PEARSON Education

Andreas Lindenberg, Irmgard Wagner
Illustriert von Peter Fejes

STATISTIK *macchiato*

Cartoon-Stochastikkurs für Schüler und Studenten

PEARSON Studium

Kapitel 4

MATHEMATISCHES RÄTSELRATEN

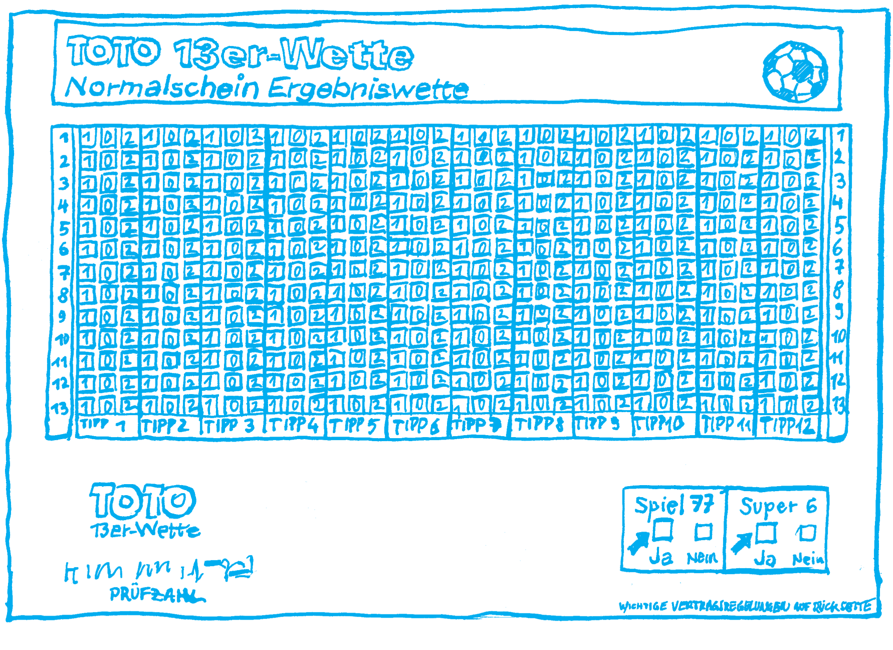
Kombinatorik

Mathematisches Rätselraten

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung befassen wir uns oftmals mit Fragen, für die wir gleiche oder verschiedene Gegenstände nach bestimmten Kriterien anordnen oder Teilmengen aus Mengen bilden müssen. Dabei überlegen wir uns, wie viele verschiedene Möglichkeiten es jeweils dafür gibt.

Die Stochastiker haben sich für diesen Zweck einen Baukasten aus sechs möglichen Grundformeln zusammengestellt. Bei komplexen Fragestellungen bauen sie dann aus diesen Grundformeln neue Formeln zusammen. In unserem Buch verwenden wir vier dieser Grundformeln:

1. Grundformel: n^k



Beim Fußballtoto (13er Wette) muss man die Ergebnisse aus 13 Fußballspielen vorhersagen. Dabei tippt man für jedes der 13 Spiele entweder auf Sieg für die erstgenannte Mannschaft, auf Unentschieden oder auf Sieg für die zweitgenannte Mannschaft. Man macht sein Kreuz also bei 1, 0 oder 2.

Wenn zum Beispiel das Ergebnis von Bayern München vs. Borussia Dortmund getippt werden soll, bedeuten:

1 = Bayern München gewinnt,

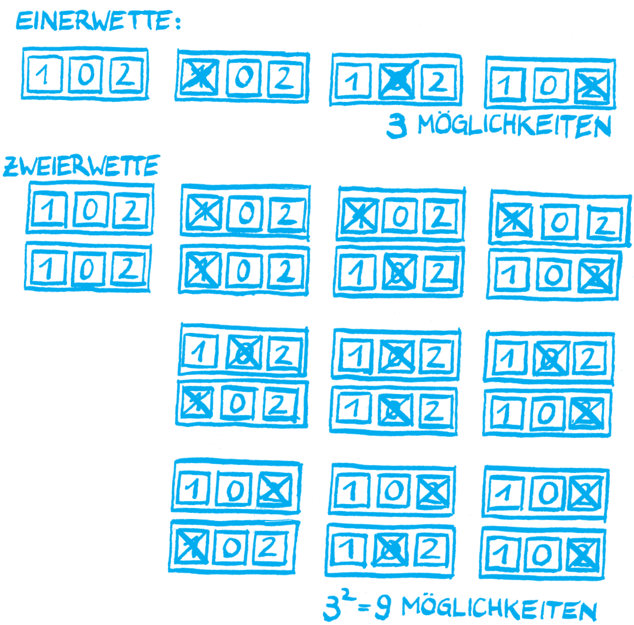
0 = unentschieden,

2 = Borussia Dortmund gewinnt.

