4 Elektrisches Feld

4.1 Elektrostatisches Quellenfeld

Wir haben in Abschnitt 3 die Wirkung eines elektrischen Felds der Feldstärke $\vec{E}$ in einem Material mit der elektrischen Leitfähigkeit γ kennen gelernt. Entsprechend Gl. (3.6) wird die auftretende Stromdichte $\vec{J}$ umso kleiner, je geringer die Leitfähigkeit des Materials wird. Im Grenzfall mit $\gamma = 0$ (idealer Isolator) ist trotz des elektrischen Felds kein Strömungsfeld mehr vorhanden. In diesem Fall spricht man von einem elektrostatischen Feld oder von einem Feld ruhender Ladungen. Auch in einem idealen (stofflichen) Isolator sind elektrische Ladungen beiderlei Vorzeichens vorhanden und entsprechend Gl. (3.5) Kräfte auf die Ladungen zu erwarten, die hier jedoch mangels Driftbewegung kein Strömungsfeld zur Folge haben. Schließlich können wir uns noch einen isolierenden Feldraum vorstellen, der völlig frei von Materie ist (Vakuum oder leerer Raum), also auch keine elektrische Ladungen mehr enthält (abgesehen von den Begrenzungen des Feldraumes).

In diesem Sinn werden wir uns zunächst mit dem elektrostatischen Feld im ladungsfreien Raum beschäftigen und dann mit den Wirkungen des elektrischen Felds in nichtleitender Materie.

Coulombsches Gesetz. Schon bei den einführenden Überlegungen in Abschn. 1.7.2 haben wir festgestellt, dass die Masse m eine Wirkung auf den umgebenden Raum hat, die wir als Gravitationsfeld oder Massenanziehungsfeld bezeichnen. Nach dem Grundsatz, dass nur Wechselwirkungen zwischen gleichartigen Feldern auftreten, können wir die Wirkung des Gravitationsfelds der Masse m_1 auf eine Masse m_2 auch als gegenseitige Anziehung der Massen m_1 und m_2 auffassen. Die auftretende Anziehungskraft kann z.B. mit Hilfe des allgemeinen Gravitationsgesetzes

$$|\vec{F}| = f \frac{m_1 \cdot m_2}{r_2} \quad \text{mit} \quad f = 66{,}7 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}$$

bestimmt werden. Ist m_2 eine Probemasse, die also das Gravitationsfeld der Masse m_1 nicht beeinflusst, erhalten wir die uns schon bekannte Gleichung $\vec{F} = m\,\vec{g}$, wenn wir $|g| = f \cdot m_1/r^2$ schreiben.

Auch eine elektrische Ladungsmenge übt auf den umgebenden Raum eine Wirkung aus, eben das elektrische Feld. Für zwei Ladungen Q_1 und Q_2 bekommen wir für die Kraft zwischen ihnen eine dem allgemeinen Gravitationsgesetz entsprechende Beziehung, das Coulombsche Gesetz:

$$\boxed{|\vec{F}| = k \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}} \tag{4.1a}$$

Dabei ist r der Abstand zwischen den beiden Ladungen Q_1 und Q_2. Für die Konstante k, deren Wert später abgeleitet wird, gilt im Vakuum:

$$k = \frac{1}{\varepsilon_0 \cdot 4\pi}$$

Elektrische Feldstärke. Man definiert:

Unter einem elektrischen Feld ist der Raumbereich zu verstehen, in dem auf elektrische Ladungen Kräfte ausgeübt werden. Dabei ist das Verhältnis $\vec{E} = \vec{F}/Q_+$ die am Ort der Ladung Q_+ herrschende elektrische Feldstärke.

