1.2 Lösung der Zustandsgleichung im Zeitbereich

1.2.1 Die Fundamentalmatrix

Zunächst soll ein System 1. Ordnung betrachtet werden, dessen Zustandsgleichung die skalare Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \tag{1.2.1}$$

ist. Die Anfangsbedingung im Zeitpunkt $t_0 = 0$ sei

$$x(0) = x_0 \,.$$

Durch Anwendung der Laplace-Transformation erhält man aus Gl. (1.2.1)

$$sX(s) - x_0 = aX(s) + bU(s)$$

und daraus

$$X(s) = \frac{1}{s-a}\, x_0 + \frac{1}{s-a}\, bU(s)\,. \tag{1.2.2}$$

Die Rücktransformation in den Zeitbereich liefert unmittelbar als Lösung von Gl. (1.2.1)

$$x(t) = \mathrm{e}^{at}\, x_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{a(t-\tau)}\, bu(\tau)\mathrm{d}\tau\,. \tag{1.2.3}$$

Nun ist es naheliegend, für den vektoriellen Fall der Zustandsgleichung entsprechend Gl. (1.1.7a) die gleiche Struktur der Lösungsgleichung anzusetzen und die skalaren Größen entsprechend Gl. (1.1.7a) durch Vektoren bzw. Matrizen zu ersetzen. Dies führt rein formal auf die Beziehung

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\, \boldsymbol{x}_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\, \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\,. \tag{1.2.4}$$

Dabei ergibt sich allerdings die Schwierigkeit der Definition der Matrix-Exponentialfunktion $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$. Sie muss in Analogie zum skalaren Fall die Bedingung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{A}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} \tag{1.2.5}$$

erfüllen. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn die e-Funktion als unendliche Reihe auf die Matrix-Funktion (1.2.5) angewendet wird. Damit folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} &= \mathbf{I} + \boldsymbol{A}t + \boldsymbol{A}^2\,\frac{t^2}{2!} + \boldsymbol{A}^3\,\frac{t^3}{3!} + \boldsymbol{A}^4\,\frac{t^4}{4!} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^k\,\frac{t^k}{k!}\,.\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

Man kann zeigen, dass diese Reihe für alle Matrizen $\boldsymbol{A}$ und für $|t|<\infty$ absolut konvergiert. Deshalb ist die gliedweise Differentiation nach der Zeit zulässig, und man erhält

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} &= \boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2 t+\boldsymbol{A}^3\frac{t^2}{2!}+\boldsymbol{A}^4\frac{t^3}{3!}+\cdots\\ &= \boldsymbol{A}(\mathbf{I}+\boldsymbol{A}t+\boldsymbol{A}^2\frac{t^2}{2!}+\boldsymbol{A}^3\frac{t^3}{3!}+\cdots)\\ &= \boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\,.\end{aligned}$$

Die Bedingung in Gl. (1.2.5) ist damit erfüllt, und Gl. (1.2.6) kann als Definitionsgleichung für die Funktion $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ benutzt werden.

Um die Gültigkeit von Gl. (1.2.4) nachzuweisen, wird diese Gleichung in die Form

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\,\boldsymbol{x}_0+\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\int_0^t \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

gebracht und unter Berücksichtigung von Gl. (1.2.5) die Ableitung gebildet:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\,\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{A}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\int_0^t \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau+\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\,\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(t)\\ &= \boldsymbol{A}\left[\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\,\boldsymbol{x}_0+\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\right]+\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(t)\\ &= \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(t)\,.\end{aligned}$$

Damit ist nachgewiesen, dass der Lösungsansatz gemäß Gl. (1.2.4) die Zustandsdifferentialgleichung, Gl. (1.1.7a), erfüllt.