Genauso verfahren wir mit den zwölf anderen Spielen auf dem Tippschein. Am Ende haben wir eine ganze Tippreihe gemacht, bestehend aus 13 Kreuzen.

Wie viele unterschiedliche Tippreihen aus 13 Kreuzen gibt es?

Wir schauen uns einmal einen ganz einfachen Totoschein an, einen mit nur einer Wette. Danach nehmen wir noch eine Wette dazu und machen schrittweise weiter, bis wir einen Schein mit 13 Wetten haben.



Nach diesen Vorüberlegungen sind wir fit für den kompletten Totoschein:

Jeder der 13 Spielbegegnungen auf einem Tippschein lassen sich drei mögliche Ergebnisse zuordnen: drei Möglichkeiten für das erste Spiel, drei Möglichkeiten für das zweite usw. Das führt zu insgesamt

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{13} = 1.594.323$$

Möglichkeiten, einen Toto-Schein auszufüllen.

Diese Fragestellung können wir abstrahieren und etwas allgemeiner formulieren:

Möchte man k verschiedene Objekte (13 Spielbegegnungen) mit jeweils einem von n verschiedenen Etiketten versehen (Kreuz bei 1, 0 oder 2) und können dabei diese Etiketten auch wiederholt verwendet werden (die 1 darf bei mehreren Spielbegegnungen angekreuzt werden), so kann man dies auf insgesamt

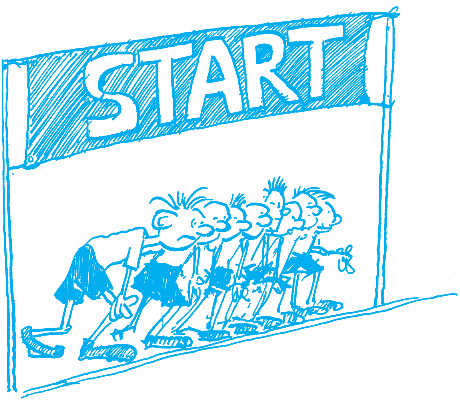
$$n^k$$

Arten tun.

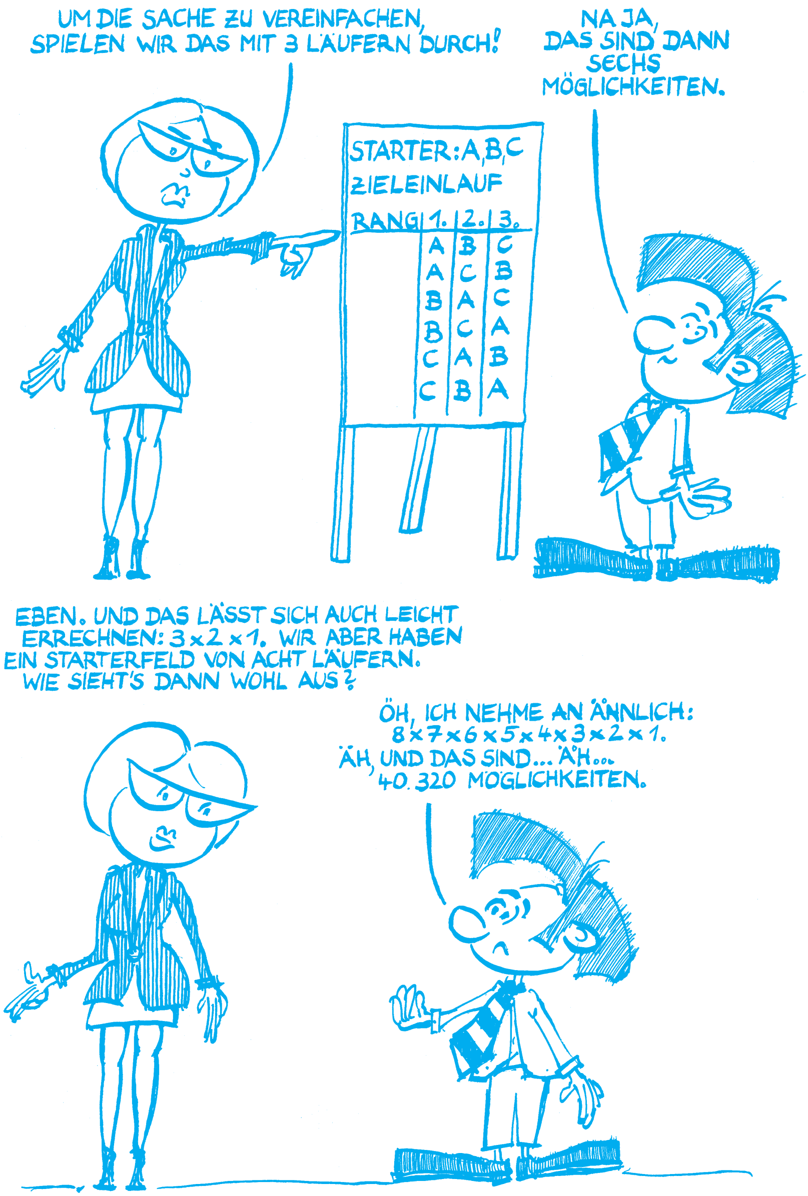
Diese Fragestellung bezeichnet man als **Variation mit Wiederholung**.