Nach dieser Definition können wir im Coulombschen Gesetz die Ladung Q_1 als die felderzeugende Ladung betrachten und Q_2 als die Probeladung, mit der wir das Feld von Q_1 untersuchen. (Ebenso gut könnten wir die Rollen von Q_1 und Q_2 vertauschen, d.h. Q_2 als Feld- und Q_1 als Probeladung betrachten.) Dieser Vorstellung entsprechend schreiben wir Gl. (4.1a) um in

$$|\vec{F}| = |\vec{E}| \cdot Q_2 \quad |\vec{E}| = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{4.1b}$$

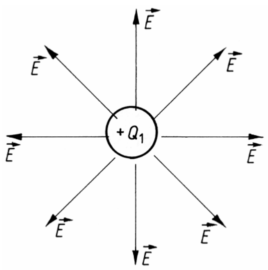


Bild 4.1 Feld einer positiven Ladung

Die räumliche Richtung der elektrischen Feldstärke ergibt sich daraus, dass die Wirkungslinie der Kraft $\vec{F}$ immer die Verbindungslinie der beiden Ladungen ist, unabhängig davon, wie diese im Raum liegt. Bei einer positiven Ladung Q_1 ist daher die elektrische Feldstärke überall sternförmig von Q_1 weg nach außen gerichtet (Bild **4.**1), bei negativer Ladung zielen alle Feldstärkevektoren auf den Ladungsmittelpunkt.

Bei zwei und mehr Ladungen findet man das elektrische Feld durch vektorielle Addition der Kräfte bzw. Feldstärken.

Bringt man in den leeren Raum zwischen der positiven Ladung Q_+ und der negativen Ladung Q_- eine Probeladung q, kann man mit Hilfe des Coulombschen Gesetzes die am Ort der Probeladung wirksame resultierende Kraft $\vec{F}$ bestimmen und damit auch die elektrische Feldstärke $\vec{E}$. Diese entsteht aus den beiden Kraftkomponenten, die als Wirkung zwischen den Ladungen Q_+ bzw. Q_- und der Probeladung q auftreten (Bild **4.**2). Die Ladungen Q_+ und Q_- sind dabei Punktladungen, also Ladungen ohne räumliche Ausdehnung.

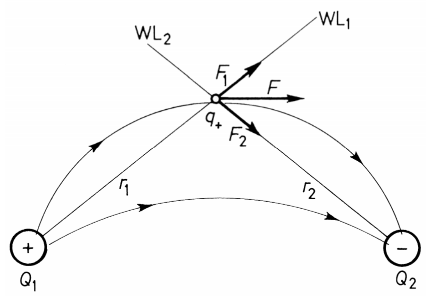


Bild 4.2 Kraftermittlung im elektrischen Feld nach dem Coulombschen Gesetz

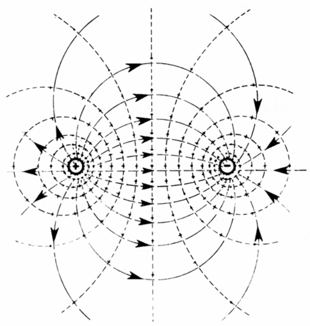


Bild 4.3 Elektrisches Feld zwischen parallelen Leitern

Stellt man sich Q_+ und Q_- auf der Oberfläche von langen, zylindrischen und parallelen Leitern vor, erhält man ein elektrisches Feld entsprechend Bild **4.**3. Da auch innerhalb der im Querschnitt dargestellten metallischen Leiter keine elektrische Strömung auftreten soll, müssen die Leiteroberflächen Äquipotentialflächen sein. Dies bedeutet, dass der Vektor der elektrischen Feldstärke auf der Leiteroberfläche senkrecht steht. Sonst riefe eine Komponente der Feldstärke im Leiter eine Strömung hervor.

Weitere Äquipotentialflächen des elektrischen Felds bzw. im Querschnitt Äquipotentiallinien sind in Bild **4.**3 durch gestrichelte Linien angedeutet.

Man entnimmt diesen Feldbildern **4.**1, **4.**2 und **4.**3 unmittelbar, dass das elektrische Feld ein Quellenfeld ist. Die Feldlinien entspringen auf positiven Ladungen und enden auf negativen. Bei dem Feldbild **4.**1 müssen wir uns die negativen Ladungen, die das Ende der Feldlinien bilden, unendlich weit entfernt vorstellen.