Im allgemeinen wird Gl. (1.2.4) auch in der Form

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\,\boldsymbol{x}_0+\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.2.7a}$$

geschrieben, wobei die Matrix

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} \tag{1.2.8}$$

als *Fundamental-* oder *Übergangsmatrix* bezeichnet wird. Diese Matrix spielt bei den Methoden des Zustandsraums eine wichtige Rolle. Sie ermöglicht gemäß Gl. (1.2.7a) auf einfache Weise die Berechnung des Systemzustands für alle Zeiten t allein aus der Kenntnis eines Anfangszustands $\boldsymbol{x}_0$ im Zeitpunkt $t_0=0$ und des Zeitverlaufs des Eingangsvektors. Der Term $\boldsymbol{\Phi}(t)\,\boldsymbol{x}_0$ in Gl. (1.2.7a) beschreibt die homogene Lösung der Zustandsgleichung, die auch als *Eigenbewegung* oder als *freie Reaktion* des Systems bezeichnet wird. Der zweite Term entspricht der partikulären Lösung, also dem durch die äußere Erregung (*erzwungene Reaktion*) gegebenen Anteil.

Anmerkung:

Ist der Anfangszeitpunkt $t_0 \neq 0$, so ändert sich Gl. (1.2.7a) nur formal, indem das Argument t durch $t - t_0$ ersetzt und t_0 als untere Integrationsgrenze eingesetzt wird:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t - t_0)\,\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t - \tau)\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\,. \tag{1.2.7b}$$

Beispiel 1.2.1:

Gegeben sei die Zustandsgleichung

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)\,,\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sowie die zugehörige Fundamentalmatrix $\boldsymbol{\Phi}(t)$ in analytischer Form:

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} (3\mathrm{e}^{-2t} - 2\mathrm{e}^{-3t}) & (6\mathrm{e}^{-2t} - 6\mathrm{e}^{-3t}) \\ (-\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-3t}) & (-2\mathrm{e}^{-2t} + 3\mathrm{e}^{-3t}) \end{bmatrix}.$$

(Methoden zur Ermittlung von $\boldsymbol{\Phi}(t)$ in dieser Form werden in den Abschnitten 1.4 und 1.5 besprochen.)

Unter Berücksichtigung der gegebenen Anfangsbedingung soll nun der zeitliche Verlauf des Zustandsvektors für einen Einheitssprung $u(t) = 1, t \geq 0$ mit Hilfe von Gl. (1.2.7a) bestimmt werden. Zunächst erhält man für den Term $\boldsymbol{\Phi}(t - \tau)\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(t)$ gerade die zweite Spalte der Matrix $\boldsymbol{\Phi}(t - \tau)$, und damit folgt als Lösung

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} (3\mathrm{e}^{-2t} - 2\mathrm{e}^{-3t}) & (6\mathrm{e}^{-2t} - 6\mathrm{e}^{-3t}) \\ (-\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-3t}) & (-2\mathrm{e}^{-2t} + 3\mathrm{e}^{-3t}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$+ \int_0^t \begin{bmatrix} 6\mathrm{e}^{-2(t-\tau)} - 6\mathrm{e}^{-3(t-\tau)} \\ -2\mathrm{e}^{-2(t-\tau)} + 3\mathrm{e}^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix} \mathrm{d}\tau$$

oder nach Ausführen der Multiplikation und Integration

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 15\mathrm{e}^{-2t} - 12\mathrm{e}^{-3t} \\ 6\mathrm{e}^{-3t} - 5\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - 3\mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{-3t} \\ \mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 + 12\mathrm{e}^{-2t} - 10\mathrm{e}^{-3t} \\ 5\mathrm{e}^{-3t} - 4\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Ebenso lässt sich beispielsweise die Rampenantwort dieses Systems bestimmen, indem $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$ und $u(t) = t$, $t \geq 0$ gesetzt wird. Dies ergibt

$$\boldsymbol{x}(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} 6\mathrm{e}^{-2(t-\tau)} - 6\mathrm{e}^{-3(t-\tau)} \\ -2\mathrm{e}^{-2(t-\tau)} + 3\mathrm{e}^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix} \tau\,\mathrm{d}\tau$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} t - \frac{5}{6} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2t} - \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3t} \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