2. Grundformel: $n!$

Statistica geht mit Bernie auf den Sportplatz. Sie sehen sich eine Leichtathletikmeisterschaft an. Beim Finallauf über 100 m starten acht Sprinter. ***Wie viele mögliche Reihenfolgen gibt es für den Zieleinlauf?***



Statistica demonstriert Bernie die Lösung am Beispiel eines Vorlaufs, an dem nur drei Sprinter teilgenommen haben.



Im Finallauf über 100 m starten schließlich acht Läufer. *Wie viele mögliche Reihenfolgen gibt es jetzt für den Zieleinlauf?*

Nun, um den ersten Platz streiten alle acht Starter. Ist dieser aber erst einmal vergeben, so streiten um den zweiten Platz nur noch sieben Starter, bis schließlich um den letzten Platz nicht mehr gestritten wird: Diesen bekommt der einzige, noch verbliebene Starter.

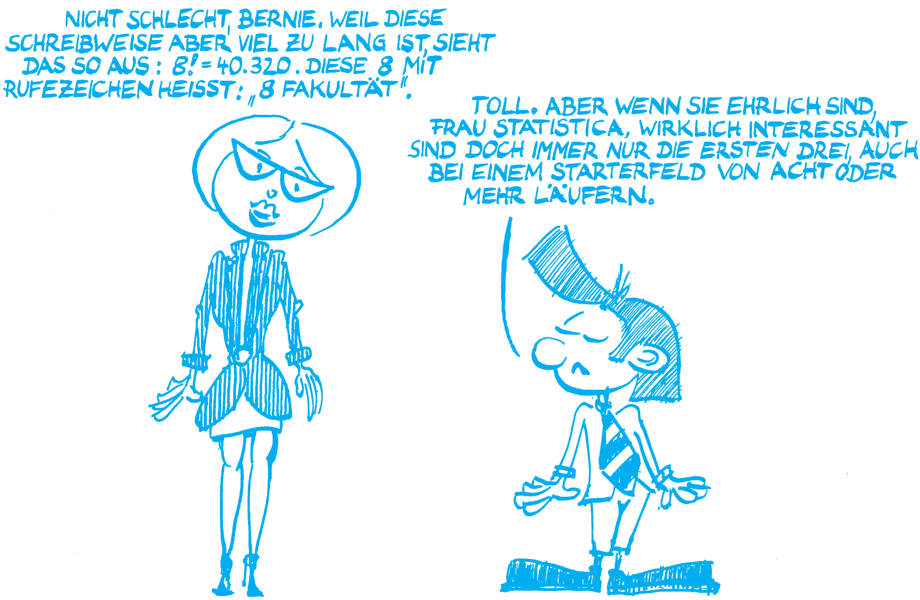
Diese Überlegung führt direkt zu folgendem Produkt aus acht Faktoren, um die Anzahl der möglichen Zieleinläufe zu berechnen:

$$\text{Anzahl Zieleinläufe } 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40.320$$

Allgemein können wir wieder festhalten: Man kann n verschiedene Objekte auf insgesamt n! (sprich n-Fakultät) Arten anordnen, wenn es auf die Reihenfolge dieser Objekte ankommt.

Bei obigem 100 m-Lauf ist die Reihenfolge sehr wohl entscheidend, in der die Sportler ins Ziel einlaufen.

Diese Fragestellung bezeichnet man als **Permutation ohne Wiederholung**.



Der Einwand von Bernie ist berechtigt. Für die Medaillenränge sind nur die ersten drei Plätze entscheidend. Für die drei erstplatzierten Läufer überlegen wir uns, auf wie viele Arten wir drei der acht Läufer anordnen können. Dazu brauchen wir die nächste Grundformel.

3. Grundformel: $\frac{n!}{(n-k)!}$

Wenn wir uns für die ersten drei Plätze interessieren, sind die möglichen Anordnungen der hinteren fünf Plätze uninteressant. Die Anzahl der Permutationen, die sich aus diesen fünf Platzierungen ergeben, sind in der Anzahl der Permutationen über alle acht Plätze enthalten.

