

Préambule

Dans l'article [6] Gerd Faltings a expliqué comment construire un isomorphisme "en niveau infini" entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld. Le but de ce livre est de donner une démonstration détaillée du résultat de Faltings ainsi que des compléments et applications. Il s'agit donc en partie d'un travail de mise au point.

Le résultat est établi en inégales caractéristiques, c'est-à-dire pour les corps p -adiques, ainsi qu'en égales caractéristiques qui est le cas des corps de fonctions d'une variable formelle sur un corps fini. La méthode utilisée par Faltings devrait fournir un isomorphisme en inégales comme en égales caractéristiques. Dans l'article de Laurent Fargues la construction est détaillée en inégales caractéristiques. L'article d'Alain Genestier et Vincent Lafforgue expose une autre construction de l'isomorphisme des deux tours valable seulement en égales caractéristiques.

Dans ce livre nous étudions donc le lien entre deux espaces de modules de groupes p -divisibles ou groupes formels, les espaces de Lubin-Tate et de Drinfeld. En inégales caractéristiques ce sont des analogues locaux p -adiques des variétés de Shimura, qui sont elles-mêmes des tours de variétés algébriques définies sur un corps de nombres comme par exemple les courbes modulaires. Ce sont des cas particuliers d'espaces de modules de groupes p -divisibles tels que définis en toute généralité par Rapoport et Zink dans [9]. En égales caractéristiques ce sont des analogues locaux d'espaces de modules de Shtukas munis de structures additionnelles.

Ils ont été étudiés en détail notamment car leur cohomologie réalise des correspondances de Langlands locales ([3], [2], [8]) et permet ainsi de réaliser géométriquement des généralisations non-abéliennes de la théorie du corps de classe.

En fait l'existence d'un isomorphisme entre ces deux tours avait été conjecturée bien avant l'article de Faltings, sans que personne ne puisse réellement lui donner un sens précis. Une des motivations était que la cohomologie de ces deux tours devait être plus ou moins la même puisque toutes deux devaient réaliser des correspondances de Langlands locales du même type.

D'après les travaux de Michael Harris et Richard Taylor ([8]) et Pascal Boyer ([1]) on connaît complètement la cohomologie des espaces de Lubin-Tate (à Frobe-

nus semi-simplification près) en termes de correspondances de Langlands locales. D'après les résultats de ce livre on connaît également la cohomologie des espaces de Drinfeld et même grâce aux travaux de Jean-François Dat ([4]) leur complexe de cohomologie équivariant.

Rappelons ce que sont les espaces de Lubin-Tate et de Drinfeld. Soit F un corps local et \mathcal{O} son anneau des entiers. En inégales caractéristiques, F est une extension de degré fini de \mathbb{Q}_p . En égales, F est de la forme $\mathbb{F}_q((\pi))$ et $\mathcal{O} = \mathbb{F}_q[[\pi]]$. Rappelons qu'un \mathcal{O} -module formel sur une \mathcal{O} -algèbre est un groupe formel (commutatif formellement lisse) muni d'une action de \mathcal{O} , tel que l'action induite sur son algèbre de Lie soit l'action canonique ([5]). On dit qu'un tel groupe formel est de hauteur finie si l'endomorphisme induit par l'uniformisante π de F est une isogénie. Les espaces de Lubin-Tate et de Drinfeld sont alors des espaces de déformations de \mathcal{O} -modules formels de hauteur finie fixée avec des structures additionnelles. Nous supposons désormais dans la suite de cette introduction que $F = \mathbb{Q}_p$, $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$, où les objets qui apparaissent sont sans doute plus familiers au lecteur.