Inhomogenes und homogenes elektrisches Feld. Wir entnehmen Bild **4.**3 zunächst, dass es sich offenbar um ein inhomogenes Feld zwischen den beiden Leitern handelt. Die Feldstärke $\vec{E}$ hat auf der Verbindungslinie der beiden Leiter ihren größten Wert, wird dann entsprechend der gezeichneten Feldliniendichte dem Betrag nach kleiner und ändert außerdem ihre Richtung. Da die Oberflächen der Leiter Äquipotentialflächen sind, ist andererseits der räumliche Aufbau des Vektorfelds $\vec{E}$ von der Form der metallischen Elektroden abhängig. Wir können also diesen eine solche Form geben, dass das Feld zwischen ihnen homogen wird. Das ist z.B. in Bild **4.**4 der Fall, wenn wir von den Randbereichen einmal absehen. Eine solche Elektrodenanordnung nennt man Plattenkondensator. Sie hat eine große praktische Bedeutung.

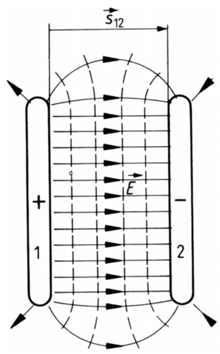


Bild 4.4 Elektrisches Feld in einem Plattenkondensator

Wir können die zwischen den Kondensatorplatten herrschende Spannung leicht ermitteln. Da das Feld zwischen ihnen homogen ist, erhalten wir die Spannung als Skalarprodukt aus elektrischer Feldstärke und dem als Vektor aufgefassten Abstand $\vec{s}_{12}$ zwischen den Platten.

$$U_{12} = (\vec{E} \cdot \vec{s}_{12})$$

Andererseits können wir das elektrische Feld mit der Feldstärkenbetrag

$$E = \frac{U_{12}}{s_{12}} \qquad (4.2)$$

leicht durch Anlegen einer entsprechenden Spannung an die Kondensatorplatten erzeugen.

Elektrische Flussdichte und elektrischer Fluss. Bringen wir einen metallischen Körper in das Feld eines Plattenkondensators (Bild **4.**4), erfolgt unter dem Einfluss der elektrischen Feldstärke eine Ladungstrennung im Prüfkörper. Diesen Vorgang bezeichnet man als Influenz (s. Abschn. 1.8.1). Nimmt man den Prüfkörper aus dem Feld heraus, gleichen sich die Ladungen wieder aus, und er erscheint ungeladen. Um den Influenzvorgang zu erfassen, verwenden wir einen Prüfkörper, der aus zwei Scheiben besteht. Diese Scheiben werden in gegenseitiger Berührung in das Feld eingeführt und dort getrennt. Die Influenzladun-

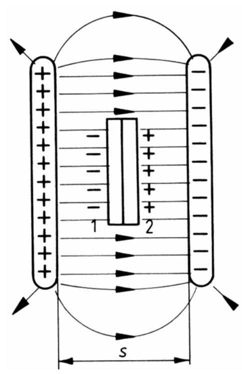


Bild 4.5 Influenz im elektrischen Feld

gen können sich so beim Herausnehmen nicht mehr ausgleichen und einzeln gemessen werden.

Diesen Vorgang der Influenzladungsmessung verwendet man zur Definition der elektrischen Flussdichte $\vec{D}$, der zweiten Vektorgröße, die man zur Beschreibung eines Feldes braucht (s. Abschn. 3.4). Für die Messung verwenden wir ein Plattenpaar mit den Flächen $\Delta\vec{A}$ und halten sie vor der Trennung so, dass die Influenzladungen ΔQ möglichst groß ausfallen. Als Flussdichte definiert man das Verhältnis von Influenzladung zur Plattenfläche und lässt den Vektor senkrecht auf der positiven Prüfplatte stehen.

$$D = \frac{\Delta Q}{\Delta A} \tag{4.3}$$

Dieser Flussdichte des elektrostatischen Felds entspricht die Stromdichte im Strömungsfeld. Daraus ergibt sich, dass der elektrische Fluss Ψ die dem Strom entsprechende Größe ist.

