

**HEYNE <**

## DER AUTOR

Adrián Paenza, 1949 in Buenos Aires geboren, promovierte in Mathematik an der Universität von Buenos Aires, wo er am Institut für Mathematik lehrt. Zugleich arbeitet er als freier Journalist. Er war bereits für die wichtigsten argentinischen Radiosender und die fünf Fernsehsender des Landes tätig. Derzeit leitet er die Fernsehserie *Científicos Industria Argentina*. Er schreibt für verschiedene Zeitschriften und die Tageszeitungen *Clarín*, *Página/12* und *La Nación*.

ADRIÁN PAENZA

# Mathematik durch die Hintertür

Das Schubfach-Prinzip,  
der Vier-Farben-Satz und viele andere  
Denkwürdigkeiten  
aus der Welt der Zahlen

Aus dem argentinischen Spanisch von  
Nina und Israel Valenzuela Montenegro

WILHELM HEYNE VERLAG  
MÜNCHEN

Die Originalausgabe

*Matemática ... estás ahí?*

erschien 2005 bei Siglo XXI Editores Argentina S.A.,  
Buenos Aires



Verlagsgruppe Random House FSC-DEU-0100  
Das für dieses Buch verwendete  
FSC-zertifizierte Papier *München Super*  
liefert Mochenwangen.

Deutsche Erstausgabe 01/2008

Copyright © 2005 by Siglo XXI Editores Argentina S.A.

Copyright der deutschen Ausgabe © 2008 by

Wilhelm Heyne Verlag, München,

in der Verlagsgruppe Random House GmbH

[www.heyne.de](http://www.heyne.de)

Printed in Germany 2008

Redaktion: Nadine Mutz

Umschlaggestaltung: Eisele Grafik-Design, München

Umschlagillustration: Isabel Klett

Satz: C. Schaber Datentechnik, Wels

Druck und Bindung: GGP Media GmbH, Pößneck

ISBN: 978-3-453-60057-7

*Ich widme dieses Buch meinen Eltern, Ernesto und Fruma, denen ich alles verdanke.*

*Meiner geliebten Schwester Laura.*

*Meinen Nichten und Neffen: Lorena, Alejandro, Máximo, Paula, Ignacio,*

*Brenda, Miguelito, Sabina, Viviana, Soledad, María José, Valentín,*

*Gabriel, Max, Jason, Whitney, Amanda, Jonathan, Meagan und Chad.*

*Carlos Griguol.*

*Im Gedenken an meine Tanten Elena, Miriam und Delia sowie an Guido Peskin, León Najnudel, Manny Kreiter und Noemí Cuño.*

## *Dank*

An Diego Golombek: Ohne ihn hätte es dieses Buch nie gegeben.

An Claudio Martínez: Weil er der Erste war, der darauf drang, diese Geschichten im Fernsehen zu erzählen, und mich immer wieder dazu ermunterte.

An meine Schüler: Von ihnen habe ich gelernt zu lehren und verstanden, was Lernen bedeutet. An meine Freunde, weil es eben meine Freunde sind, weil sie mich lieben, und das ist das Einzige, was mir etwas bedeutet.

An Carmen Sessa, Alicia Dickenstein, Miguel Herrera, Baldomero Rubio Segovia, Eduardo Dubuc, Carlos D'Andrea, Cristian Czubara, Enzo Gentile, Ángel Larotonda und Luis Santaló.

An diejenigen, die das Manuskript gelesen und kritisiert haben, um es zu retten, wenn ich auch nicht weiß, ob es ihnen gelungen ist: Gerardo Garbulsky, Alicia Dickenstein und Carlos D'Andrea.

An Marcelo Bielsa, Alberto Kornblihtt, Víctor Hugo Morales und Horacio Verbitsky, für ihre ethische Gesinnung. Dank ihnen bin ich ein besserer Mensch.