1.2.2 Eigenschaften der Fundamentalmatrix

Aufgrund der Gl. (1.2.8) ergeben sich die folgenden Eigenschaften der Fundamentalmatrix eines zeitinvarianten Systems:

a) $\boldsymbol{\Phi}(0) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\cdot 0} = \mathbf{I}$ (Einheitsmatrix). (1.2.9)

b) $\boldsymbol{\Phi}(t)$ ist stets invertierbar. Es gilt: $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t) = (\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t})^{-1} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(-t)} = \boldsymbol{\Phi}(-t)$. (1.2.10)

c) $\boldsymbol{\Phi}^k(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}tk} = \boldsymbol{\Phi}(kt)$. (1.2.11)

d) $\boldsymbol{\Phi}(t_1)\,\boldsymbol{\Phi}(t_2) = \boldsymbol{\Phi}(t_2)\,\boldsymbol{\Phi}(t_1) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_1+t_2)} = \boldsymbol{\Phi}(t_1+t_2)$. (1.2.12a)

Hieraus folgt mit $\boldsymbol{\Phi}(t_i - t_j) = \boldsymbol{\Phi}(t_i)\cdot\boldsymbol{\Phi}(-t_j) = \boldsymbol{\Phi}(t_i)\cdot\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_j)$:

e) $\boldsymbol{\Phi}(t_2 - t_1)\,\boldsymbol{\Phi}(t_1 - t_0) = \boldsymbol{\Phi}(t_2 - t_0)$. (1.2.12b)

Diese Eigenschaften können besonders dann vorteilhaft genutzt werden, wenn $\boldsymbol{\Phi}(t)$ nicht in analytischer Form vorliegt. Hat man beispielsweise für $t = T$ die Matrix $\boldsymbol{\Phi}(T)$ numerisch bestimmt, so ist es mit Hilfe der Gl. (1.2.11) sehr leicht möglich, zumindest die homogene Lösung nach Gl. (1.2.7) für diskrete Zeitpunkte $t_k = kT$ und beliebige k zu ermitteln.

Anmerkung:

Für zeitvariante Systeme lässt sich ebenfalls eine Fundamentalmatrix $\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)$ angeben, die natürlich auch vom Anfangszeitpunkt t_0 abhängt und im allgemeinen nicht als Exponentialfunktion darstellbar ist. Sie hat jedoch ähnliche Eigenschaften:

a) $\boldsymbol{\Phi}(t_0, t_0) = \mathbf{I}$,

b) $\boldsymbol{\Phi}(t_1, t_0) = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0, t_1)$,

c) $\boldsymbol{\Phi}(t_2, t_1)\,\boldsymbol{\Phi}(t_1, t_0) = \boldsymbol{\Phi}(t_2, t_0)$.

Ebenso ist auch die Lösungsgleichung, Gl. (1.2.7b), auf zeitvariante Systeme übertragbar:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\,\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t, \tau)\,\boldsymbol{B}(\tau)\,\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau .$$

Diese Gleichung ist allerdings kaum mehr analytisch, sondern nur noch numerisch auswertbar.

1.2.3 Die Gewichtsmatrix oder Matrix der Gewichtsfunktionen

Bei der Betrachtung von Regelungssystemen interessiert nicht nur der Zeitverlauf der Zustandsgrößen, sondern auch der Zusammenhang zwischen $\boldsymbol{u}(t)$ und dem Ausgangsvektor $\boldsymbol{y}(t)$.

Es sei wiederum ein zeitinvariantes System betrachtet, wobei $t_0 = 0$ gewählt wird. Setzt man in die Gleichung des Ausgangsvektors

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}(t)$$

für $\boldsymbol{x}(t)$ Gl. (1.2.4) ein, so ergibt sich

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\,\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{C}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau + \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}(t)\,. \tag{1.2.13}$$

Nun wird die $(m \times r)$-Matrix

$$\boldsymbol{G}(t) = \boldsymbol{C}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\,\delta(t) \tag{1.2.14a}$$

bzw.