Espaces de Lubin-Tate

Les espaces de Lubin-Tate sont associés à la donnée d'un entier $n \geq 1$. Ils forment une tour d'espaces rigides analytiques p -adiques. La base de cette tour est une boule ouverte de dimension $n - 1$, \mathbb{B}^{n-1} , sur $\widehat{\mathbb{Q}_p^{nr}} = W(\overline{\mathbb{F}_p})[\frac{1}{p}]$ le complété de l'extension maximale non-ramifiée de \mathbb{Q}_p

$$\mathbb{B}^{n-1}(\mathbb{C}_p) = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}_p^{n-1} \mid \forall i |x_i| < 1\}$$

Cette base est la "fibre générique" (i.e., après inversion de p) du schéma formel paramétrant les déformations d'un groupe formel de dimension 1 et hauteur n sur $\overline{\mathbb{F}_p}$, \mathbb{H} (un tel groupe formel est unique à isomorphisme près). Lorsque $n = 2$ un tel groupe formel \mathbb{H} est celui associé à une courbe elliptique supersingulière sur $\overline{\mathbb{F}_p}$, obtenu à partir de la loi de groupe de la courbe elliptique par complétion formelle en son origine. Ce schéma formel \mathfrak{X} est non-canoniquement isomorphe à

$$\mathrm{Spf}(\widehat{\mathbb{Z}_p^{nr}}[[x_1, \dots, x_{n-1}]])$$

En d'autres termes il n'y a pas d'obstruction aux déformations de tels groupes formels et l'espace tangent du foncteur des déformations est de dimension $n - 1$. On a donc bien $\mathfrak{X}_\eta \simeq \mathbb{B}^{n-1}$.

Pour $n = 2$, si pour $(N, p) = 1$, $X(N)$ désigne la courbe modulaire sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ et $x \in X(N)(\overline{\mathbb{F}_p})$ un point associé à une courbe elliptique supersingulière, d'après le théorème de Serre-Tate

$$\mathfrak{X} \simeq X(N)_{/\{x\}}^\wedge$$

le complété formel le long du point x . Ainsi l'espace de Lubin-Tate comme espace rigide, \mathfrak{X}_η , est l'ensemble des points de la fibre générique se spécialisant sur x et

s'interprète donc comme la “fibre de Milnor” en x de la fibration donnée par les modèles entiers des courbes modulaires (ce que l'on appelle le tube au-dessus de $\{x\}$ en géométrie rigide).

Si D désigne une algèbre à division d'invariant $\frac{1}{n}$ sur \mathbb{Q}_p et \mathcal{O}_D son ordre maximal

$$\mathcal{O}_D^\times \simeq \text{Aut}(\mathbb{H})$$

qui agit sur \mathfrak{X} (le groupe des automorphismes d'un objet agit toujours sur l'espace des déformations de celui-ci) et donc également sur l'espace rigide \mathfrak{X}_η .

Si H désigne la déformation universelle sur \mathfrak{X} et $H[p^k]$ ses points de p^k -torsion alors en fibre générique $H[p^k]_\eta$ est un groupe étale fini sur \mathfrak{X}_η , un système local rigide-étale en $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ -modules localement libres de rang n . Les trivialisations partielles de ces systèmes locaux permettent de définir une tour d'espaces rigides analytiques $\text{GL}_n(\mathbb{Q}) \times D^\times$ -équivariante

$$(\mathcal{L}\mathcal{T}_K)_{K \subset \text{GL}_n(\mathbb{Z}_p)}$$

de revêtements étales finis de $\mathcal{L}\mathcal{T}_{\text{GL}_n(\mathbb{Z}_p)} := \coprod_{\mathbb{Z}} \mathfrak{X}_\eta \simeq \coprod_{\mathbb{Z}} \mathbb{B}^{n-1}$, indexée par les sous-groupes ouverts de $\text{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$, le cas des sous-groupes de congruence principaux $K = Id + p^k M_n(\mathbb{Z}_p)$ correspondant aux trivialisations de $H[p^k]_\eta$. L'action “verticale” de $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ se fait par correspondances de Hecke et permute les différents sous-groupes $K \subset \text{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ suffisamment petits; il s'agit d'une action à la limite lorsque $K \rightarrow \{Id\}$. L'action de D^\times est elle “horizontale” sur chaque élément de la tour. Le diagramme qui suit schématise ce que l'on vient de dire où $\mathcal{L}\mathcal{T}_\infty$ désigne “la tour en niveau infini” (même si cela n'a aucun sens pour l'instant)

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{L}\mathcal{T}_\infty & \\
 & \downarrow & \\
 K & \downarrow & \\
 & \mathcal{L}\mathcal{T}_K & \\
 D^\times & \curvearrowright & \\
 & \downarrow & \\
 & \mathcal{L}\mathcal{T}_{\text{GL}_n(\mathbb{Z}_p)} & \simeq \mathfrak{X}_\eta \simeq \coprod_{\mathbb{Z}} \mathbb{B}^{n-1} \\
 D^\times & \curvearrowright &
 \end{array}
 \quad \text{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$$

Si $T_p(H)$ désigne le module de Tate de la déformation universelle, il y a une représentation de monodromie

$$\pi_1(\mathfrak{X}_\eta) \longrightarrow \text{GL}(T_p(H))$$

et $\mathcal{L}\mathcal{T}_K$ est obtenu en forçant cette monodromie à vivre dans K .