## *Inhalt*

Die Hand der Prinzessin .....	11
Zahlen .....	15
Große Zahlen .....	15
Mehr über große Zahlen: das Gewicht eines Schachbretts .....	17
Atome im Universum .....	19
Was ist ein Lichtjahr? .....	20
Interessante Zahlen .....	21
Wie man einen Beratervertrag erhält, indem man ein wenig Mathematik benutzt .....	23
Das Hotel Hilbert .....	25
Sprechen Sie mir nach: Man darf nicht durch null teilen! .....	27
$1 = 2$ .....	30
Das Problem $3x + 1$ .....	31
Wie oft kann man ein Papier falten? .....	34
Was ist mehr? 37 % von 78 oder 78 % von 37? .....	35
Binäre Tafeln .....	36
Die Quadratwurzel aus 2 ist eine irrationale Zahl ...	45
Summe aus fünf Zahlen .....	50
Ein Attentat auf den Fundamentalsatz der Arithmetik? .....	54
Unendliche Primzahlen .....	55
Primzahlzwillinge .....	62

Primzahlücken .....	64
Die Zahl $e$ .....	70
Verschiedene Arten von Unendlichkeit .....	76
Intervalle mit verschiedener Länge .....	100
Ein Punkt in einem Intervall .....	102
Die Summe der Kehrwerte der Potenzen von 2 (unendliche Summe) .....	103
Persönlichkeiten .....	107
Warum man etwas nicht versteht .....	107
Konversation zwischen Einstein und Poincaré .....	109
Fleming und Churchill .....	111
Wir Mathematiker machen keine Zahlen, sondern Beweisführungen .....	113
Die Paradoxa von Bertrand Russell .....	116
Biografie von Pythagoras .....	125
Die Geschichte von Carl Friedrich Gauß .....	129
Die Goldbach-Vermutung .....	132
Die Geschichte von Srinivasa Ramanujan .....	135
Die mathematischen Modelle von Oscar Bruno .....	139
Alan Turing über die Unterschiede zwischen Maschine und Mensch .....	142
Wahrscheinlichkeiten und Schätzungen .....	143
Ein bisschen Kombinatorik und Wahrscheinlich- keitsrechnung .....	143
Interview mit verbotener Frage .....	151
Wie man die Zahl der Fische in einem Teich schätzt .....	155
Das Problem des Schubfach-Prinzips (oder <i>pigeonhole principle</i> ) .....	157



Klavierstimmer (in Boston) .....	161
Das globale Dorf .....	165
Die Geschichte der argentinischen Autokennzeichen .....	166
Wie viel Blut gibt es auf der Welt? .....	170
Geburtstagswahrscheinlichkeiten .....	173
Die gezinkte Münze .....	177
Probleme .....	179
Laterales Denken .....	179
Das Problem der drei Schalter .....	182
128 Teilnehmer an einem Tennisturnier .....	183
Das Problem der drei Personen, die in eine Bar kommen und mit 30 Pesos eine Rechnung von 25 bezahlen müssen .....	184
Gemeinsame Vorfahren .....	184
Das Problem von Monty Hall .....	187
Gesunder Menschenverstand .....	188
Das Einstein-Rätsel .....	189
Das Kerzen-Problem .....	190
Hüte (Teil 1) .....	191
Hüte (Teil 2): Wie man eine Strategie verbessern kann .....	193
Interplanetare Botschaft .....	195
Die fehlende Zahl .....	197
Wie oft pro Woche man gerne auswärts essen würde	198
Überlegungen und Kuriositäten .....	201
Alltagslogik .....	201
Unterschied zwischen einem Mathematiker und einem Biologen .....	202

Die Vier-Farben-Vermutung (oder der Vier-Farben-Satz) .....	204
Der Weihnachtsmann .....	208
Wie man einen rechten Winkel konstruiert .....	211
Alphabete des 21. Jahrhunderts .....	213
Chirurgen und Lehrer im 21. Jahrhundert .....	214
Über Affen und Bananen .....	216
Was ist Mathematik? .....	218
Universität Cambridge .....	225
Tastatur QWERTY .....	227
Die Ausnahme, die die Regel bestätigt .....	229
Fragen, die einem Mathematiker gestellt werden (da man keine Vorstellung davon hat, was er tut und warum er es tut) .....	233
Wahlen: Sind sie wirklich die gerechteste Art der Entscheidung? .....	235
Der ethische Eid .....	238
Wie man eine Prüfung abnimmt .....	240
Wunderkinder .....	246
Die Geschichte von den fünf Minuten und den fünf Jahren .....	248
Warum schrieb ich dieses Buch? .....	250
Lösungen .....	253
Anhang .....	283



## Die Hand der Prinzessin

Jedes Mal, wenn ich einen kleinen Vortrag über Mathematik für ein nichtmathematisches Publikum halte, wähle ich einen ganz bestimmten Einstieg. Er ist immer gleich. Ich bitte um Erlaubnis, einen Text vorzulesen, den Pablo Amster geschrieben hat, ein exzellenter Mathematiker, Musiker sowie Experte der Kabbalah und eine außergewöhnliche Persönlichkeit.