„Klaro, also ziehen wir sie wieder ab!“ wirft Bernie ein. „Vorsicht!“, mahnt Statistica. „Die Permutationen der hinteren fünf Plätze sind ja multiplikativ in der Fakultät von 8 enthalten, also müssen wir sie heraus ***dividieren****!“*

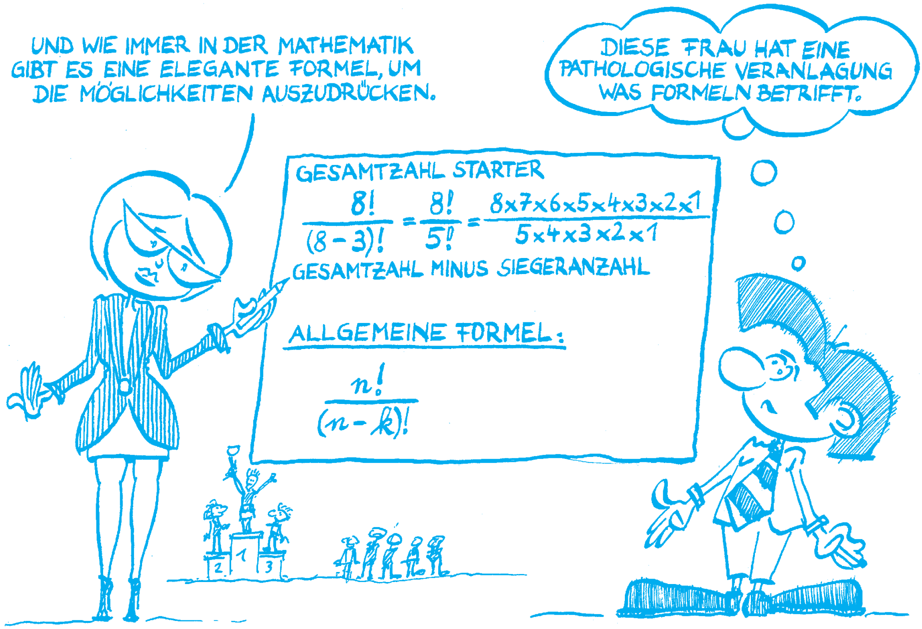
$$\frac{8 \times 7 \times 6 \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = 8 \times 7 \times 6$$

Der erste Platz kann von acht Startern erobert werden, der zweite Platz von sieben Startern und der dritte Platz schließlich von sechs Startern. Das führt zu folgender Anzahl von möglichen Belegungen der Medaillenränge:

$$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

Das Produkt dieser drei Faktoren entspricht genau dem Quotienten

$$\frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$



Daraus ergibt sich die allgemeine Formel: Man kann k verschiedene Objekte von insgesamt n möglichen auf genau

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

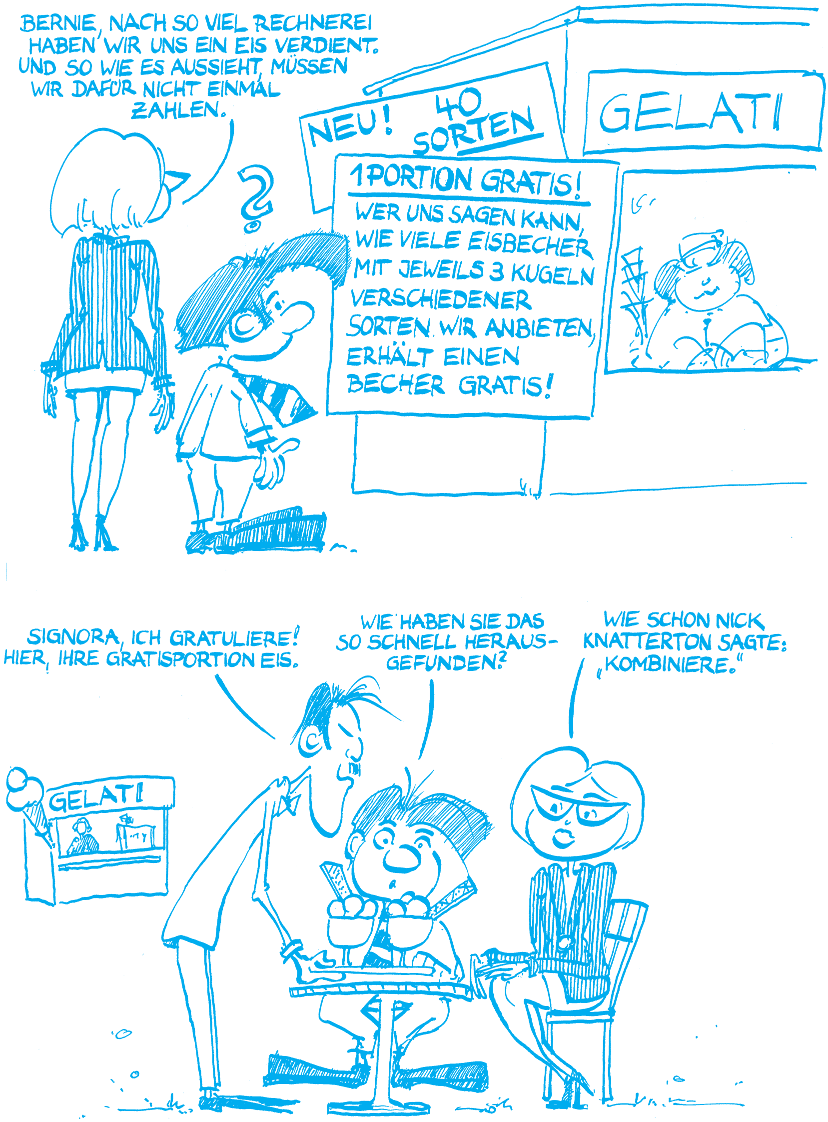
Arten anordnen, wenn es auf die Reihenfolge dieser Objekte ankommt. (Dabei ist natürlich $k \leq n$.)

