Vorwort

Das vorliegende Buch möchte den Leser in die algebraische Zahlentheorie einführen. Bei seiner Abfassung habe ich mich von einer Reihe von Gesichtspunkten leiten lassen.

1. Es ist meine feste Überzeugung, daß man ein Gebiet der Mathematik, das sich wie die Zahlentheorie über einen längeren Zeitraum entwickelt hat, nur dann richtig erlernen und verstehen kann, wenn man diese Entwicklung in abgekürzter Form durchläuft, ähnlich wie ein Organismus bei seiner Entstehung die biologische Evolution, die zu ihm hingeführt hat, verkürzt in seiner embryonalen Entwicklung durchläuft.

Hieraus ergab sich das Konzept, den Leser von Kapitel zu Kapitel dieses Buches an der historischen Entwicklung der Zahlentheorie teilnehmen zu lassen. Dies gilt für die ersten sieben Kapitel, während die letzten drei Kapitel Anwendungs- bzw. Übersichtscharakter haben.

2. Es war eine Erkenntnis von Dedekind und Kronecker in den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts, daß man Prinzipien, die für die Theorie der algebraischen Zahlen entwickelt worden waren, auch auf die Theorie der algebraischen Funktionen anwenden kann. Dabei hat bei Dedekind der Wunsch im Vordergrund gestanden, eine exakte Begründung der Riemannschen Funktionentheorie zu geben. Er betrachtete zusammen mit H. Weber [DeWe1882] den Fall, daß die Funktionen Argumente und Werte haben, die komplexe Zahlen sind. Später wurde klar [No1927], daß sich die Theorie von Dedekind und Weber für algebraische Funktionen über beliebigen Konstantenkörpern entwickeln läßt. Die vollkommenste Analogie zu den algebraischen Zahlen tritt dann auf, wenn der Konstantenkörper endlich ist. In der Tat befinden wir uns in diesem Fall auf einem ureigensten Gebiet der Zahlentheorie, der Theorie der Kongruenzen.

So werden in diesem Buch algebraische Zahlen und Funktionen (einer Unbestimmten) gleichberechtigt behandelt.

3. Dieses Buch ist nur eine Einführung insofern, als ein Hauptgebiet der algebraischen Zahlentheorie, die Klassenkörpertheorie, nur im Rahmen eines Ausblickes im zehnten und letzten Kapitel behandelt wird. Unterhalb dieser Schwelle soll der Leser jedoch zum Einstieg in ein Forschungsthema befähigt werden. Es wird daher das hierfür notwendige Handwerkszeug bereit gestellt, insbesondere wird die Differenten- und Diskriminantentheorie und die Theorie der höheren Verzweigungsgruppen ausführlich behandelt.

Entsprechend diesen drei Gesichtspunkten ist das Buch wie folgt aufgebaut:
Das erste Kapitel bringt einige Proben aus der elementaren Zahlentheorie und umfaßt die Zeit vor der Entstehung der Theorie der algebraischen Zahlkörper. Es gibt zwei Ausnahmen: Im Abschnitt 1.5 wird die *Public Key Cryptology* behandelt als Beispiel für die Anwendung von Zahlentheorie aus dem vorigen Jahrhundert in der heutigen Kommunikationstechnik, und im Abschnitt 1.8 wird der Primzahlsatz be-

wiesen mit Mitteln, die dem Geiste der Mathematik von Cauchy, Riemann und Tschebyschew entsprechen, aber in der vorliegenden Kürze durch Vereinfachungen aus jüngster Zeit ermöglicht wurden. Ich danke F. Hirzebruch und D. Zagier für die Vermittlung dieser Vereinfachungen durch ein Manuskript des letzteren ([Za1997]).

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit dem Teil der algebraischen Zahlentheorie, der für beliebige Ordnungen in algebraischen Zahlkörpern gültig ist. Dies entspricht einerseits dem Stand der Wissenschaft vor Dedekind und insbesondere hat hier der Dirichletsche Einheitensatz seinen Platz. Andererseits ist unsere Darstellung nicht streng historisch, sondern wird schon von den Gedankengängen Dedekinds durchdrungen. Weiter gehört hier die Minkowskische Geometrie der Zahlen hin, die dem Kapitel seinen Namen gibt. Zahlentheorie hat ihren Ausgangspunkt in der Beschäftigung mit ganzen rationalen Zahlen. Wir beginnen daher das zweite Kapitel mit Ausführungen über vollständige Formen, die den Übergang von Fragen über rationale Zahlen zu Fragen über algebraische Zahlen vermitteln.

Mit dem dritten Kapitel sind wir dann bei der eigentlichen Dedekindschen Idealtheorie, die wir so allgemein entwickeln, daß algebraische Zahl- und Funktionenkörper einheitlich behandelt werden können.

Die ringtheoretische Methode von Kapitel 3 wird durch die bewertungstheoretische Methode von Kapitel 4 ergänzt.

Mit dem so gewonnenen Rüstzeug stellen wir in Kapitel 5 die Theorie der algebraischen Funktionen einer Unbestimmten dar, wobei wir uns im wesentlichen auf H. Hasses Zahlentheorie [Ha1949] stützen.