Diese Geschichte benutzte Pablo in einem Mathematikurs, den er für eine Gruppe Studenten der Schönen Künste in der Bundeshauptstadt Buenos Aires gab. Es handelt sich um einen wunderbaren Text, den ich Ihnen (mit seiner Erlaubnis) nicht vorenthalten will.

Hier ist er.

Der Titel lautet: »Die Hand der Prinzessin«.

*Eine bekannte tschechische Zeichentrickserie erzählt in mehreren Folgen die Geschichte einer Prinzessin, um deren Hand sich eine große Zahl von Freiern streitet.*

*Ihre Aufgabe ist es, die Prinzessin zu überzeugen: Verschiedene Episoden zeigen die unterschiedlichsten und fantasievollsten Verführungsversuche.*

*So kommt ein Freier nach dem anderen und setzt verschiedene Mittel ein, die einen einfachere, die anderen wahrhaft großartige, aber keiner schafft es, die Prinzessin auch nur ein bisschen zu rühren.*

*Ich erinnere mich zum Beispiel an einen, der ihr einen Licht- und Sternenregen zeigt; an einen anderen, der einen majestätischen Flug vollbringt und den Raum mit seinen Bewegungen erfüllt. Nichts. Am Ende jeder Folge erscheint das Antlitz der Prinzessin, das niemals auch nur irgendeine Regung erkennen lässt.*

*Die letzte Folge der Serie liefert uns das unerwartete Ende: Im Gegensatz zu den Wunderwerken, die seine Vorgänger darboten, holt der letzte Freier bescheiden eine Brille unter seinem Umhang hervor, die er der Prinzessin zur Anprobe reicht: Sie setzt sie auf, lächelt und bietet ihm ihre Hand.*

\* \* \*

*Die Geschichte ist über alle möglichen Interpretationen hinaus sehr reizvoll, und jede einzelne Episode birgt eine große Schönheit. Doch erst die Auflösung am Schluss gibt uns das Gefühl, dass alles richtig ausgeht.*

*In der Tat haben wir es hier mit einem interessanten Spannungsaufbau zu tun, der uns an einem gewissen Punkt glauben lässt, dass nichts die Prinzessin jemals zufrieden stellen wird.*

*Mit dem Fortschreiten der Serie und der folglich immer größeren Erschöpfung der Verführungskunst ärgern wir uns über diese unersättliche Prinzessin. Was für ein Wunder erwartet sie denn noch? Bis wir plötzlich begreifen: Die Prinzessin zeigte deshalb keine Regung vor den dargebrachten Wundern, weil sie sie nicht sehen konnte.*

*Da also lag das Problem. Klar. Hätte uns die Erzählung bereits an früherer Stelle in die Umstände eingeweiht, hätte uns das Ende nicht überrascht. Wir hätten die Schönheit der Bilder zwar genauso bewundert, die Bewerber und ihre vielfältigen Verführungsversuche aber ein bisschen dumm gefunden, zumal wir ja gewusst hätten, dass die Prinzessin kurzsichtig ist.*

*Wir wissen es aber nicht: Wir gehen davon aus, dass der Fehler bei den Freiern liegt, die anscheinend zu wenig bieten. Der letzte Bewerber, der vom Scheitern der anderen weiß, macht Folgendes: Er ändert die Sichtweise auf die Sache. Er betrachtet das Problem auf andere Art und Weise.*

*Hättet ihr [Pablo spricht hier zu den Studenten der Schönen Künste] vorher nicht gewusst, worum es bei diesem Kurs geht, wärt ihr jetzt vielleicht überrascht, so wie ihr über das Ende der Geschichte überrascht wart: Wir werden über Mathematik sprechen oder sind bereits mittendrin.*

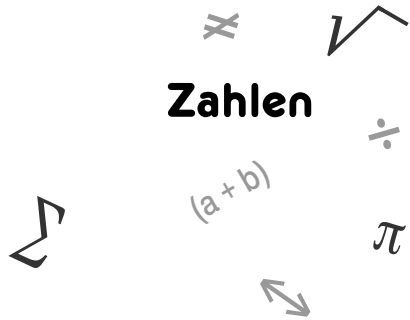
*Über Mathematik zu sprechen bedeutet allerdings nicht nur, den Lehrsatz des Pythagoras zu beweisen: Es bedeutet auch, über Liebe zu sprechen und Geschichten über Prinzessinnen zu erzählen. Auch in der Mathematik gibt es Schönheit. Wie der Dichter Fernando Pessoa sagte: »Das Newtonsche Binom ist ebenso schön wie die Venus von Milo; das Problem ist nur, dass es nur sehr wenige Leute bemerken.«*