Die Feldgleichung des elektrostatischen Felds gibt den Zusammenhang zwischen den beiden Vektoren $\vec{D}$ und $\vec{E}$ an. Experimentell findet man, dass die beiden Vektoren stets die gleiche Richtung haben und dass ihre Beträge verhältnisgleich sind. Das drückt sich in der Gleichung

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \tag{4.4}$$

aus. Die Proportionalitätskonstante ε_0 heißt Feldkonstante des elektrischen Felds. In dieser Form gilt die Gleichung für den materiefreien Raum (Vakuum). Die Einheit der Feldkonstanten leiten wir in bekannter Weise ab:

$$[\varepsilon_0] = \frac{[D]}{[E]} = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}} \tag{4.5}$$

Der aus der Definition der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum abgeleitete Wert ε_0 beträgt nach DIN 1324-1

$$\varepsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}} \tag{4.6}$$

Kapazität. Mit Hilfe der Gl. (4.2) und (4.3) können wir die Ladungsmenge berechnen, die wir auf den Platten eines Plattenkondensators speichern können. Diese sollen den Abstand s haben und die ladungstragende Oberfläche A. Zwischen den Platten liege die Spannung U. Im homogenen Feld erhalten wir

$$E = \frac{U}{s};\; D = \frac{Q}{A};\; \frac{Q}{A} = \varepsilon_0 \frac{U}{s}$$

Durch Umstellen der Gleichung ergibt sich

$\boxed{Q = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{s} \cdot U}$ oder, wenn man

$\boxed{C_0 = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{s}}$ einführt, (4.7)

$$\boxed{Q = C_0 \cdot U} \tag{4.8}$$

Die Größe C_0 nennt man Kapazität (Fassungsvermögen) des Kondensators. Der Index o bedeutet, dass es sich um die Kapazität im Vakuum handelt. Bei der Berechnung von C aus den Abmessungen des Kondensators haben die Vektoren $\vec{A}$ (Flächennormale) und $\vec{s}$ (Plattenabstand) die gleiche Richtung.

Als Einheit für die Kapazität erhalten wir

$$[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{\mathrm{A \cdot s}}{\mathrm{V}} = \mathrm{F}\ \text{(Farad)} \tag{4.9}$$

Polarisation und Permittivität. Gebrauchskondensatoren haben keine Luft zwischen ihren Platten, sondern einen besonderen Isolierstoff. Diesen nennt man das *Dielektrikum*. Hat das elektrische Feld die gleiche Feldstärke wie ohne Dielektrikum, lässt sich eine größere Ladungsmenge auf den Platten speichern als vorher. Die Ladungsdichte auf den Kondensatorplatten ist größer geworden und mit ihr die im Feldraum vorhandene elektrische Flussdichte. Diese Vergrößerung beschreibt der Faktor ε_r, den wir in Gl. (4.4) einführen.

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E}} \tag{4.10}$$

Das Produkt $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ heißt Permittivität. Sie ist bei manchen dielektrischen Materialien auch von der elektrischen Feldstärke abhängig, also keine reine Stoffkonstante. Der Faktor ε_r heißt *Permittivitätszahl* oder auch *relative Permittivität*. Sie gibt an, um welchen Faktor die Kapazität eines Plattenkondensators mit Dielektrikum größer ist als die des gleichen Kondensators im Vakuum. Die Kapazität des Plattenkondensators wird damit allgemein

$$\boxed{C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \frac{A}{s}} \tag{4.11}$$

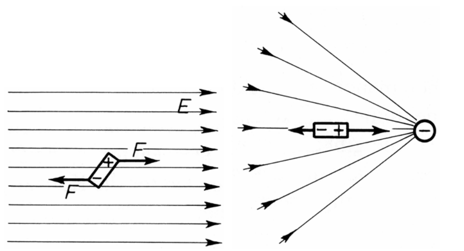
Die Wirkung, die das elektrische Feld dabei offenbar auf das Material des Dielektrikums hat, bezeichnet man als *Polarisation*. Als Folge der durch das elektrische Feld bedingten Kräfte auf die Molekülladungen des Materials werden die Ladungsschwerpunkte in den Molekülen verschoben. Es bilden sich elektrische *Dipole* aus. Je nach ihrer chemischen Natur bzw. dem Aufbau ihrer Moleküle sind die Stoffe unterschiedlich stark polarisierbar.

