

## Vorwort

Die Knotentheorie ist ein ungewöhnliches Gebiet. Einerseits ist ihr Gegenstand jedem vertraut; die schwierigsten Fragen in bezug auf Knoten sind leicht zu formulieren und ergeben sich so natürlich wie kaum irgendwelche Probleme in der Mathematik. Andererseits scheint das Thema ganz anders zu sein, als die, die üblicherweise in den Bereich der Mathematik fallen; sogar ausgebildeten Mathematikern ist oft nicht klar, wie strenge mathematische Methoden dazu benutzt werden können, die grundlegendsten Fragen über Knoten zu modellieren. Dieses Buch beschreibt einige der mathematischen Techniken der Knotentheorie und illustriert ihre Anwendung auf eine Vielzahl von Problemen.

In den ersten Kapiteln wird erörtert, wie den Knoten eine formale mathematische Beschreibung gegeben werden kann, und es werden drei der grundlegenden Methoden der Theorie vorgestellt, sowie deren Beziehungen untereinander untersucht. Die Darstellung geht dann dazu über, Eigenschaften von Knoten zu untersuchen, wobei auch ein genauer Blick auf Symmetrien geworfen wird. Höherdimensionale Knoten werden als nächstes behandelt. Das Buch schließt mit einem Überblick über neuere Fortschritte in der kombinatorischen Knotentheorie.

Die Erwartungen an mathematische Vorkenntnisse wurden auf ein Minimum beschränkt. Einfache Lineare Algebra wird häufig benutzt und eine gewisse Vertrautheit mit elementarer Gruppentheorie ist gelegentlich gefragt. Die Übungen sind ein wesentlicher Bestandteil der Darstellung; viele zentrale Ideen werden dort entwickelt. Noch wichtiger ist aber, daß die Übungen Gelegenheit dazu geben, die schöne Erfahrung des Arbeitens in der Knotentheorie zu machen.

Ziel ist es, einen Querschnitt der vielen faszinierenden Seiten der Knotentheorie vorzustellen; die Themen wurden so ausgewählt, daß eine Vielfalt von Techniken und deren Ineinandergreifen gezeigt wird, aber nicht, um einen vollständigen Überblick zu geben. Die Beweise dienen dazu, die Methoden der Theorie zu erläutern, und verwirrende technische Beweisführungen werden gewöhnlich zusammengefaßt. Die Art der vorgeführten Beweise erstreckt sich von detaillierten Argumentationen bis hin zu kurzen Skizzen. Für diejenigen, die dem Material in größerer Tiefe oder Breite nachgehen wollen, geben die Referenzen einen Überblick über die vielen zugänglichen Quellen zu diesem Thema.

## Zusammenfassung des Inhaltes

Dieses Buch setzt sich aus drei Hauptteilen zusammen. Im ersten Teil, bestehend aus Kapitel 2 bis 5, werden die Grundlagen der Knotentheorie entwickelt. Kapitel 1 behandelt die neuere Geschichte des Studiums der Knoten. Dabei werden einige der interessantesten Probleme der Knotentheorie beschrieben. Kapitel 2 konzentriert sich auf die grundlegenden Begriffe der Theorie – die präzise Definition der Knoten und ihrer Deformationen. Dies ist die Stelle, an der man zu sehen beginnt, wie mathematische Methoden bei der Untersuchung von Knoten angewandt werden können. In den nächsten drei Kapiteln werden die drei Haupttechniken der Knotentheorie sichtbar: Kapitel 3 ist den kombinatorischen Methoden gewidmet, in Kapitel 4 werden geometrische Techniken dargestellt, und Kapitel 5 erläutert algebraische Hilfsmittel. Diese Kapitel zeigen das Wesen der einzelnen Techniken, und auf welche Art von Problemen sie jeweils anwendbar sind.

Der zweite Teil stellt fortgeschrittene Themen der Knotentheorie vor. In Kapitel 6 werden Beziehungen zwischen den Methoden aus den vorangegangenen Kapiteln beschrieben. Die Ursachen für diese Beziehungen sind ziemlich tiefgehend und subtil. Daher ist diese Aufgabe heikel, aber die Resultate gewähren viele neue Einsichten. In Kapitel 7 werden verschiedene Eigenschaften der Knoten vorgestellt. Die Absicht ist hierbei, einige der sehr natürlichen Fragen, die im Zusammenhang mit Knoten auftauchen, zu beschreiben, und zu erklären, wie die bisher entwickelten Methoden detaillierte Antworten auf diese Fragen geben können. Kapitel 8 ist dem Studium der Symmetrie gewidmet – eine der schönsten Eigenschaften der Knotentheorie. An dieser Stelle wird die gewaltige Kraft der zuvor entwickelten Techniken besonders offensichtlich.

Der dritte Teil ist unabhängig von dem Stoff des zweiten Teils. In diesen abschließenden Kapiteln werden zwei moderne Aspekte der Theorie untersucht. In Kapitel 9 wird eine Einführung in die hochdimensionale Knotentheorie gegeben und kurz angedeutet, wie man die Methoden der klassischen Knotentheorie anwenden kann. Kapitel 10 beschreibt neuere kombinatorische Methoden. Diese Methoden gehen weit über jene aus Kapitel 3 hinaus; die Untersuchung dieser kombinatorischen Invarianten ist heute eines der aktivsten und faszinierendsten Gebiete der Knotentheorie.