Diese Fragestellung bezeichnet man als **Variation ohne Wiederholung**.

4. Grundformel: $\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

Statistica schaut Bernie an: „Ist so weit alles klar?“ Bernie lächelt gequält: „Ich denke schon, es ist alles eine Frage der Ordnung!“ Statistica: „Eben! Und der guten Ordnung halber verrate ich Ihnen jetzt auch, wie man Kombinationen löst, wenn es nicht auf die Ordnung ankommt.“

Statistica lädt Bernie in eine Eisdiele ein. Eine Schiefertafel, die eine Gratisportion Eis für das Lösen eines Rätsels verspricht, erregt Bernies Aufmerksamkeit. Bernie setzt sich in die Eisdiele und grübelt. Kurze Zeit später gesellt sich Statistica zu ihm und bekommt von dem freundlichen Italiener eine Gratisportion Eis serviert.



Käme es auf die Reihenfolge an, mit der die drei verschiedenen Eiskugeln von 40 möglichen Sorten in den Becher gelegt werden, so gäbe es, wie wir gerade gesehen haben,

$$\frac{40!}{(40-3)!}=\frac{40!}{37!}=40\cdot 39\cdot 38=59.280$$

Möglichkeiten, dies zu tun.

Tatsächlich aber ist die Reihenfolge, mit der die Eiskugeln in den Becher gelangen, für die Eiskomposition egal.

Der obige Wert berücksichtigt somit zu viele Variationen. Wir müssen ihn um die Anzahl der Möglichkeiten **kürzen**, mit der man drei Kugeln Eis anordnen kann. Das geht auf genau

$$3!=3\cdot 2\cdot 1=6$$

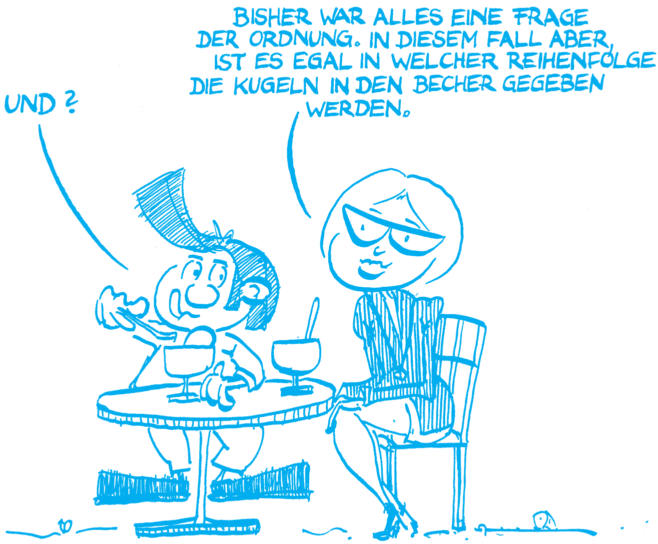
Arten und wir erhalten

$$\frac{40!}{(40-3)!\cdot 3!}=\frac{40!}{37!\cdot 3!}=\frac{40\cdot 39\cdot 38}{3\cdot 2\cdot 1}=9880$$

tatsächlich verschiedene Eisbecher.