Lorsque $n = 2$, comme précédemment, cette tour s'interprète comme fibre de Milnor en un point supersingulier de la tour modulaire $X(p^k N)$, lorsque $k \rightarrow +\infty$ et $(N, p) = 1$ (ou plutôt les composantes de cette tour dans l'union disjointe $\coprod_{\mathbb{Z}}$).

La tour possède un “bon” modèle entier dont la base est le schéma formel \mathfrak{X} et qui est obtenu grâce à la notion de structures de niveau de Drinfeld ([5]). Néanmoins nous n'utilisons pas ces modèles entiers dans ce livre.

Espaces de Drinfeld

Les espaces de Drinfeld forment une tour de revêtements d'espaces rigides p -adiques dont la base est l'espace Ω de Drinfeld

$$\Omega(\mathbb{C}_p) = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}_p) \setminus \bigcup_{H \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{Q}_p)} H(\mathbb{C}_p)$$

muni de son action de $GL_n(\mathbb{Q}_p)$. Par exemple si $n = 2$, $\Omega(\mathbb{C}_p) = \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Q}_p$, le demi-plan p -adique. Cet espace Ω possède un modèle entier équivariant semi-stable $\widehat{\Omega}$ dont les composantes irréductibles et leurs intersections sont paramétrées par l'immeuble de Bruhat-Tits de $PGL_n(\mathbb{Q}_p)$. Ce schéma formel paramètre des déformations par “quasi-isogénies” de certains groupes formels de dimension n et hauteur n^2 , munis d'une action de \mathcal{O}_D . Si G est un tel groupe formel sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, unique à isogénie près,

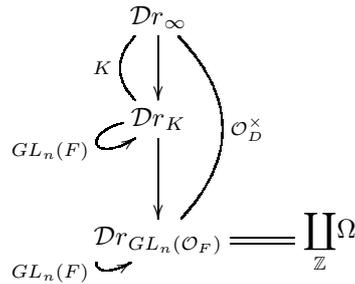
$$\text{End}_{\mathcal{O}_D}(G)_{\mathbb{Q}} \simeq M_n(\mathbb{Q}_p)$$

isomorphisme qui fournit une définition modulaire de l'action de $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ sur $\widehat{\Omega}$.

De plus si G désigne la déformation universelle sur $\widehat{\Omega}$ alors

$$\text{rg}_{\mathcal{O}_D} T_p(G) = 1$$

d'où une représentation de monodromie $\pi_1(\Omega) \rightarrow (\mathcal{O}_D^{opp})^\times \simeq \mathcal{O}_D^\times$, ce qui permet de définir une tour $(\mathcal{D}r_K)_{K \subset \mathcal{O}_D^\times}$ comme précédemment



Lorsque $n = 2$, cette tour uniformise des courbes de Shimura associées à des algèbres de quaternions sur \mathbb{Q} .

En égales caractéristiques, la situation est similaire en remplaçant \mathbb{Q}_p par $\mathbb{F}_q((\pi))$.

Les principaux théorèmes

Le schéma formel $\widehat{\Omega}$ est p -adique au sens où p engendre un idéal de définition de $\widehat{\Omega}$. Localement, c'est un schéma formel de la forme $\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p\langle X_1, \dots, X_d \rangle / \text{Idéal})$, où $\mathbb{Z}_p\langle X_1, \dots, X_d \rangle$ désigne les séries formelles restreintes, le complété p -adique de $\mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_d]$. On obtient alors un modèle entier de la tour de Drinfeld en prenant les normalisés $\widehat{\mathcal{D}r}_K$ de $\widehat{\Omega}$ dans $\mathcal{D}r_K$. On peut alors former

$$\widehat{\mathcal{D}r}_\infty = \varprojlim_K \widehat{\mathcal{D}r}_K$$

dans la catégorie des schémas formels p -adiques, i.e.,

$$\varprojlim_i \mathrm{Spf}(A_i) = \mathrm{Spf}((\varprojlim_i A_i)^\wedge)$$

(complété p -adique).