*Nur sehr wenige Leute bemerken es ... Daher das Märchen von der Prinzessin; weil das Problem, wie der letzte Freier erahnt, darin besteht, dass »man das Interessanteste in diesem Land nicht sieht« (Henri Michaux, Im Lande der Zauberei).*

*Ich habe mich oft in der gleichen Position wie diese ersten Bewerber gefühlt. Ich war immer darum bemüht, die schönsten mathematischen Probleme darzustellen, aber in einem Großteil der Fälle, muss ich zugeben, trafen meine leidenschaftlichen Versuche nicht auf die erwartete Reaktion.*

*Diesmal werde ich versuchen, es dem bescheidenen Bewerber der letzten Folge gleichzutun. Über Mathematik, nach Whitehead »die originellste Schöpfung des menschlichen Geistes«, gibt es einiges zu sagen. Daher dieser Kurs. Nur dass auch ich heute die Dinge lieber von dieser anderen Seite her betrachte und euch zunächst einmal eine Geschichte erzähle ...*

Diese Darstellung von Pablo Amster verweist unmittelbar auf den Kern dieses Buches: eine Reihe von Geschichten zu erzählen, frei zu denken, wagemutige Vorstellungen zu entwickeln und stehen bleiben zu können, wenn man auf etwas stößt, das einen begeistert. Diese Punkte aber auch zu suchen. Nicht nur darauf zu warten, dass sie von selbst kommen. Darin liegt der Zweck dieser Zeilen: Sie zu begeistern, zu bewegen, zu verführen, sei es durch die Mathematik oder eine Geschichte, die Sie noch nicht kannten. Ich hoffe, dass es mir gelingt.



## Große Zahlen

Große Zahlen? Ja. Große. Schwer vorstellbare. Man hört, dass sich die externe Verschuldung im Milliardenbereich bewegt, die Sterne am Himmel Lichtjahre von der Erde entfernt sind, ein DNA-Molekül drei Milliarden Nukleotide enthält, die Oberfläche der Sonne eine Temperatur von 6.000 Grad Celsius hat usw. Ich bin sicher, dass jeder, der diesen Absatz liest, seine eigenen Beispiele hinzufügen kann.

Was ich mit diesen unfassbaren Größen mache, ist, sie mit etwas zu vergleichen, sie etwas gegenüberzustellen, das ich mir leichter vergegenwärtigen kann.

Es gibt auf der Welt mehr als 6 Milliarden Menschen. Tatsächlich sind wir (im August 2005) schon mehr als 6,3 Milliarden. Das erscheint viel. Aber was ist viel? Mal sehen. Was ist der Unterschied zwischen einer Million und einer Milliarde (außer dass Letztere drei Nullen mehr hat)? Um das Ganze in ein anschauliches Verhältnis zu setzen, verwandeln wir sie in Sekunden. Nehmen wir zum Beispiel an, dass in einem Dorf, in dem die Zeit

nur in Sekunden gemessen wird, eine Person angeklagt wird, ein Verbrechen begangen zu haben. Staatsanwalt und Verteidiger treten vor den Richter, der über den Fall entscheidet. Der Staatsanwalt fordert »eine Milliarde Sekunden für den Angeklagten«. Der Verteidiger bezeichnet ihn als »verrückt« und ist lediglich bereit, »eine Million Sekunden« zu akzeptieren, »und nur als symbolischen Akt«. Der Richter, der daran gewöhnt ist, die Zeit auf diese Art zu messen, weiß, dass der Unterschied gewaltig ist. Verstehen Sie, warum?

Denken Sie so: Eine Million Sekunden sind ungefähr elfeinhalb Tage, eine Milliarde Sekunden dagegen fast ... 32 Jahre!

