.5.2 | Das Vektorfeld als Gradient des Skalarfeldes | 29 |
| 2.5.3 | Das dyadische Feld | 29 |
| 2.6 | Lineare Transformation | 32 |
| 2.6.1 | Transformation eines Vektors | 32 |
| 2.6.2 | Transformation einer Dyade (Tensor zweiter Stufe) | 34 |
| 2.6.3 | Beispiele zur Transformation | 34 |
| 2.7 | Funktionale | 36 |
| 2.7.1 | Diskretisierung des Funktional | 38 |
| 2.8 | Dreieckskoordinaten | 39 |
| 2.8.1 | Ableitungen in Dreieckskoordinaten (Jakobi-Matrix) | 41 |
| 2.8.2 | Integration in Dreieckskoordinaten | 44 |
| 2.9 | Numerische Integration (Quadratur) | 45 |
| 2.9.1 | Numerische Integration für eindimensionale Probleme ... | 45 |

| | | |
|----------|---|----|
| 2.9.2 | Numerische Integration in Dreieckskoordinaten | 46 |
| 2.10 | Lineare Gleichungssysteme bei der FEM | 48 |
| 2.10.1 | Definition der Bandbreite | 48 |
| 2.10.2 | Rechenzeiten zur Lösung linearer Gleichungssysteme | 49 |
| 2.10.3 | Positiv definite Matrix | 50 |
| 2.10.4 | Das Verfahren von Cholesky | 51 |
| 2.10.5 | Kondition linearer Gleichungssysteme | 53 |
| 2.10.6 | Zwangsbedingungen bei linearen Gleichungssystemen ... | 56 |
| 2.11 | Näherungsfehler bei der FEM | 57 |
| 2.12 | Das Tonti-Diagramm..... | 58 |
| 3 | Beschreibung elastostatischer Probleme | |
| 3.1 | Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie..... | 63 |
| 3.1.1 | Verknüpfung der Verschiebungen mit den Dehnungen ... | 63 |
| 3.1.2 | Das Stoffgesetz..... | 64 |
| 3.1.3 | Gleichgewichtsbedingungen | 64 |
| 3.1.4 | Randbedingungen | 64 |
| 3.1.5 | Das Tonti-Diagramm des elastostatischen Problems.... | 65 |
| 3.1.6 | Verknüpfung der Grundgleichungen der Elastostatik..... | 66 |
| 3.2 | Das Prinzip virtueller Verrückungen..... | 67 |
| 3.2.1 | Das Prinzip vom Gesamtpotential | 67 |
| 3.2.2 | Beispiel zum Prinzip des Gesamtpotentials | 69 |
| 4 | Das Verfahren von Ritz | |
| 4.1 | Aufprägen der wesentlichen Randbedingungen..... | 74 |
| 4.1.1 | Beispiel zu den wesentlichen Randbedingungen..... | 75 |
| 4.2 | Eindimensionale Stabprobleme | 77 |
| 4.2.1 | Diskretisierung der Formänderungsarbeit..... | 77 |
| 4.2.2 | Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten..... | 78 |
| 4.2.3 | Beispiel zum eindimensionalen Stab | 79 |
| 4.3 | Eindimensionale Balkenprobleme | 81 |
| 4.3.1 | Diskretisierung der Formänderungsarbeit..... | 81 |
| 4.3.2 | Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten..... | 81 |
| 4.3.3 | Variation des Gesamtpotentials | 82 |
| 4.4 | Scheibenproblem | 86 |
| 4.4.1 | Verschiebungsansätze | 87 |
| 4.4.2 | Wesentliche Randbedingungen | 87 |
| 4.4.3 | Dehnungen und Spannungen der Scheibe | 88 |
| 4.4.4 | Diskretisierung der Formänderungsarbeit..... | 89 |
| 4.4.5 | Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten..... | 90 |
| 4.4.6 | Variation des Gesamtpotentials | 91 |
| 4.4.7 | Kragbalken als Scheibenproblem..... | 91 |

| | | |
