
Inhaltsverzeichnis

Grundlagen

1	Logik und Mengen	1
1.1	Elementare Logik	1
1.2	Elementare Mengenlehre	10
1.3	Schaltalgebra	15
1.3.1	Anwendung: Entwurf von Schaltkreisen	21
1.4	Mit dem digitalen Rechenmeister	23
1.5	Kontrollfragen	24
1.6	Übungen	28
2	Zahlenmengen und Zahlensysteme	33
2.1	Die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$	33
2.2	Summen und Produkte	44
2.3	Vollständige Induktion	46
2.4	Stellenwertsysteme	48
2.5	Maschinenzahlen	51
2.6	Teilbarkeit und Primzahlen	55
2.7	Mit dem digitalen Rechenmeister	58
2.8	Kontrollfragen	61
2.9	Übungen	65

Diskrete Mathematik

3	Elementare Begriffe der Zahlentheorie	71
3.1	Das kleine Einmaleins auf endlichen Mengen	71
3.1.1	Anwendung: Hashfunktionen	74
3.2	Gruppen, Ringe und Körper	77
3.2.1	Anwendung: Welche Fehler erkennen Prüffziffern?	87
3.3	Der Euklid'sche Algorithmus und diophantische Gleichungen	90
3.3.1	Anwendung: Der RSA-Verschlüsselungsalgorithmus	95
3.4	Der Chinesische Restsatz	100

3.4.1	Anwendung: Rechnen mit großen Zahlen	101
3.4.2	Anwendung: Verteilte Geheimnisse	103
3.5	Mit dem digitalen Rechenmeister	104
3.6	Kontrollfragen	107
3.7	Übungen	109
4	Polynomringe und endliche Körper	113
4.1	Der Polynomring $\mathbb{K}[x]$	113
4.2	Der Restklassenring $\mathbb{K}[x]_{m(x)}$	119
4.2.1	Anwendung: Zyklische Codes	124
4.3	Endliche Körper	125
4.3.1	Anwendung: Der Advanced Encryption Standard	128
4.3.2	Anwendung: Reed-Solomon-Codes	128
4.4	Mit dem digitalen Rechenmeister	129
4.5	Kontrollfragen	131
4.6	Übungen	134
5	Relationen und Funktionen	137
5.1	Relationen	137
5.1.1	Anwendung: Relationales Datenmodell	146
5.2	Funktionen	149
5.3	Kontrollfragen	162
5.4	Übungen	166
6	Folgen und Reihen	171
6.1	Folgen	171
6.1.1	Anwendung: Wurzelziehen à la Heron	181
6.2	Reihen	182
6.3	Mit dem digitalen Rechenmeister	188
6.4	Kontrollfragen	190
6.5	Übungen	193
7	Kombinatorik	197
7.1	Grundlegende Abzählverfahren	197
7.2	Permutationen und Kombinationen	201
7.3	Mit dem digitalen Rechenmeister	208
7.4	Kontrollfragen	208
7.5	Übungen	209
8	Rekursionen und Wachstum von Algorithmen	215
8.1	Grundbegriffe	215
8.1.1	Ausblick: Iterationsverfahren und Chaos	219
8.2	Lineare Rekursionen	222
8.2.1	Anwendung: Sparkassenformel	231
8.3	Wachstum von Algorithmen	232
8.4	Mit dem digitalen Rechenmeister	239
8.5	Kontrollfragen	242
8.6	Übungen	244