Dieses Beispiel zeigt, dass wir im Allgemeinen keine Vorstellung davon haben, was die Zahlen bedeuten, nicht einmal in unserem täglichen Leben. Kehren wir zum Thema der Weltbevölkerung zurück. Wenn es sechs Milliarden Menschen auf der Erde gibt und wir von jedem ein Foto in ein Buch kleben würden, zehn Personen pro Seite, bei einer Blattstärke von einem Zehntel Millimeter und beidseitiger Beklebung ... wäre das Buch 30 Kilometer hoch! Und wenn ferner jemand sehr viel Spaß daran hätte, Fotos anzuschauen, dafür eine Sekunde pro Seite bräuchte und jeden Tag 16 Stunden darauf verwenden würde, bräuchte er achtundzwanzigeneinhalb Jahre, um sie alle zu sehen. Wenn er jedoch im Jahr 2033 ans Ende käme, hätte das Buch schon an Größe zugenommen, weil es bereits zwei Milliarden Menschen mehr gäbe und das Buch zehn Kilometer dicker wäre.

Wir können uns auch überlegen, wie viel Platz wir bräuchten, um uns alle an einem Ort zu versammeln. Der Staat Texas (der flächenmäßig größte US-amerikanische



Staat, ausgenommen Alaska) könnte die gesamte Weltbevölkerung aufnehmen. Ja. Texas besitzt eine bewohnbare Fläche von ungefähr 420.000 Quadratkilometern. Das heißt, wir könnten uns alle in Texas versammeln, und jeder hätte noch eine Parzelle von 70 Quadratmetern zum Leben. Nicht schlecht, oder?

Oder stellen wir uns vor, wir würden uns alle hintereinander aufstellen, und jede Person hätte eine Platte von 30 Quadratzentimetern. Auf diese Weise bildete die gesamte Menschheit eine Schlange von mehr als 1.680.000 Kilometern. Damit könnten wir den Erdball am Äquator 42 Mal umrunden.

Was wäre, wenn wir uns alle in Kinoschauspieler verwandeln und einen Film mit uns als Stars drehen würden? Gesetzt den Fall, jeder von uns würde nur 15 Sekunden auf der Leinwand auftauchen (das heißt, etwas mehr als sieben Meter Zelluloid pro Person), bräuchte man ungefähr 40 Millionen Kilometer Negative! Wollte sich jemand diesen Film ansehen, müsste er 23.333.333 Stunden lang im Kino sitzen, das heißt 972.222 Tage, also ungefähr 2.663 Jahre. Und dabei dürften wir weder schlafen noch essen noch sonst irgendetwas anderes tun. Mein Vorschlag wäre, dass wir uns aufteilen und später treffen, um uns das Beste daraus zu erzählen.

## **Mehr über große Zahlen: das Gewicht eines Schachbretts**

Hier noch ein weiteres Beispiel, eines, das jeder kennt, der das exponentielle Wachstum erläutern und seine Gesprächspartner in Erstaunen versetzen will, indem er

ihnen zeigt, wie die Zahlen auf eine ... ja, exponentielle Art wachsen.

Ursprünglich lautet die Geschichte so: Ein König möchte einen Untertanen, der ihm einen Dienst erwiesen und auf diese Weise das Leben gerettet hat, mit Reiskörnern belohnen. Der Untertan aber erklärt, sein einziger Wunsch sei, dass der König Reiskörner auf ein Schachbrett lege, und zwar eins auf das erste Feld, zwei auf das zweite, vier auf das dritte, acht auf das vierte, 16 auf das fünfte, 32 auf das sechste und so weiter, immer die doppelte Anzahl, bis alle Felder des Schachbretts mit Reiskörnern belegt sind – da stellt der König fest, dass die Reiskörner seines gesamten Königreichs nicht ausreichen (nicht einmal die der gesamten umliegenden Königreiche), um die Bitte seines »Retters« erfüllen zu können.

Wir werden das Beispiel jetzt ein wenig aktualisieren. Nehmen wir an, der Untertan hätte statt Reiskörnchen Goldklümpchen zu je einem Gramm verlangt. War der König im Fall der Reiskörnchen bereits an die Grenzen seiner Macht gestoßen, so wäre es ihm mit den Goldklümpchen ganz offensichtlich noch schlimmer ergangen. Die Frage, die ich stellen will, ist aber eine ganz andere: Gesetzt den Fall, der König hätte erfüllen können, was man von ihm erbat – wie viel würde das Schachbrett dann wiegen? Das heißt, angenommen, man könnte auf das Brett die Menge an Goldklümpchen legen, die der Untertan ihm angezeigt hatte, wie könnten sie das Schachbrett dann noch heben? Und wenn er sich außerdem nur ein Goldklümpchen pro Sekunde in die Tasche stecken könnte, wie lange würde er brauchen?