Für diesen Quotienten gibt es eine schicke Kurzschreibweise:

$$\binom{40}{3}=\frac{40!}{(40-3)!\cdot 3!}$$

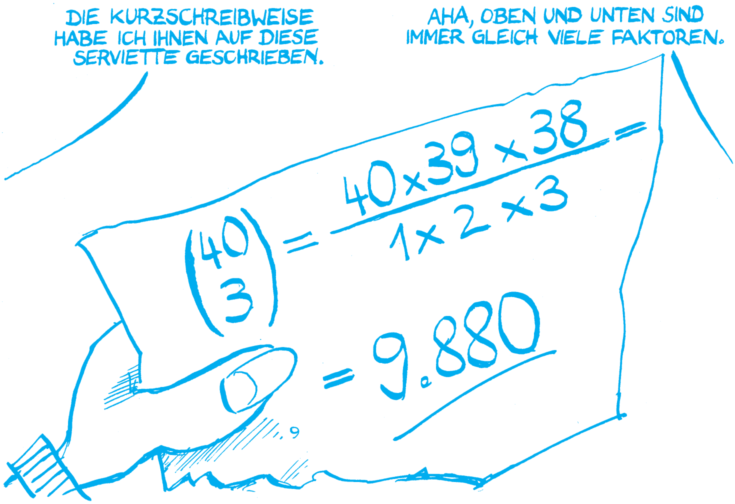


Diese Klammer mit den beiden übereinandergestellten Zahlen nennt man **Binomialkoeffizient**. Man sagt „3 aus 40“.

Allgemein schreibt sich der Binomialkoeffizient

$\binom{n}{k}$ sprich „k aus n“.

Der Binomialkoeffizient ist die Kurzform des folgenden Quotienten:



Fragestellungen, die mit dem Binomialkoeffizienten gelöst werden, bezeichnet man als **Kombination ohne Wiederholung**.

Wir fassen noch einmal alle Formeln unseres kombinatorischen Baukastens zusammen, auch die beiden, die wir in diesem Buch nicht behandelt haben. Dabei ordnen wir stets aus n Elementen eine neue Auswahl mit k Elementen an, jeweils mit bzw. ohne Beachtung der Reihenfolge und jeweils mit oder ohne Wiederholung eines einzelnen Elements.

	Mit Beachtung der Reihenfolge: **Variation**	Ohne Beachtung der Reihenfolge: **Kombination**	**Permutation**
Ohne Wiederholung	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$	$n!$
Mit Wiederholung	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$	$\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}$

Weitere „alltägliche“ Kombinationen

Binomialkoeffizienten haben interessante Anwendungen. Wann immer man aus einem Angebot eine Auswahl trifft, ohne sich dabei zu wiederholen, und in dieser Auswahl keine Reihenfolge festlegt, liegt eine Kombination ohne Wiederholung vor.

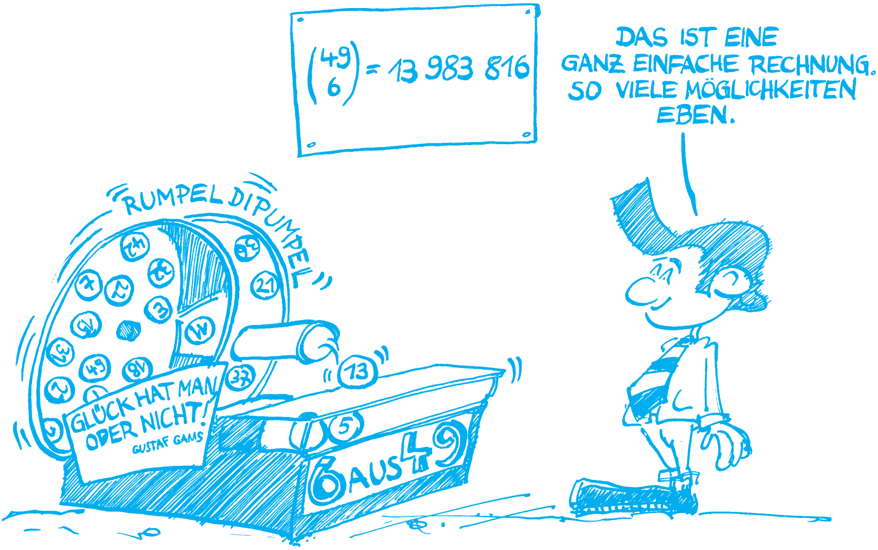
Am bekanntesten ist wohl die Frage nach der Anzahl der möglichen Tippreihen beim Lottospiel. Aus 49 nummerierten Kugeln werden 6 ausgewählt.

Zwar tut die Ziehungsmaschine dies zunächst nacheinander, also in einer bestimmten Reihenfolge, aber diese ist letztlich für die Gewinnermittlung irrelevant. Die Ziehung der Lottozahlen ist der klassische Fall einer Auswahl „ohne Beachtung der Reihenfolge“ und „ohne Wiederholung“ – jede Kugel wird nur einmal gezogen.

Der Binomialkoeffizient liefert

$$\binom{49}{6}=\frac{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=13.983.816$$

Möglichkeiten, **6 Kugeln aus 49** auszuwählen.