Par contre les modèles entiers usuels de la tour de Lubin-Tate ne sont pas p -adiques, puisque déjà pour la base de la tour $\mathfrak{X} \simeq \mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p[[x_1, \dots, x_{n-1}]])$ l'idéal de définition est (p, x_1, \dots, x_{n-1}) .

Voici le premier théorème.

Théorème 1 (Faltings). *Il existe une “ p -adification” $\widetilde{\mathcal{L}T}_\infty$ (en un sens qui sera rendu clair dans le corps de l'ouvrage) de la tour de Lubin-Tate “en niveau infini” munie d'un isomorphisme*

$$\widetilde{\mathcal{L}T}_\infty \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{D}r}_\infty$$

où $\widetilde{\mathcal{D}r}_\infty$ est un certain éclatement formel admissible de $\widehat{\mathcal{D}r}_\infty$. Cet isomorphisme est équivariant lorsque l'on munit $\widehat{\mathcal{D}r}_\infty$ de l'action de $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ obtenue en tordant l'action naturelle par l'involution de $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times : (g, d) \mapsto ({}^t g^{-1}, d)$.

En fait, comme le suggère sans doute la notation, la p -adification $\widetilde{\mathcal{L}T}_\infty$ est elle-même obtenue comme éclatement formel admissible d'un schéma formel p -adique $\widehat{\mathcal{L}T}_\infty$.

Ce résultat est démontré en inégales caractéristiques dans l'article de Fargues et en égales (en remplaçant p par π bien entendu dans l'énoncé) dans l'article de Genestier et Lafforgue par une méthode différente de celle de Faltings.

Bien sûr une partie du théorème consiste à définir ce qu'est ce schéma formel p -adique $\widehat{\mathcal{L}T}_\infty$ et quel est son lien avec la tour de Lubin-Tate usuelle. C'est l'objet du premier chapitre de l'article de Fargues dans ce livre. Sur ce point l'article de Genestier et Lafforgue utilise une variante “en niveau Iwahori” de la construction explicite de $\widehat{\mathcal{L}T}_\infty$ et se dispense des éclatements.

Quant aux éclatements formels admissibles, cela demande quelques précautions pour définir ce que cela signifie pour de tels schémas formels (de tels éclatements proviennent en fait localement par transformé strict d'un niveau fini des tours).

Rappelons que d'après Raynaud les espaces rigides quasicompacts peuvent s'interpréter comme des schémas formels admissibles, et donc p -adiques, à éclatements formels admissibles près. Les espaces rigides

$$\varprojlim_K \mathcal{L}\mathcal{T}_K \quad \text{et} \quad \varprojlim_K \mathcal{D}r_K$$

n'existent pas dans la théorie classique des espaces rigides. Néanmoins le théorème précédent dit qu'on peut leur donner un sens, quitte à choisir de bons modèles entiers. En fait, Fargues développe dans le chapitre IV de son article une théorie des espaces rigides pour laquelle ces limites projectives ont un sens sans référer à un système projectif de modèles entiers particulier. Néanmoins cette théorie n'est pas nécessaire pour la démonstration de ce premier théorème.

Le second théorème obtenu dans l'article de Fargues concerne les applications cohomologiques et est nouveau par rapport aux travaux de Faltings. Il est valable en égales et inégales caractéristiques.

Théorème 2.

- *Il existe une équivalence de topos*

$$\varprojlim_{K \subset GL_n(\mathcal{O}_F)} (\mathcal{L}\mathcal{T}_K)_{\text{rig-ét}}^{\sim} \simeq \varprojlim_{K \subset \mathcal{O}_D^\times} (\mathcal{D}r_K)_{\text{rig-ét}}^{\sim}$$

compatible à l'action de $GL_n(F) \times D^\times$ (action tordue de l'action naturelle sur l'une des deux tours comme dans le théorème précédent).