$$\boldsymbol{G}(t-\tau) = \boldsymbol{C}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\,\delta(t-\tau) \tag{1.2.14b}$$

in Gl. (1.2.13) eingeführt. Beachtet man noch, dass aufgrund der Ausblendeigenschaft der δ-Funktion die Beziehung

$$\int_0^t \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}(\tau)\,\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}(t) \tag{1.2.15}$$

gilt, dann erhält man aus Gl. (1.2.13) schließlich

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\,\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{G}(t-\tau)\,\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\,. \tag{1.2.16}$$

Wie man leicht erkennt (speziell für $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}$), stellt diese Beziehung eine Verallgemeinerung des Duhamelschen Faltungsintegrals dar. Daher kann die Matrix

$$\boldsymbol{G}(t) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{\Phi}(t)\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\,\delta(t) \tag{1.2.17}$$

auch als Verallgemeinerung der vom skalaren Fall bekannten Gewichtsfunktion $g(t)$ angesehen werden. $\boldsymbol{G}(t)$ wird deshalb auch als *Gewichtsmatrix* oder als Matrix der Gewichtsfunktionen zwischen den r Eingangs- und m Ausgangsgrößen bezeichnet.

Beispiel 1.2.2:

Für das System mit der Zustandsdarstellung

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0]\,\boldsymbol{x} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}$$

lautet die Fundamentalmatrix

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \begin{bmatrix} (3\mathrm{e}^{-2t} - 2\mathrm{e}^{-3t}) & (6\mathrm{e}^{-2t} - 6\mathrm{e}^{-3t}) \\ (-\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-3t}) & (-2\mathrm{e}^{-2t} + 3\mathrm{e}^{-3t}) \end{bmatrix}.$$

Mit Gl. (1.2.17) und $\boldsymbol{D} = \mathbf{0}$ folgt als Gewichtsmatrix

$$\boldsymbol{G}(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} (3\mathrm{e}^{-2t} - 2\mathrm{e}^{-3t}) & (6\mathrm{e}^{-2t} - 6\mathrm{e}^{-3t}) \\ (-\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-3t}) & (-2\mathrm{e}^{-2t} + 3\mathrm{e}^{-3t}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 6\,\mathrm{e}^{-2t} - 6\,\mathrm{e}^{-3t}\,.$$

Da das hier zugrunde gelegte System ein Eingrößensystem ist, wird die Gewichtsmatrix hierbei eine skalare Größe, die unmittelbar mit der Gewichtsfunktion $g(t)$ identisch ist.■

1.3 Lösung der Zustandsgleichungen im Frequenzbereich

Für die Behandlung der Zustandsgleichungen im Frequenzbereich wird die Laplace-Transformierte von zeitabhängigen Vektoren und Matrizen benötigt. Dazu wird folgende Schreibweise benutzt:

$$\mathscr{L}\{\boldsymbol{u}(t)\} = \boldsymbol{U}(s) \quad \text{und} \tag{1.3.1a}$$

$$\mathscr{L}\{\boldsymbol{G}(t)\} = \underline{\boldsymbol{G}}(s)\,. \tag{1.3.1b}$$

Die Transformation ist dabei elementweise zu verstehen. Im weiteren werden bei der Darstellung im Frequenzbereich die Laplace-Transformierten der zeitabhängigen Vektoren $\boldsymbol{u}(t)$, $\boldsymbol{y}(t)$ oder $\boldsymbol{x}(t)$ gemäß Gl. (1.3.1a) durch Großbuchstaben $\boldsymbol{U}(s)$, $\boldsymbol{Y}(s)$ oder $\boldsymbol{X}(s)$ gekennzeichnet. Um diese Größen gegenüber der Laplace-Transformierten einer zeitabhängigen Matrix, z. B. $\boldsymbol{G}(t)$, unterscheiden zu können, wird diese zusätzlich noch durch eine Unterstreichung gekennzeichnet, also hier entsprechend Gl. (1.3.1b) durch $\underline{\boldsymbol{G}}(s)$.