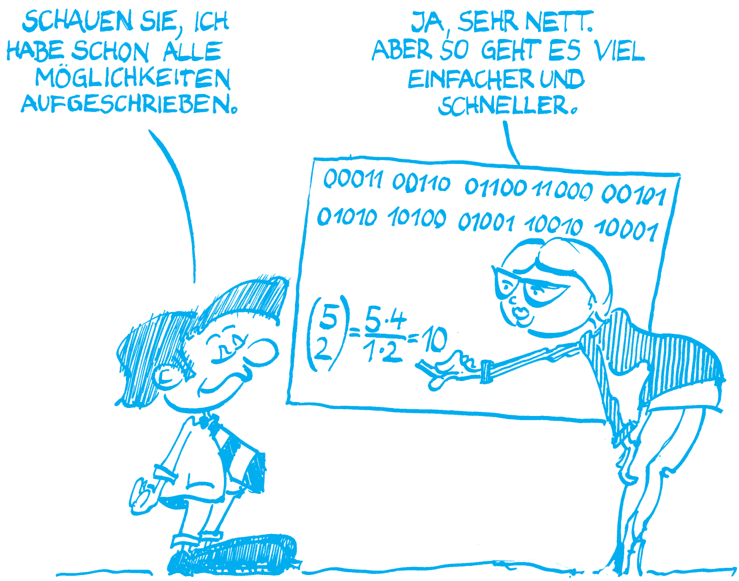


Im nächsten Beispiel schauen wir uns Dualzahlen etwas genauer an. Während der Mensch mit Dezimalzahlen vertraut ist, verarbeitet ein Computer Zahlen im Binärformat, einer Sequenz aus Nullen und Einsen. So stellt er die Dezimalzahl 20 wie folgt dar:

10100

Wie viele Dualzahlen lassen sich bilden, die genau fünf Stellen haben und zwei Einsen enthalten? (Führende Nullen sind erlaubt.)

Auch wenn es auf den ersten Blick nicht so scheinen mag, so liegt doch eine **Kombination ohne Wiederholung** vor. Zwar besetzen wir zwei Stellen der fünfstelligen Zahl jeweils mit einer Eins, was scheinbar eine Wiederholung ist. Beachtet man jedoch, dass beide Stellen eine unterschiedliche Wertigkeit haben, so kommt jeder 1 eine eigene Bedeutung zu. Wir kombinieren also zwei verschiedene Wertigkeiten, daher „ohne Wiederholung“.



Wir wollen fünf Stellen mit zwei Einsen und drei Nullen besetzen. Dazu wählen wir **2 aus 5 Stellen** aus, die wir mit den Einsen besetzen. Die restlichen drei Stellen werden auf genau eine verbleibende Möglichkeit mit drei Nullen besetzt. Mit dem Binomialkoeffizienten berechnen wir

$$\binom{5}{2}=10$$

Möglichkeiten, 2 aus 5 Stellen auszuwählen.

Man hätte natürlich auch zunächst die **drei Stellen für die Nullen** auswählen und die restlichen zwei Stellen auf genau eine Möglichkeit mit zwei Einsen belegen können. Dies muss letztlich zum gleichen Ergebnis führen. Tatsächlich liefert der Binomialkoeffizient 3 aus 5 den gleichen Wert:

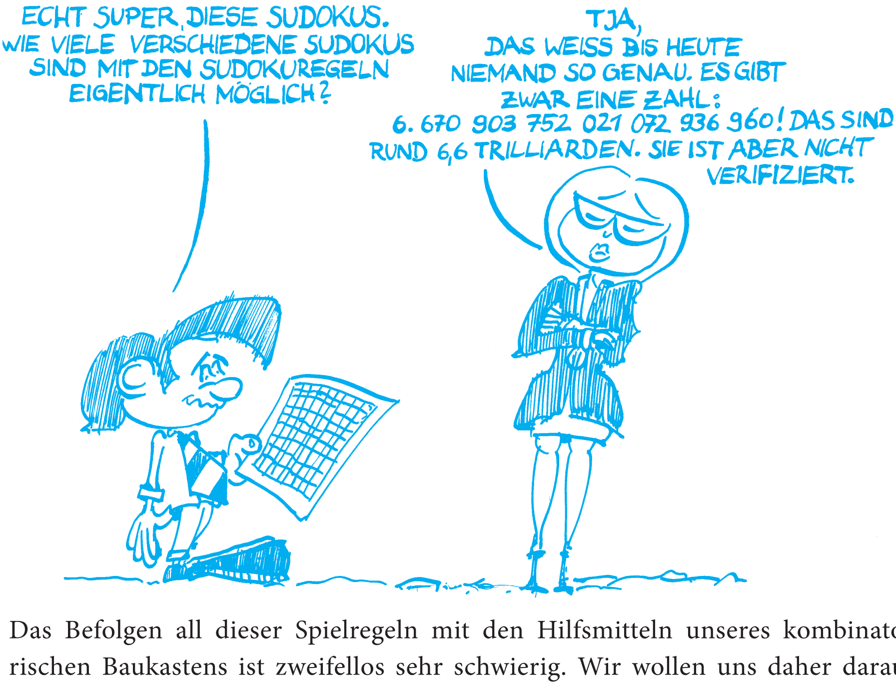
$$\binom{5}{3}=\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}=10$$

Wir erhalten hier ein interessantes Nebenergebnis. Der Wert zweier Binomialkoeffizienten mit derselben oberen Zahl ist dann gleich, wenn die Summe der unteren Zahlen exakt die obere Zahl ergibt.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \text{ denn } k + (n-k) = n$$

Unter den Zahlenrätseln sind Sudokus sehr populär. Täglich werden unzählige neue angeboten. Wie viele verschiedene Sudokus sind eigentlich möglich?