Da ein Schachbrett 64 Felder hat, ergäbe das eine Trillion Goldklümpchen! Natürlich werden die Zahlen hier

wieder verwirrend, da man nicht die leiseste Vorstellung davon hat, was »eine Trillion« irgendeines Objektes bedeutet. Vergleichen wir das Ganze also mit etwas, das uns vertrauter ist. Wenn, wie wir vorher gesagt haben, jedes Goldklümpchen nur ein Gramm wiegt, stellt sich die Frage: *Wie viel ist eine Trillion Gramm?*

Sie entspricht einer Billion Tonnen. Auch das ist ein Problem, denn wer hat schon jemals »eine Billion von irgendetwas« gehabt? Dieses Gewicht entspräche vier Milliarden Flugzeugen Typ Boeing 777 mit je 440 Passagieren an Bord, plus Besatzung und Treibstoff für 20 Stunden! Und wenn wir damit auch ein wenig weitergekommen sind, könnte man sich doch immer noch fragen, wie viel *vier Milliarden von irgendetwas* ist.

Und wie lange bräuchte man, um sich alle Goldklümpchen in die Tasche zu stecken, wenn man dies mit der *superschnellen* Geschwindigkeit von einem Goldklümpchen pro Sekunde tun könnte? Es würde wieder eine Trillion Sekunden dauern. Aber wie viel ist eine Trillion Sekunden? Womit könnten wir diese Zahl vergleichen, damit sie uns vertrauter wird? Zum Beispiel könnten wir uns vergegenwärtigen, dass wir mehr als hundert Milliarden Jahre bräuchten. Ich weiß nicht, wie es Ihnen geht, aber ich habe etwas anderes mit meiner Zeit vor.

## Atome im Universum

Nur als Kuriosität, und um *noch eine ungeheure Zahl* zu zeigen, stellen Sie sich vor, dass es im Universum vermutlich  $2^{300}$  Atome gibt. Wenn  $2^{10}$  ungefähr  $10^3$  ist, dann

ist  $2^{300}$  ungefähr  $10^{90}$ . Ich schreibe das, um sagen zu können: Im Universum gibt es so viele Atome, dass man eine *Eins* mit *90 Nullen* erhält.

## Was ist ein Lichtjahr?

Ein Lichtjahr ist eine Entfernungs- und keine Zeiteinheit. Es misst die Entfernung, die das Licht in einem Jahr zurücklegt. Um dies in die richtige Perspektive zu setzen, sagen wir, die Lichtgeschwindigkeit beträgt 300.000 Kilometer pro Sekunde. Wenn wir diese Zahl mit 60 multiplizieren (um sie in Minuten umzurechnen), ergibt das 18.000.000 km pro *Minute*. Dann, wieder mal 60 genommen, haben wir 1.080.000.000 Kilometer pro *Stunde* (eine Milliarde achtzig Millionen Kilometer pro Stunde). Mit 24 multipliziert kommt heraus, dass das Licht 25.920.000.000 km (25 Milliarden Kilometer *an einem Tag*) zurücklegt.

Wenn wir das schließlich mal 365 Tage nehmen, beträgt ein Lichtjahr (das heißt die Distanz, die das Licht pro Jahr zurücklegt) – ungefähr – 9.460.000.000.000 (fast *neuneinhalb Billionen*) Kilometer.

Daher sollten Sie jedes Mal, wenn Sie gefragt werden, wie viel ein Lichtjahr ist, überzeugt antworten, dass es eine Methode ist, eine Entfernung (eine große, aber dennoch eine Entfernung) zu messen und dass sie fast neuneinhalb Billionen Kilometer beträgt. Sehen Sie, das ist weit.

## Interessante Zahlen

Ich werde jetzt aufzeigen, dass *alle natürlichen Zahlen »interessante« Zahlen sind*. Als Erstes stellt sich natürlich die Frage: Was soll das heißen, dass eine Zahl *interessant* ist? Sagen wir, eine Zahl ist interessant, wenn sie einen gewissen Reiz hat, etwas, das sie auszeichnet, etwas, womit sie es verdient, sich von den anderen abzusetzen; dass sie irgendeine Verzierung oder Besonderheit hat. Ich glaube, Sie wissen schon, was ich mit *interessant* meine. Hier der Beweis.