Zur Berechnung der Übergangsmatrix $\boldsymbol{\Phi}(t)$ wird die Zustandsraumdarstellung gemäß den Gln. (1.1.7a) und (1.1.7b) einer Laplace-Transformation unterzogen:

$$s\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{U}(s) \tag{1.3.2}$$

$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{U}(s)\,. \tag{1.3.3}$$

Gl. (1.3.2) kann umgeformt werden zu

$$(s\mathbf{I} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{U}(s)$$

oder

$$\boldsymbol{X}(s) = (s\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0) + (s\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{U}(s)\,, \tag{1.3.4}$$

da $(s\mathbf{I} - \boldsymbol{A})$ nichtsingulär, also invertierbar ist.

Diese Beziehung stellt die Laplace-Transformierte der Gl. (1.2.7a) und somit die Lösung der Zustandsgleichungen im Bild- oder Frequenzbereich dar. Der erste Term der rechten Seite beschreibt die freie Reaktion (Eigenverhalten), der zweite Term die erzwungene

Reaktion des Systems. Durch Vergleich der beiden Gln. (1.2.7) und (1.3.4) folgt unmittelbar für die Übergangsmatrix

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\right\} \tag{1.3.5}$$

oder

$$\mathscr{L}\left\{\boldsymbol{\Phi}(t)\right\} = \underline{\boldsymbol{\Phi}}(s) = (s\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1} . \tag{1.3.6}$$

Die Berechnung der Matrix $\underline{\boldsymbol{\Phi}}(s)$ ergibt sich aus der Inversen von $(s\mathbf{I} - \boldsymbol{A})$, also

$$\underline{\boldsymbol{\Phi}}(s) = \frac{1}{|s\mathbf{I} - \boldsymbol{A}|} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \boldsymbol{A}) . \tag{1.3.7}$$

Die Adjungierte einer Matrix $\boldsymbol{M} = [m_{ij}]$ entsteht bekanntlich dadurch, dass man jedes Element m_{ij} durch den Kofaktor M_{ij} ersetzt und diese entstehende Matrix transponiert. Der Kofaktor M_{ij} ist definiert durch

$$M_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij} ,$$

wobei D_{ij} die Determinante derjenigen Matrix ist, die aus $\boldsymbol{M}$ durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Damit besteht die Möglichkeit, die Fundamentalmatrix $\boldsymbol{\Phi}(t)$ in analytischer Form zu berechnen. Man bestimmt $\underline{\boldsymbol{\Phi}}(s)$ nach Gl. (1.3.7) und transformiert die Elemente dieser Matrix in den Zeitbereich zurück.

Beispiel 1.3.1:

Gegeben sei die Systemmatrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} .$$

Dann wird

$$(s\mathbf{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} s & -6 \\ 1 & s+5 \end{bmatrix} ,$$

und als adjungierte Matrix erhält man

$$\operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} s+5 & 6 \\ -1 & s \end{bmatrix} .$$

Mit $|s\mathbf{I} - \boldsymbol{A}| = s^2 + 5s + 6 = (s+2)\,(s+3)$ folgt schließlich

$$\underline{\boldsymbol{\Phi}}(s) = (s\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{(s+2)\,(s+3)} \begin{bmatrix} s+5 & 6 \\ -1 & s \end{bmatrix} .$$

Die Rücktransformation in den Zeitbereich liefert:

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} (3\mathrm{e}^{-2t} - 2\mathrm{e}^{-3t}) & (6\mathrm{e}^{-2t} - 6\mathrm{e}^{-3t}) \\ (-\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-3t}) & (-2\mathrm{e}^{-2t} + 3\mathrm{e}^{-3t}) \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Nachfolgend soll aus der Zustandsdarstellung eines Mehrgrößensystems dessen *Übertragungsmatrix* $\underline{\boldsymbol{G}}(s)$ hergeleitet werden, mit der die Laplace-Transformierte des Ausgangsvektors durch

$$\boldsymbol{Y}(s) = \underline{\boldsymbol{G}}(s)\,\boldsymbol{U}(s) \text{ mit } \underline{\boldsymbol{G}}(s) = [G_{\mu\nu}(s)]\,;\ \mu = 1, 2, \ldots, m\,;\ \nu = 1, 2, \ldots, r \tag{1.3.8}$$

darstellbar ist, wobei die Größen $G_{\mu\nu}(s)$ die Teilübertragungsfunktionen des Mehrgrößensystems zwischen dem ν-ten Eingangssignal und dem μ-ten Ausgangssignal beschreiben. Wie im skalaren Fall gilt diese Beziehung nur bei verschwindenden Anfangsbedingungen. Daher wird Gl. (1.3.4) mit $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}$ in Gl. (1.3.3) eingesetzt. Damit erhält man