In Kapitel 6 betrachten wir die Zerlegungsgruppen und Verzweigungsgruppen normaler Erweiterungen und kommen so erst hier zu der Vollendung der Dedekindschen und Hilbertschen Theorie der algebraischen Zahlkörper. Diese erlaubt dann auch, das wichtige Beispiel der Kreisteilungskörper in adäquater Weise zu behandeln. Der Satz von Kronecker-Weber wird in Form von Übungsaufgaben präsentiert. Mit der oberen Numerierung der Verzweigungsgruppen von Hasse und Herbrand haben wir die Mathematik der dreißiger Jahre erreicht.

Das Kapitel 7 ist im wesentlichen dem Beweis der Funktionalgleichung für die Heckeschen L-Reihen nach der Dissertation von Tate [Ta1950] gewidmet. Dieses Ergebnis allein würde kaum ein Kapitel dieses Umfangs rechtfertigen, da verhältnismäßig wenig Folgerungen daraus gezogen werden. Wenn ich mich trotzdem entschlossen habe, dies ausführlich darzustellen, so weil einerseit hierbei gegenüber den vorhergehenden Kapiteln völlig neue Beweismethoden herangezogen werden, wie die Analysis auf lokalkompakten abelschen Gruppen einschließlich der Pontrjaginschen Dualitätstheorie, und andererseits die Methode der Tateschen Dissertation Verallgemeinerungen erlaubt, die für die Verbindung von Zahlentheorie und Darstellungstheorie reduktiver Gruppen (Langlands-Vermutungen) von fundamentaler Bedeutung sind.

Kapitel 7 beginnt mit einer sorgfältigen Darstellung des Zusammenhangs von Ideleklassen- und Strahlklassengruppen sowie von Hecke- und Größencharakteren. Die Grundeigenschaften von Idelen und Adelen werden für Zahl- und Funktionenkörper bewiesen. Beim Beweis der Funktionalgleichung beschränken wir uns jedoch auf Zahlkörper.

Kapitel 8 enthält Anwendungen der analytischen Methoden von Kapitel 7 auf die Verteilung der Primideale in algebraischen Zahlkörpern. Im Abschnitt über die Verallgemeinerte Riemannsche Vermutung werden auch die Kongruenz-Zetafunktionen von Artin und F.K. Schmidt betrachtet. Ich danke S. Böcherer und R. Schulze-Pillot für die Vermittlung einer Seminarausarbeitung von P.K. Draxl zum Satz von Hecke über die Verteilung der Primideale in Kegeln, die eine wesentliche Abrundung von Kapitel 8 ermöglichte.

Kapitel 9 ist den quadratischen Zahlkörpern gewidmet, für die vieles expliziter dargestellt werden kann als im allgemeinen Fall. Das gilt insbesondere für die Klassenzahlberechnung und die Bestimmung der Grundeinheit. Hier wird auch die Brücke zwischen der Gaußschen Theorie der quadratischen Formen und der Ordnungen in quadratischen Zahlkörpern gebaut.

Kapitel 10 gibt schließlich einen Ausblick auf die Klassenkörpertheorie.

Bei der Abfassung des Buches schwebte mir ein Leser vor, der gute Kenntnisse in linearer Algebra besitzt. Diese müssen ergänzt werden durch Kenntnisse in der Körper- und insbesondere Galoistheorie im Umfang der „Algebra“ von E. Kunz, die in der Reihe Aufbaukurs Mathematik des Verlages Vieweg erschienen ist. In gewisser Weise baut das vorliegende Buch direkt auf der Kunzschen Algebra auf, die an vielen Stellen zitiert wird. Wenn am Anfang dieses Buches von der „abgekürzten Entwicklung“ die Rede war, so ergibt sich die Abkürzung insbesondere durch die zur Verfügung stehende moderne Algebra, die manch schwerfälligen Beweis der älteren Meister vereinfacht.

Als Vorlagen bei der Abfassung dieses Buches haben mir aus der langen Reihe der Lehrbücher zur algebraischen Zahlentheorie vor allem die Bücher von H. Hasse [Ha1949] und von Borewicz-Shafarevich [BoSh1966] gedient. Die Konzeption einer gleichzeitigen Behandlung von Zahl- und Funktionenkörpern findet sich außer in dem eben genannten Buch von Hasse auch in den Büchern von Eichler [Ei1963], Artin [Ar1967] und Weil [We1967]. Aus unterschiedlichen Gründen erscheinen mir diese Bücher für den Anfänger wenig geeignet zu sein.

Meine Kollegen S. Böge, G. Frei, W. Hoffmann, S. Kukkuk, W. Narkiewicz und F. Nicolae haben vorläufige Fassungen einzelner Kapitel dieses Buches gelesen und sehr wertvolle Verbesserungen und Fehlerberichtigungen angeregt. Ihnen gilt mein herzlicher Dank ebenso wie C. Hadan, B. Wüst und noch einmal S. Kukkuk und F. Nicolae für die Erarbeitung des TEX-Files.

Einige der größten Mathematiker der Vergangenheit, ich nenne nur D. Hilbert und H. Weyl, haben in der algebraischen Zahlentheorie eine der hervorragensten Schöpfungen der Mathematik gesehen, die Aufgabe dieses Buches wäre erfüllt, wenn es von dieser Begeisterung etwas auf die Leser übertragen könnte.

Berlin, im März 1997 H. Koch