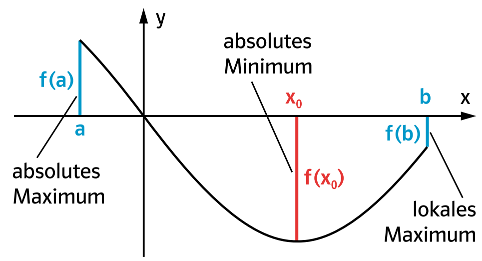
Kurvenuntersuchung

Randextremwerte, absolute Extrempunkte

Ist eine stetige Funktion f an einer ***Randstelle*** definiert, so ist diese Stelle in der Regel eine lokale Extremstelle.

Ein Funktionswert $f(x_0)$ heißt ***absolutes Maximum*** bzw. ***absolutes Minimum***, wenn für alle x-Werte aus der Definitionsmenge D_f gilt:

$f(x) \le f(x_0)$ bzw. $f(x) \ge f(x_0)$



Kriterien für lokale Maxima, Minima

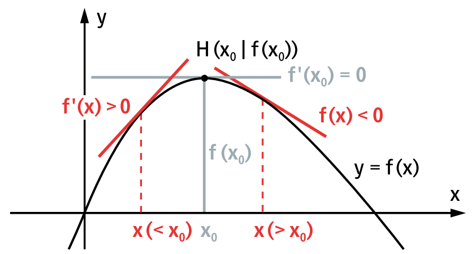
Die Funktion f sei in I zweimal differenzierbar.
f hat an einer inneren Stelle x_0 ein ***lokales Maximum***, wenn

$f'(x_0) = 0$ und

$f'(x) > 0$ für $x < x_0$ und $f'(x) < 0$ für $x > x_0$ ist,

d.h. $f'(x)$ wechselt beim Überschreiten der Stelle x_0 das Vorzeichen von plus nach minus
oder wenn

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ ist.



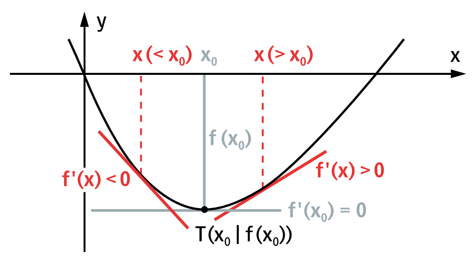
Die Funktion f sei in I zweimal differenzierbar.
f hat an einer inneren Stelle x_0 ein ***lokales Minimum***, wenn

$f'(x_0) = 0$ und

$f'(x) < 0$ für $x < x_0$ und $f'(x) > 0$ für $x > x_0$ ist

d.h. $f'(x)$ wechselt beim Überschreiten der Stelle x_0 das Vorzeichen von minus nach plus
oder wenn

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ ist.



Rechtskurve, Linkskurve, Wendepunkt

Der Graph einer differenzierbaren Funktion f beschreibt auf einem Intervall I eine Linkskurve (Rechtskurve), wenn f′ streng monoton wachsend (fallend) ist. Die Funktion f heißt dann ***konvex*** (***konkav***).

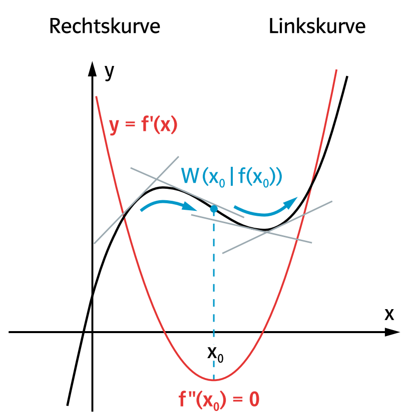
Wenn f in einem Intervall I zweimal differenzierbar ist und für alle $x \in I$ gilt: $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), so ist der Graph von f auf I eine Linkskurve (Rechtskurve).

Ein ***Wendepunkt*** ist ein Extrempunkt der 1. Ableitung von f. Eine dreimal in x_0 differenzierbare Funktion f hat in x_0 einen Wendepunkt, wenn

$f''(x_0) = 0$ ist und

$f''(x)$ beim Überschreiten der Stelle x_0 das Vorzeichen wechselt oder wenn

$f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ ist.



Kurvenuntersuchung

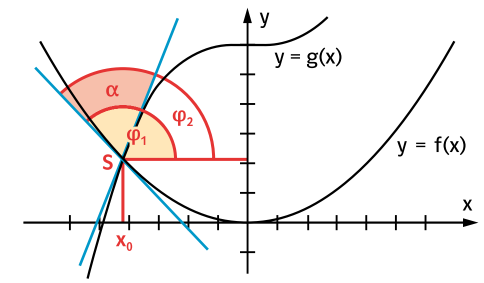
Schnittpunkte zweier Graphen

Man ermittelt die ***Schnittpunkte*** der Graphen zweier Funktionen f und g, indem man die Lösungen der Gleichung $f(x) = g(x)$ ermittelt. Dies führt auf die Bestimmung der Nullstellen der Differenzfunktion $f - g$: $f(x) - g(x) = 0$.
Ist x_0 eine Schnittstelle, so ist $S(x_0 \mid f(x_0))$ der zugehörige Schnittpunkt.

Der ***Schnittwinkel*** in einem Schnittpunkt $S(x_0 \mid f(x_0))$ ist der Winkel, den die Tangenten im Punkt S miteinander einschließen:

$\tan(\alpha) = \left| \dfrac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0) \cdot g'(x_0)} \right|$ für $f'(x_0) \cdot g'(x_0) \neq -1$

Sonderfälle:
Berührung für $f'(x_0) = g'(x_0)$, ***Orthogonalität*** für $f'(x_0) \cdot g'(x_0) = -1$



Integral und Flächeninhalt

Stammfunktionen

F heißt Stammfunktion einer Funktion f auf einem Intervall I, falls dort $F'(x) = f(x)$ gilt.
Ist F eine Stammfunktion von f, so ist auch G mit $G(x) = F(x) + c$ eine Stammfunktion von f.
Statt Stammfunktion sagt man auch ***unbestimmtes Integral***.

Stammfunktionen von Grundfunktionen

Funktion f	Stammfunktion F
$f(x) = a$; a konstant	$F(x) = a \cdot x$
$f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$
$f(x) = x^{-n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 1$	$F(x) = \frac{1}{-n+1} \cdot x^{-n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(\lvert x \rvert)$
$f(x) = x^r$ mit $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{r+1} \cdot x^{r+1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$F(x) = \frac{2}{3} x \sqrt{x}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \ln(x)$	$F(x) = x \cdot \ln(x) - x$
$f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$	$F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$
$f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$	$F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot (x \cdot \ln(x) - x)$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$F(x) = -\ln(\lvert \cos(x) \rvert)$
$f(x) = \cot(x)$	$F(x) = \ln(\lvert \sin(x) \rvert)$