|----------|--|-----|
| 5 | Stabelemente | |
| 5.1 | Das eindimensionale Stabelement | 97 |
| 5.1.1 | Problemdefinition | 97 |
| 5.1.2 | Das Tonti-Diagramm des Stabes | 97 |
| 5.1.3 | Das Funktional des Stabproblems | 100 |
| 5.1.4 | Diskretisierung des Funktionals des Stabes | 100 |
| 5.1.5 | Variation des Funktionals | 103 |
| 5.1.6 | Beispiel zum eindimensionalen Stab..... | 105 |
| 5.1.7 | Direkte Erstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix | 111 |
| 5.1.8 | Erstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix (allgemein) | 113 |
| 5.1.9 | Übungsaufgaben zum eindimensionalen Stab | 115 |
| 5.1.10 | Variable Querschnittsfläche des Stabelementes | 115 |
| 5.1.11 | Eindimensionales Stabelement mit n Knoten | 117 |
| 5.1.12 | Eindimensionaler Stab mit drei bzw. vier Knoten | 119 |
| 5.2 | Das zwei- und dreidimensionale Stabelement | 120 |
| 5.2.1 | Das zweidimensionale Stabelement | 120 |
| 5.2.2 | Beispiel zum zweidimensionalen Stabproblem | 123 |
| 5.2.3 | Optimierung einer Stabstruktur | 128 |
| 5.2.4 | Übungsaufgaben zum zweidimensionalen Stab..... | 130 |
| 5.2.5 | Das dreidimensionale Stabelement | 132 |
| 6 | Balkenelemente | |
| 6.1 | Das eindimensionale Balkenelement..... | 137 |
| 6.1.1 | Problemdefinition | 137 |
| 6.1.2 | Dehnungen und Spannungen im Balken | 138 |
| 6.1.3 | Das Tonti-Diagramm des Bernoulli-Balkens | 139 |
| 6.1.4 | Funktional des Balkenproblems | 140 |
| 6.1.5 | Formfunktionen des eindimensionalen Balkens | 141 |
| 6.1.6 | Diskretisierung des Funktionals | 143 |
| 6.1.7 | Variation des diskretisierten Funktionals | 145 |
| 6.1.8 | Bilden der Steifigkeitsmatrix | 146 |
| 6.1.9 | Diskretisierung der Streckenlast..... | 147 |
| 6.1.10 | Schnittgrößen des Balkenelementes | 149 |
| 6.2 | Beispiel zum eindimensionalen Balken | 151 |
| 6.2.1 | Zweiseitig gelagerter Balken mit Streckenlast | 151 |
| 6.2.2 | Konvergenztest beim zweiknotigen Balkenelement..... | 154 |
| 6.2.3 | Realisierung des Gelenkes über eine Zwangsbedingung... | 157 |
| 6.3 | Übungsaufgaben zum eindimensionalen Balken | 159 |
| 6.4 | Balkenelement mit n Knoten und p Freiheitsgraden pro Knoten | 161 |
| 6.4.1 | Das eindimensionale Balkenelement mit drei Knoten | 164 |

| | | |
|--------------|---|------------|
| 6.4.2 | Das eindimensionale Balkenelement mit drei Freiheitsgraden pro Knoten | 168 |
| 6.4.3 | Balken mit unstetiger Krümmungsverteilung | 171 |
| 6.5 | Der Timoshenko-Balken | 172 |
| 6.5.1 | Konvergenztest Kragbalken | 178 |
| 6.5.2 | Balkenbeispiel VII | 179 |
| 6.6 | Der elastisch gelagerte Balken | 180 |
| 6.6.1 | Beispiel zum elastisch gelagerten Balken | 182 |
| 6.7 | Zweidimensionales Balkenelement | 187 |
| 6.7.1 | Freiheitsgrade des zweidimensionalen Balkens | 187 |
| 6.7.2 | Überlagerung der Dehnungen von Stab und Balken | 187 |
| 6.7.3 | Steifigkeitsmatrix | 188 |