Tabelle 4.1 Relative Permittivität fester und flüssiger Isolierstoffe

Isolierstoff	ε_r	Isolierstoff	ε_r
Azeton	21,5	Mikanit	5
Benzol	2,25	Paraffin	2,1
Bernstein	2,8	Pertinax	4,8
Crownglas	6 bis 7	Phenolharz	4 bis 6
Diamant	16,5	Polyäthylen	2,2
Flintglas	7	Polystyrol	2,7
Glimmer	7	Polyvinylchlorid	3,2 bis 5,5
Hartpapier	5 bis 6	Quarz	3,8 bis 5
Kabelisolation		Transformatorenöl	2,2 bis 2,5
- Starkstromkabel	4,3	Toluol	2,35
(Jute und getr. Papier)		Wasser dest.	80
– Fernmeldekabel	1,6	Zellulose	6,6
(Papier und Luft)			

Die Moleküle mancher Stoffe sind auch ohne ein äußeres elektrisches Feld schon Dipole (z.B. Wasser). Deren relative Permittivität ist daher besonders groß. Tab. **4.1** zeigt die relative Permittivität ε_r einiger fester und flüssiger Isolierstoffe. Da der Betrag des Vektors D offenbar von der „Verschiebbarkeit“ der inneren Ladungen der Moleküle des Dielektrikums abhängig ist, wird D auch als „Verschiebungsdichte“ bezeichnet.

Dipole im elektrischen Feld. Befinden sich ungeladene Körper mit so kleinen Abmessungen im elektrischen Feld, dass wir sie als Probekörper auffassen können, lassen sich je nach Aufbau des elektrischen Felds unterschiedliche Erscheinungen feststellen. Je nach der stofflichen Natur des Probekörpers bilden sich durch Influenz oder Polarisation elektrische Dipole aus, und zwar durch Ladungstrennung im leitenden Material, durch Verschiebung der Ladungsschwerpunkte im nicht leitenden oder auch durch beide Einflüsse. Ebenso wenig wie ideale Leiter gibt es ideale Nichtleiter, sodass auch im Isolator eine gewisse Beweglichkeit von Elektronen angenommen werden muss.



a) b)

Bild 4.6 Dipole im elektrischen Feld
a) homogenes Feld
b) inhomogenes Feld

Im homogenen elektrischen Feld entsteht durch die Wechselwirkung zwischen der am Ort des Dipols herrschenden elektrischen Feldstärke und den Dipol-Ladungen ein Drehmoment. Dieses versucht, den Probekörper so lange zu drehen, bis beide Dipolladungen auf der Wirkungslinie des Feldstärkevektors liegen (Bild **4.**6). Benutzt man als Probekörper z.B. kurze und leichte Kunststofffasern, ordnen sie sich bei genügend hoher Feldstärke und ausreichend geringer Reibung zu Feldlinienbildern, die ein anschauliches Modell des elektrostatischen Felds darstellen. Die Bilder **4.**7 bis **4.**9 zeigen einige Beispiele.