$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{C}(s\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{U}(s) + \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{U}(s)$$

oder

$$\boldsymbol{Y}(s) = [\boldsymbol{C}(s\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}]\boldsymbol{U}(s)\,. \tag{1.3.9}$$

Daraus folgt gemäß Gl. (1.3.8) für die Übertragungsmatrix

$$\underline{\boldsymbol{G}}(s) = \boldsymbol{C}(s\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \tag{1.3.10}$$

und mit Gl. (1.3.6) schließlich

$$\underline{\boldsymbol{G}}(s) = \boldsymbol{C}\,\underline{\boldsymbol{\Phi}}(s)\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\,. \tag{1.3.11}$$

Ein Vergleich mit Gl. (1.2.17) zeigt, dass diese Übertragungsmatrix genau die Laplace-Transformierte der Gewichtsmatrix $\boldsymbol{G}(t)$ ist.

Für Eingrößensysteme sind $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ Vektoren, $\boldsymbol{D}$ ist skalar, und man erhält als Übertragungsfunktion

$$G(s) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(s\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b} + d \tag{1.3.12}$$

bzw.

$$G(s) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{\Phi}}(s)\,\boldsymbol{b} + d\,. \tag{1.3.13}$$

Neben dieser Möglichkeit, die Übertragungsfunktion eines Systems aus der gegebenen Zustandsraumdarstellung zu ermitteln, existiert noch eine weitere, die zunehmend bei der rechentechnischen Analyse dynamischer Systeme angewandt wird. Dazu muss von den Gln. (1.3.2) und (1.3.3) ausgegangen werden. Für $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}$ folgt aus Gl. (1.3.2)

$$(s\mathbf{I} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{U}(s) = \boldsymbol{0}\,, \tag{1.3.14}$$

und aus Gl. (1.3.3) ergibt sich

$$-\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{U}(s) = -\boldsymbol{Y}(s)\,. \tag{1.3.15}$$

Die beiden Gln. (1.3.14) und (1.3.15) lassen sich in der Form

$$\left[\begin{array}{c|c} s\mathbf{I}-\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \hline -\boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{X}(s) \\ \hline -\boldsymbol{U}(s) \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{0} \\ \hline -\boldsymbol{Y}(s) \end{array}\right] \tag{1.3.16}$$

darstellen. Die Matrix

$$\underline{\boldsymbol{P}}(s)=\left[\begin{array}{c|c} s\mathbf{I}-\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \hline -\boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{array}\right] \tag{1.3.17}$$

wird als verallgemeinerte Systemmatrix oder oft auch als Rosenbrock-Matrix bezeichnet [Ros74]. Für ein Eingrößensystem $(m=r=1)$ geht diese Matrix über in

$$\underline{\boldsymbol{P}}(s)=\left[\begin{array}{c|c} s\mathbf{I}-\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ \hline -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & d \end{array}\right]. \tag{1.3.18}$$

Für die Determinante der $(n+m)\times(n+r)$-dimensionalen Blockmatrix des Mehrgrößensystems gemäß Gl. (1.3.17) gilt [Hüt00]

$$\left|\underline{\boldsymbol{P}}(s)\right|=\left|\left[\begin{array}{c|c} s\mathbf{I}-\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \hline -\boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{array}\right]\right|=\left|s\mathbf{I}-\boldsymbol{A}\right|\cdot\left|\boldsymbol{D}+\boldsymbol{C}(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\right|$$

und entsprechend für jene der quadratischen Matrix des Eingrößensystems gemäß Gl. (1.3.18)

$$\left|\underline{\boldsymbol{P}}(s)\right|=\left|s\mathbf{I}-\boldsymbol{A}\right|[d+\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}],$$

wobei zu beachten ist, dass die zweite Determinante sich hier zu der skalaren Größe des Klammerausdrucks reduziert. Damit erhält man für das Eingrößensystem

$$\left|\underline{\boldsymbol{P}}(s)\right|=\left|s\mathbf{I}-\boldsymbol{A}\right|d+\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\operatorname{adj}(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{b}\,. \tag{1.3.19}$$