| 6.7.4 | Transformation der Steifigkeitsmatrix | 190 |
| 6.8 | Beispiel und Übungsaufgaben zum zweidimensionalen Balken | 193 |
| 6.8.1 | Winkelproblem | 193 |
| 6.8.2 | Übungsaufgaben zum zweidimensionalen Balken | 199 |
| 7 | Scheibenproblem | |
| 7.1 | Problemdefinition | 205 |
| 7.2 | Die Grundgleichungen des Scheibenproblems | 206 |
| 7.2.1 | Die Feldgleichungen der Scheibe | 207 |
| 7.3 | Das Funktional des Scheibenproblems | 208 |
| 7.4 | Diskretisierung des Funktionals | 209 |
| 7.4.1 | Formfunktionen des Dreieckselementes | 209 |
| 7.4.2 | Variation des diskretisierten Funktionals | 213 |
| 7.4.3 | Diskretisierung der Volumenkräfte | 215 |
| 7.4.4 | Diskretisierung der Streckenlasten | 218 |
| 7.4.5 | Spannungen in der Scheibe | 221 |
| 7.5 | Beispiele zum Scheibenproblem | 221 |
| 7.6 | Übungsaufgaben zur Scheibe | 227 |
| 8 | Platten und Schalenelemente | |
| 8.1 | Problemdefinition | 231 |
| 8.2 | Grundbeziehungen der Platte | 231 |
| 8.2.1 | Voraussetzungen bei der Kirchhoff-Platte | 231 |
| 8.2.2 | Kinematische Größen der Platte | 233 |
| 8.2.3 | Krümmungs-Momenten-Beziehung (Stoffgleichung) | 234 |
| 8.2.4 | Gleichgewichtsbeziehungen der Platte | 236 |
| 8.2.5 | Randbedingungen der Platte | 236 |
| 8.3 | Das Funktional der Platte | 237 |
| 8.4 | Anforderungen an das Plattenelement | 239 |

| | | |
|----------|--|-----|
| 8.4.1 | Kompatibilität (konforme Elemente) | 239 |
| 8.4.2 | Starrkörperbewegung..... | 240 |
| 8.4.3 | Konstanter Dehnungszustand (Verzerrungszustand) | 241 |
| 8.4.4 | Einige Dreiecksplattenelemente | 241 |
| 8.5 | Diskretisierung des Funktional | 243 |
| 8.5.1 | Ansatzfunktion für die Durchbiegung | 243 |
| 8.5.2 | Interpolationsbedingungen | 244 |
| 8.5.3 | Formfunktionen | 247 |
| 8.5.4 | Krümmungs-Verschiebungs-Beziehung..... | 248 |
| 8.5.5 | Steifigkeitsmatrix | 249 |
| 8.5.6 | Flächenlast | 250 |
| 8.5.7 | Streckenlast entlang einer Elementkante | 250 |
| 8.6 | Konvergenztest des Plattenelementes..... | 251 |
| 8.7 | Schalenelement | 253 |
| 9 | Feldprobleme | |
| 9.1 | Wärmeübertragung | 263 |
| 9.1.1 | Die Poisson'sche Gleichung | 263 |
| 9.1.2 | Randbedingungen | 263 |
| 9.1.3 | Das Funktional der Wärmeübertragung | 264 |
| 9.2 | Eindimensionale Wärmeübertragung | 265 |
| 9.2.1 | Problemdefinition | 265 |
| 9.2.2 | Funktional des eindimensionalen Wärmeübertragungsproblems | 266 |
| 9.2.3 | Diskretisierung des Funktional | 266 |
| 9.2.4 | Variation des Funktional | 270 |
| 9.2.5 | Beispiel zur eindimensionalen Wärmeübertragung | 271 |
| 9.2.6 | Übungsaufgaben: Eindimensionale Wärmeübertragung... | 276 |
| 9.3 | Zweidimensionale Wärmeübertragung | 277 |
| 9.3.1 | Problemdefinition | 277 |
| 9.3.2 | Randbedingungen bei der zweidimensionalen Wärmeübertragung | 278 |
| 9.3.3 | Diskretisierung des Funktional | 279 |
| 9.3.4 | Variation des Funktional | 286 |