Die Spielregeln von **Sudoku** schreiben vor, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte jede der neun Ziffern 1 bis 9 nur einmal vorkommen darf. Das ganze quadratische Spielfeld aus neun mal neun Feldern ist zudem in neun kleinere Quadrate von drei mal drei Feldern unterteilt, in welchen ebenfalls jede der neun Ziffern nur einmal vorkommen darf.



Das Befolgen all dieser Spielregeln mit den Hilfsmitteln unseres kombinatorischen Baukastens ist zweifellos sehr schwierig. Wir wollen uns daher darauf beschränken, die Anzahl aller möglichen Kombinationen eines Sudokus nach oben abzuschätzen, indem wir **nur die erste der Spielregeln** beachten: In jeder Zeile darf jede der Ziffern 1 bis 9 nur einmal vorkommen.

Innerhalb der ersten Zeile gibt es 9! (neun Fakultät) Möglichkeiten, die Ziffern anzuordnen (**Permutation ohne Wiederholung**). Ebenso viele Möglichkeiten existieren für die zweite und alle weiteren Reihen, jedes Mal sind es 9! Anordnungen.

Um auf die Gesamtzahl der Möglichkeiten zu schließen, multiplizieren wir die Anzahl der Anordnungen der ersten Reihe mit der Anzahl der Anordnungen der zweiten Reihe und so fort, bis wir schließlich

$$9! \cdot 9! \cdot \ldots \cdot 9! = (9!)^9$$

erhalten (**Variation mit Wiederholung**). Mit dem Taschenrechner lässt sich diese Zahl bequem abschätzen:

$$(9!)^9 = 1{,}09 \cdot 1050$$

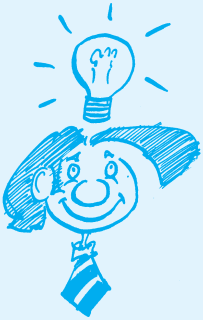
Diese grobe Abschätzung liefert ein Ergebnis, welches etwa um den Faktor 10^{29} größer ist als die tatsächliche Anzahl aller 9x9-Sudokus. Mit nur wenigen Überlegungen lässt sich unsere Obergrenze noch um ein paar Zehnerpotenzen vermindern. Der Leser möge es einmal selber probieren.

WISSENSWERTES

Die Anzahl aller möglichen, entsprechend der Spielregeln zulässigen 9x9-Sudokus lässt sich nicht mehr als Formel ausdrücken, sondern nur noch als ein umfangreicher Berechnungsalgorithmus, den man mithilfe eines Computers lösen muss. Es ist letztlich nicht überprüft, ob die folgende Zahl die richtige Lösung darstellt:

6.670.903.752.021.072.936.960 (rund 6,7 Trilliarden)

Aber immerhin kamen zwei Teams von Mathematikern (Bertram Felgenhauer von der Technischen Universität Dresden zusammen mit Frazer Jarvis von der Universität Sheffield und andererseits Ed Russell) unabhängig voneinander zum selben Ergebnis, der obigen Zahl.



- **Variation mit Wiederholung** gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, k verschiedene Objekte mit n Etiketten zu versehen. Dabei dürfen dieselben Etiketten mehrmals verwendet werden (Beispiel Fußballtoto).
- **Permutation ohne Wiederholung** gibt an, auf wie viele Arten wir n Objekte anordnen können, wenn es auf die Reihenfolge dieser Objekte ankommt (Beispiel Zieleinlauf bei Läufern).
- **Variation ohne Wiederholung** gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, k verschiedene Objekte aus einer größeren Menge von n Objekten anzuordnen, wenn es auf die Reihenfolge dieser Objekte ankommt (Beispiel: die ersten Drei bei insgesamt acht Läufern).
- **Kombination ohne Wiederholung** gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, k verschiedene Objekte aus einer größeren Menge von n Objekten auszuwählen, wenn es auf die Reihenfolge nicht ankommt und wenn kein Objekt doppelt vorkommen darf (Beispiel Eiskugelrätsel, Lotto).
- Der **Binomialkoeffizient** ist eine Kurzschreibweise für die Formel, mit der Kombinationen ohne Wiederholung gelöst werden.