Schreibt man für das Eingrößensystem die Gl. (1.3.12) in die Form

$$G(s)=\frac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\operatorname{adj}(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{b}+d\left|s\mathbf{I}-\boldsymbol{A}\right|}{\left|s\mathbf{I}-\boldsymbol{A}\right|}, \tag{1.3.20}$$

dann erkennt man, dass mit Gl. (1.3.19) die Übertragungsfunktion durch die Beziehung

$$G(s)=\frac{\left|\underline{\boldsymbol{P}}(s)\right|}{\left|s\mathbf{I}-\boldsymbol{A}\right|}=\frac{Z(s)}{N(s)} \tag{1.3.21}$$

einfach berechnet werden kann. Anhand eines Beispiels soll die Anwendung der Gl. (1.3.21) gezeigt werden.

Beispiel 1.3.2:

Gegeben sei ein System in der Zustandsraumdarstellung mit

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & 7 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}=[-10\quad 4],\quad d=1\,.$$

Für dieses System soll $G(s)$ bestimmt werden. Die zur Berechnung von $Z(s)$ und $N(s)$ benötigte Matrix

$$s\mathbf{I} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 12 & s-7 \end{bmatrix}$$

liefert als Determinante $|s\mathbf{I} - \boldsymbol{A}| = s^2 - 7s + 12$.

Die Rosenbrock-Matrix ist gegeben durch

$$\underline{\boldsymbol{P}}(s) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 12 & s-7 & 1 \\ 10 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daraus ergibt sich als Zählerpolynom

$$Z(s) = |\underline{\boldsymbol{P}}(s)| = s^2 - 3s + 2\,.$$

Somit lautet die gesuchte Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{(s-1)(s-2)}{(s-3)(s-4)}\,. \qquad \blacksquare$$

1.4 Einige Grundlagen der Matrizentheorie zur Berechnung der Fundamentalmatrix

1.4.1 Der Satz von Cayley-Hamilton

Bei der Einführung der Zustandsraumdarstellung wurde festgestellt, dass die Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ die vollständige Information über das Eigenverhalten des Systems besitzt. Sie muss also insbesondere die Pole des Systems enthalten. In der Übertragungsmatrix nach Gl. (1.3.11) tritt $\underline{\boldsymbol{\Phi}}(s)$ als einziger von s abhängiger Term auf. Diese Matrix enthält gemäß Gl. (1.3.7) als gemeinsamen Nenner aller Elemente die Determinante $|\,s\mathbf{I} - \boldsymbol{A}\,|$, also ein Polynom n-ter Ordnung, dessen Wurzeln die *Pole des Systems* liefern. Demnach können der reellen quadratischen $(n \times n)$-Matrix $\boldsymbol{A}$ genau n reelle oder komplexe Eigenwerte s_i zugeordnet werden, die sich aus der *charakteristischen Gleichung* oder *Eigenwertgleichung*

$$P^*(s) = |s\mathbf{I} - \boldsymbol{A}| = 0 \tag{1.4.1}$$

ergeben. $P^*(s)$ stellt ein Polynom n-ter Ordnung in s dar und ist das *charakteristische Polynom* der Matrix $\boldsymbol{A}$. Gl. (1.4.1) hat also die Form

$$P^*(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + s^n = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i \quad \text{mit} \quad a_n = 1\,. \tag{1.4.2}$$

Hieraus lassen sich die Eigenwerte des Systems ermitteln. Für ein System mit einer Ein- und Ausgangsgröße lässt sich nach Gl. (1.3.21) die Übertragungsfunktion $G(s)$ berech-