| 9.4 | Beispiel zur zweidimensionalen Wärmeübertragung | 288 |
| 9.5 | Übungsaufgaben zur zweidimensionalen Wärmeübertragung | 293 |
| 9.6 | Torsion von prismatischen Körpern | 295 |
| 9.6.1 | Funktional des Torsionsproblems..... | 298 |
| 9.6.2 | Torsion eines Stabes mit quadratischem Querschnitt | 298 |

| | | |
|----------------|---|------------|
| 10 | Eigenfrequenzen und Schwingungsformen von Stäben und Balken | |
| 10.1 | Der eindimensionale Stab | 303 |
| 10.1.1 | Massenmatrix des eindimensionalen Stabes..... | 304 |
| 10.1.2 | Eigenfrequenzen und Schwingungsformen..... | 304 |
| 10.2 | Beispiele zum eindimensionalen Stab | 306 |
| 10.2.1 | Einmassenschwinger | 306 |
| 10.2.2 | Zweimassenschwinger | 307 |
| 10.3 | Der eindimensionale Balken..... | 310 |
| 10.3.1 | Massenmatrix des eindimensionalen Balkens | 310 |
| 10.4 | Beispiele zum eindimensionalen Balken..... | 311 |
| 10.4.1 | Beidseitig gelenkig gelagerte Balken | 311 |
| 10.4.2 | Kragbalken | 314 |
| 11 | Nichtlineare Probleme | |
| 11.1 | Große Verformungen | 319 |
| 11.1.1 | Dehnungs-Verschiebungs-Beziehung | 319 |
| 11.1.2 | Dehnungen für Stab und Balken..... | 320 |
| 11.1.3 | Stab mit großen Verformungen | 320 |
| 11.1.4 | Balken mit großen Verformungen..... | 323 |
| 11.2 | Knicken von Stäben und Balken | 327 |
| 11.2.1 | Beispiel zum Stabknicken | 329 |
| 11.2.2 | Beispiel zum Knicken von Balken..... | 332 |
| 11.2.3 | Die vier Eulerfälle | 335 |
| 11.2.4 | Übungsaufgabe: Das dreiknotige Balkenelement..... | 336 |
| 12 | CALL_for_FEM | |
| 12.1 | Kurzübersicht über die einzelnen Programme | 339 |
| 12.2 | Programmbeschreibungen | 343 |
| 12.2.1 | FEM_GEN und FEM_CAS..... | 343 |
| 12.2.2 | Das Programm InterFEM | 343 |
| 12.2.3 | Das Verfahren von Ritz für den eindimensionalen Stab (Ritz_Stab) | 345 |
| 12.2.4 | Das Verfahren von Ritz für den Balken (Ritz_Balken).... | 347 |
| 12.2.5 | Das Verfahren von Ritz für die Scheibe (Ritz_Scheibe) .. | 349 |
| 12.2.6 | Eindimensionales Stabelement (Stab_1D) | 351 |
| 12.2.7 | Eindimensionales Balkenelement (Balken_1D) | 353 |
| 12.2.8 | Dreiecksscheibenelement (Scheibe_Dreieck) | 355 |
| 12.2.9 | Plattenelement (Platte) | 356 |
| 12.2.10 | Knicken eines eindimensionalen Balkens (Knicken_Balken) | 356 |
| 12.2.11 | Eigenfrequenzen und Schwingungsform des Balkens (Dynamik_Balken) | 358 |

| | |
|--|------------|
| Inhaltsverzeichnis | xv |
| 12.2.12 Eindimensionale Feldprobleme (Feldprobleme_1D) | 359 |
| 12.2.13 Zweidimensionales Feldproblem (Feldprobleme_2D)..... | 360 |
| | |
| 13 Beispiele zu den Programmen | |
| 13.1 Rahmen durch Federn gestützt | 363 |
| 13.2 Scheibe gestützt durch eine Feder..... | 364 |
| 13.3 Wärmeübertragung (Torsion) eines gleichseitigen Dreiecks (Quadrates)..... | 367 |
| | |
| Verwendete Formelzeichen und Symbole | 370 |
| | |
| Literatur | 381 |
| | |
| Sachverzeichnis | 385 |
| | |
| Programme | 393 |