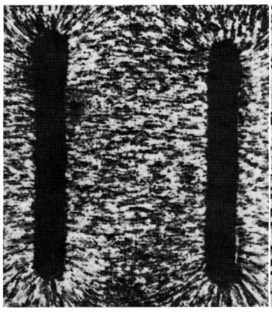


Bild 4.7 Feldbild eines Plattenkondensators

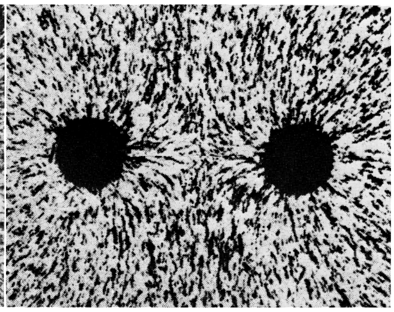


Bild 4.8 Feldbild gleichnamig geladener Kugeln

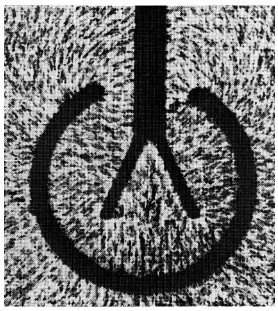


Bild 4.9 Feldbild eines Blättchen- Elektroskops

Im inhomogenen Feld versucht der elektrische Dipol wegen des entstehenden Drehmoments ebenfalls eine Lage einzunehmen, bei der die Ladungsschwerpunkte auf der Wirkungslinie des Feldstärkevektors liegen. Da aber auf dieser WL ein umso stärkeres Feldstärkegefälle besteht, je ausgeprägter die Inhomogenität des elektrischen Felds ist, entsteht außer dem Drehmoment noch eine resultierende Kraft, die stets in Richtung zunehmender Feldstärke weist. Diese Kraft kann leichte Probekörper in Richtung zunehmenden Betrags der elektrischen Flussdichte beschleunigen, und zwar unabhängig vom Vorzeichen des geladenen Körpers, der das elektrische Feld hervorruft. Die elektrische Feldstärke bzw. Flussdichte sind besonders groß, wenn der Krümmungsradius der Oberfläche der geladenen Elektrode klein ist, also z.B. bei kleinen Kugeln, an Spitzen oder dünnen Stäben. Hier besteht bei hohen Feldstärken besonders Überschlag- bzw. in Isolierstoffen Durchschlaggefahr. Geringer ist die Feldstärke dagegen bei schwach gewölbten oder ebenen Flächen. Ein Beispiel für die Beschleunigung ungeladener Probekörper im inhomogenen Feld ist die Anziehung von Papierschnitzeln durch einen geriebenen Hartgummistab.

Die geschilderten Kraftwirkungen zwischen geladenen und ungeladenen Körpern im elektrischen Feld lassen sich auch mit einem Drehstab zeigen, wie wir ihn bei den Versuchen in Abschn. 1.8.1 verwendet haben. Die vom geladenen Körper hervorgerufenen influenzierten Ladungen stören oft bei elektrostatischen Versuchen und können das Versuchsergebnis verfälschen.

4.2 Kondensator

4.2.1 Kapazität und Permittivität

Die Kapazität eines Plattenkondensators hängt nicht nur von den geometrischen Abmessungen ab, sondern auch vom Wert der Größe ε_r, die durch die Polarisierbarkeit des Dielektrikums mitbestimmt wird. Den geringsten Wert der Kapazität erhält man, wenn zwischen den Platten Vakuum herrscht. Die in diesem Fall geltende Proportionalitätskonstante in Gl. (4.11) ist die elektrische Feldkonstante ε_0:

$$\boxed{C_0 = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{s}} \tag{4.12}$$

Permittivität. Bei gleichen wirksamen Abmessungen A und s wird die Kapazität des Plattenkondensators größer, wenn zwischen den Platten ein Dielektrikum aus polarisierbarem Material vorhanden ist.

$$\boxed{\frac{C}{C_0} = \frac{\varepsilon \cdot \frac{A}{s}}{\varepsilon_0 \cdot \frac{A}{s}} = \varepsilon_r} \tag{4.13}$$

Das Verhältnis ist die schon früher erwähnte relative Permittivität, die auch als Elektrisierungszahl des Materials bezeichnet wird. Sie ist als relative Größe eine reine Zahl. Entsprechend der Definition von ε_r bekommt man für die Permittivität nach Gl. (**4.**10)

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}$$

Für Vakuum ist $\varepsilon_r = 1$, und für Luft als Dielektrikum ergibt sich praktisch ebenfalls $\varepsilon_r \approx 1$. Den schon erwähnten Zahlenwert für ε_0 erhält man aus dem Zusammenhang

$$\boxed{\varepsilon_0 \cdot \mu_0 = \frac{1}{c_0^2}} \tag{4.14}$$

wobei c_0 die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit bedeutet und μ_0 die Feldkonstante des magnetischen Felds. Ihr Wert ist in Zusammenhang mit der Definition der Stromstärkeeinheit A als Basiseinheit des SI auf