- *Soit Λ un anneau de torsion. Il y a alors des isomorphismes $GL_n(F) \times D^\times \times W_F$ -équivariants*

$$\forall q \geq 0, \quad \varinjlim_{K \subset GL_n(\mathcal{O}_F)} H_c^q(\mathcal{L}\mathcal{T}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \Lambda) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{K \subset \mathcal{O}_D^\times} H_c^q(\mathcal{D}r_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \Lambda)$$

(cohomologie étale à support compact).

- *Plus précisément, on peut donner un sens aux complexes de cohomologie “ $\varinjlim_K R\Gamma_c(\mathcal{L}\mathcal{T}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \Lambda)$ ” et “ $\varinjlim_K R\Gamma_c(\mathcal{D}r_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \Lambda)$ ” dans la catégorie dérivée des Λ -modules munis d'une action lisse de $GL_n(F) \times D^\times \times W_F$. Ces deux complexes sont alors isomorphes.*
- *Il y a une équivalence de topos “de Jacquet-Langlands” entre faisceaux rig-étales D^\times -équivariants, tels que l'action de D^\times soit “lisse”, sur l'espace des périodes de Gross-Hopkins \mathbb{P}^{n-1} (ou plutôt une forme tordue, une variété de Severi-Brauer) et les mêmes type de faisceaux $GL_n(F)$ -équivariants sur Ω .*

Plan du livre

Le livre contient deux articles complètement indépendants. Celui de Laurent Fargues intitulé “L’isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et applications cohomologiques” traite du cas d’inégales caractéristiques ainsi que des applications cohomologiques. L’article d’Alain Genestier et Vincent Lafforgue intitulé “L’isomorphisme des deux tours. Une autre approche en égales caractéristiques” traite du cas d’égales caractéristiques. On renvoie aux introductions respectives de chacun des articles pour plus de détails.

L’isomorphisme au niveau des squelettes

Le lecteur désirant approfondir le sujet pourra consulter l’article [7] dans lequel Fargues donne une description détaillée de l’isomorphisme au niveau des “squelettes” des espaces de Lubin-Tate et de Drinfeld.

Remerciements

Ce livre est né d’un groupe de travail organisé à l’IHES par Jean-François Dat, Laurent Fargues et Alain Genestier au printemps 2004. Les auteurs remercient tous les participants de celui-ci et plus particulièrement Jean-François Dat pour de nombreuses discussions. Nous tenons également à remercier Laurent Lafforgue pour nous avoir fait bénéficier de l’hospitalité de l’IHES. En particulier, l’article de Laurent Fargues a été rédigé alors que celui-ci résidait dans cet institut à l’invitation de Laurent Lafforgue.

Laurent Fargues tient également à remercier Ofer Gabber avec qui il a bénéficié de discussions fructueuses lors de la rédaction du quatrième chapitre de son article.

Alain Genestier remercie également l’université de Bielefeld, où il a eu l’occasion de donner une série d’exposés sur ce sujet. Il remercie aussi Thomas Zink et Eike Lau, le premier pour son invitation à Bielefeld, et tous les deux pour les questions stimulantes qu’ils lui ont posées lors des exposés.

Bibliographie

- [1] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples et applications. *Prépublication*.
- [2] P. Boyer. Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale. *Invent. Math.*, 138(3):573–629, 1999.
- [3] H. Carayol. Nonabelian Lubin-Tate theory. In *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions*, volume 11 of *Perspect. Math.*, pages 15–39. Academic Press, Boston, MA, 1990.

- [4] J.-F. Dat. Théorie de Lubin-Tate non-abélienne et représentations elliptiques. *À paraître à Invent. Math.*
- [5] V.G. Drinfeld. Elliptic modules. *Mat. Sb. (N.S.)*, 136(94):594–627, 1974.
- [6] G. Faltings. A relation between two moduli spaces studied by v.g. Drinfeld. In *Algebraic number theory and algebraic geometry*, volume 300 of *Contemp. Math.*, pages 115–129, 2002.
- [7] L. Fargues. Application de Hodge-Tate duale d’un groupe de Lubin-Tate, immeuble de Bruhat-Tits du groupe linéaire et filtrations de ramification. *À paraître à Duke Math.*
- [8] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [9] M. Rapoport, Th. Zink. *Period spaces for p -divisible groups*. Number 141 in *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.