Lineare Algebra

9	Vektorräume	247
9.1	Vektoren	247
9.2	Lineare Unabhängigkeit und Basis	255
9.3	Teilräume	260
9.4	Mit dem digitalen Rechenmeister	265
9.5	Kontrollfragen	266
9.6	Übungen	268
10	Matrizen und Lineare Abbildungen	273
10.1	Matrizen	273
10.2	Multiplikation von Matrizen	278
10.3	Lineare Abbildungen	285
10.3.1	Anwendung: Lineare Codes	293
10.4	Mit dem digitalen Rechenmeister	296
10.5	Kontrollfragen	298
10.6	Übungen	301
11	Lineare Gleichungen	307
11.1	Der Gauß-Algorithmus	307
11.1.1	Anwendung: Elektrische Netzwerke	315
11.1.2	Anwendung: Input-Output-Analyse nach Leontjef	317
11.2	Rang, Kern, Bild	318
11.3	Determinante	323
11.4	Mit dem digitalen Rechenmeister	328
11.5	Kontrollfragen	329
11.6	Übungen	331
12	Lineare Optimierung	335
12.1	Lineare Ungleichungen	335
12.2	Lineare Optimierung	338
12.3	Der Simplex-Algorithmus	339
12.4	Mit dem digitalen Rechenmeister	345
12.5	Kontrollfragen	347
12.6	Übungen	348
13	Skalarprodukt und Orthogonalität	353
13.1	Skalarprodukt und orthogonale Projektion	353
13.1.1	Anwendung: Matched-Filter	363
13.1.2	Anwendung: Lineare Klassifikation	364
13.1.3	Anwendung: Ray-Tracing	364
13.2	Orthogonalentwicklungen	366
13.3	Orthogonale Transformationen	372
13.3.1	Anwendung: QR-Zerlegung	376
13.4	Mit dem digitalen Rechenmeister	377
13.5	Kontrollfragen	378

13.6	Übungen	380
14	Eigenwerte und Eigenvektoren	383
14.1	Koordinatentransformationen	383
14.2	Eigenwerte und Eigenvektoren	386
14.2.1	Anwendung: Bewertung von Webseiten mit <i>PageRank</i>	395
14.3	Eigenwerte symmetrischer Matrizen	398
14.3.1	Anwendung: Die diskrete Kosinustransformation	401
14.4	Mit dem digitalen Rechenmeister	404
14.5	Kontrollfragen	404
14.6	Übungen	406

Graphentheorie

15	Grundlagen der Graphentheorie	409
15.1	Grundbegriffe	409
15.2	Darstellung von Graphen am Computer	415
15.3	Wege und Kreise	417
15.4	Mit dem digitalen Rechenmeister	425
15.5	Kontrollfragen	426
15.6	Übungen	429
16	Bäume und kürzeste Wege	435
16.1	Bäume	435
16.2	Das Problem des Handlungsreisenden	441
16.2.1	Ausblick: Die Komplexitätsklassen P und NP	443
16.3	Minimale aufspannende Bäume	443
16.4	Kürzeste Wege	446
16.4.1	Anwendung: Routing im Internet	449
16.5	Mit dem digitalen Rechenmeister	450
16.6	Kontrollfragen	451
16.7	Übungen	454
17	Flüsse in Netzwerken und Matchings	459
17.1	Netzwerke	459
17.2	Matchings	467
17.3	Mit dem digitalen Rechenmeister	473
17.4	Kontrollfragen	475
17.5	Übungen	477

Anhang

A	Einführung in Mathematica	483
A.1	Erste Schritte	483
A.2	Funktionen	485
A.3	Gleichungen	487
A.4	Programme	488
B	Lösungen zu den weiterführenden Aufgaben	491
B.1	Logik und Mengen	491
B.2	Zahlenmengen und Zahlensysteme	491
B.3	Elementare Begriffe der Zahlentheorie	492
B.4	Polynomringe und endliche Körper	492
B.5	Relationen und Funktionen	492
B.6	Folgen und Reihen	493
B.7	Kombinatorik	493
B.8	Rekursionen und Wachstum von Algorithmen	493
B.9	Vektorräume	494
B.10	Matrizen und Lineare Abbildungen	494
B.11	Lineare Gleichungen	494
B.12	Lineare Optimierung	495
B.13	Skalarprodukt und Orthogonalität	495
B.14	Eigenwerte und Eigenvektoren	495
B.15	Grundlagen der Graphentheorie	496
B.16	Bäume und kürzeste Wege	496
B.17	Flüsse in Netzwerken und Matchings	497
	Literatur	499
	Verzeichnis der Symbole	501
	Index	503