Die Zahl Eins ist interessant, weil sie die allererste ist. Sie zeichnet sich durch die Tatsache aus, dass sie die kleinste aller natürlichen Zahlen ist.

Die Zahl Zwei ist in zweifacher Hinsicht interessant: Sie ist die erste gerade Zahl, und sie ist die erste Primzahl.<sup>1)</sup> Ich glaube, dass wir sie mit diesen beiden Argumenten bereits hervorheben können.

Die Zahl Drei ist ebenfalls interessant, weil sie die erste ungerade Primzahl ist (um nur einen Grund zu nennen).

Die Zahl Vier ist interessant, weil sie eine *Potenz von zwei* ist.

Die Zahl Fünf ist interessant, weil sie eine Primzahl ist. An dieser Stelle sollten wir uns darauf einigen, dass das Merkmal Primzahl schon ausreicht, um eine Zahl *ohne weitere Argumente als interessant* zu betrachten.

Gehen wir noch ein bisschen weiter.

Die Zahl Sechs ist interessant, weil sie die erste zusammengesetzte Zahl (also *keine Primzahl*) ist, die *keine*

**1** Wie wir später sehen werden, sind die Primzahlen diejenigen Zahlen, die nur durch eins und durch sich selbst teilbar sind.

*Potenz von zwei ist.* Erinnern Sie sich daran, dass die erste zusammengesetzte Zahl, die auftauchte, die Vier war, aber die ist eine Potenz von zwei.

Die Zahl Sieben ist interessant, und es bedarf keiner weiteren Argumente, da sie eine Primzahl ist.

Und so könnten wir immer weitermachen. Was ich gemeinsam *mit Ihnen beweisen* möchte, ist: »*Jede beliebige positive ganze Zahl verfügt immer, wirklich immer über ein Merkmal, das sie ›interessant‹ oder ›attraktiv‹ oder ›unterscheidbar‹ macht.*«

Wie könnte man vorgehen, um dies bei allen Zahlen zu beweisen, wenn sie doch unendlich sind? Nehmen wir an, dem wäre nicht so. Nehmen wir an, es gäbe Zahlen, die wir als uninteressant bezeichnen. Diese Zahlen legen wir in eine Tasche (die Tasche ist nicht leer). Damit haben wir eine Tasche voll uninteressanter Zahlen. Das führt uns jedoch zu einem Widerspruch. Da alle Zahlen in dieser Tasche *natürliche*, das heißt *positive ganze Zahlen* sind, muss es ein erstes Glied geben, sprich, eine Zahl, die kleiner ist als alle anderen. Das macht die erste vermeintlich *uninteressante* Zahl aber bereits *interessant*. Das Argument, dass sie *die erste aller uninteressanten Zahlen* wäre, ist mehr als ausreichend, um sie als *interessant* zu bezeichnen. Finden Sie nicht? Der Irrtum besteht also bereits in der Annahme, es gäbe so etwas wie *uninteressante* Zahlen. Dem ist nicht so. Die Tasche (die mit den *uninteressanten* Zahlen) kann gar keine Elemente enthalten, denn sonst müsste irgendeines das erste sein, wodurch eine Zahl *interessant* würde, die eigentlich *uninteressant* sein müsste, weil sie in der Tasche ist.

→ **Fazit:** »Jede natürliche Zahl IST interessant.«



Adrián Paenza

### **Mathematik durch die Hintertür**

Das Schubfach-Prinzip, der Vier-Farben-Satz und viele andere Denkwürdigkeiten aus der Welt der Zahlen

Taschenbuch, Broschur, 288 Seiten, 11,8 x 18,7 cm  
ISBN: 978-3-453-60057-7

Heyne

Erscheinungstermin: Dezember 2007

Eine höchst vergnügliche Reise durch das Universum der Zahlen

Wie viel Mathematik sich in unserem Alltag versteckt und wie Logik helfen kann, alltägliche Probleme zu lösen, das macht Adrián Paenza in anschaulichen Geschichten, Anekdoten und Denkaufgaben deutlich. Auf höchst unterhaltsame Weise gelingt es dem Mathematikprofessor, auch Ahnungslosen die mathematische Denkweise, das nötige Basiswissen und kuriose Spezialfragen nahezubringen. Quod erat demonstrandum: Die Materie ist viel weniger abstrakt, als wir immer geglaubt haben.