Vorwort

Da in den Anwendungen nur die Approximationsmathematik eine Rolle spielt, kann man, etwas kraß ausgedrückt, auch sagen, daß man eigentlich nur diese Disziplin „braucht", während die Präzisionsmathematik bloß zum intellektuellen Vergnügen derer, die sich mit ihr beschäftigen, da ist und im übrigen für die Entwicklung der Approximationsmathematik eine wertvolle und wohl kaum entbehrliche Stütze abgibt.

Felix Klein [1]

Dieses Buch handelt vom Umgang mit fehlerbehafteten Größen und gerundeten Zahlen, von der näherungsweisen Berechnung elementarer Funktionen sowie von numerischen Lösungsverfahren für Gleichungen. Es ist aus einer Vorlesung „Einführung in die Numerische Mathematik" für Lehramtsstudenten der Sekundarstufe I entstanden und richtet sich vornehmlich an (angehende und praktizierende) Lehrer *beider* Sekundarstufen, denn die genannten Themen sind auch für die Sekundarstufe II relevant. Ebensogut eignet es sich als Einführung in die Probleme des numerischen Rechnens für andere Interessenten mit mathematischer Grundbildung.

Was ist nun „Elementare Numerische Mathematik"?
Ihre Inhalte sind nicht so klar zu umreißen wie bei dem Forschungs- und Anwendungsgebiet „Numerische Mathematik". Ganz generell kann man die Elementarmathematik nicht als Reduktion oder als „homomorphes Bild" der „Höheren" Mathematik verstehen, wie manchmal behauptet wird. Statt dessen bezieht sie ihre Ziele, Inhalte und didaktischen Prinzipien aus ihrer Rolle als Hintergrund des Unterrichts. Aus dem allgemeinbildenden Anspruch der Schule ergibt sich nicht nur die Forderung nach Vereinfachung, sondern vor allem nach einer breiteren Auswahl der Themen und Methoden, nach anderen Zugängen und anderen Rechenwerkzeugen.

Leider ist die numerische Mathematik (noch) nicht so fest im Curriculum verankert wie z.B. Arithmetik, Geometrie und Analysis. Jedoch wird immer wieder gefordert, auch numerische Aspekte stärker im Unterricht zu berücksichtigen, einerseits wegen ihrer großen praktischen Bedeutung (für Handwerk, Technik, Wissenschaft), andererseits aus innermathematischen Erwägungen; das Zitat von Felix Klein über die komplementären Rollen der „Präzisions- und Approximationsmathematik", die zusammen erst ein ausgewogenes Bild der Mathematik ergeben, ist wohl das bekannteste Beispiel. Zudem erscheinen heute viele Probleme in einem neuen Licht, denn Taschenrechner und Computer sind inzwischen auch in der Schule als mathematische Werkzeuge nicht mehr wegzudenken.

[1] Vgl. KLEIN, Bd. 1, S. 39

So fragt man sich doch manchmal, was eigentlich passiert, wenn man auf dem Taschenrechner die Wurzel- oder Sinus-Taste drückt; noch eklatanter ist es bei den grafischen Taschenrechnern (besser „Taschencomputer" zu nennen), mit denen man auf Tastendruck Nullstellen, Extremwerte, Integrale von Funktionen berechnen kann. Daher ist z.B. dem Thema *Berechnung elementarer Funktionen* ein eigenes Kapitel gewidmet (Kap. 2), in dem verschiedene Verfahren diskutiert werden; dabei kommt es m.E. nicht so sehr darauf an, welche Methode ein TR *wirklich* benutzt, sondern wie man dieses Problem grundsätzlich (auch mit elementaren Mitteln) lösen kann und welche numerischen Probleme dabei auftauchen. Jedoch sind nicht nur die „modernen" Verfahren von Interesse, denn auch in der Antike gab es die numerische Mathematik, und ein historischer Rückblick kann reizvolle Kontraste eröffnen. Beispielsweise berechnete Ptolemäus mit geometrischen Mitteln seine „Sehnentafeln", Vorläufer der trigonometrischen Tabellen, die für seine astronomischen Berechnungen eminent wichtig waren. (An dieser Stelle ist vielleicht auch erwähnenswert, dass das heute noch gebräuchliche Verfahren zur Quadratwurzel-Berechnung uralt ist!)

Das einführende Kapitel 0 ist der *Berechnung von* π gewidmet; in einem Überblick von Archimedes bis heute werden antike und moderne Verfahren unter numerischen Aspekten betrachtet. Zwar ist die π-Berechnung nicht unbedingt ein zentrales numerisches Problem, sie weckt aber immer wieder allgemeines Interesse, und man kann in diesem „Mikrokosmos" viele typische Fragen entwickeln. Dieses Kapitel ist eher zum Lesen gedacht als zum systematischen Durcharbeiten; zahlreiche Details werden später an geeigneter Stelle aufgegriffen.

Kapitel 1 enthält einige grundsätzliche Überlegungen zur Genauigkeit von Zahlenangaben in realen Situationen, sowie grundlegende Begriffe zu Fehlermaßen und Fehlertypen; weiter wird die Fehlerfortpflanzung untersucht. Ein wichtiges Thema ist das Lösen nichtlinearer Gleichungen (Kapitel 3); hier wird insbesondere die Fixpunkt-Iterationsmethode behandelt, und zwar nicht nur wegen ihrer Nützlichkeit, sondern auch weil sie Anlass zu zahlreichen Experimenten mit reellen Zahlenfolgen bietet. Zum Thema *Numerische Integration* (Kapitel 4) werden Rechteck- und Trapezsummen untersucht, wobei man aufgrund ihrer Fehleranalyse zu verschiedenen Verbesserungen geführt wird. Kapitel 5 ist den *Linearen Gleichungssystemen* gewidmet, die zwar algebraisch relativ unkompliziert sind, aber doch ihre numerischen Tücken haben.

Es gibt sicher noch weitere interessante Themen, auch in diesem elementaren Kontext, etwa Differentialgleichungen oder Interpolation. Ich habe jedoch keine Vollständigkeit im Sinne einer umfassenden Einführung in die Numerische Mathematik angestrebt, wie man sie in der einschlägigen Literatur findet (diese setzen in aller Regel mehr mathematische Kenntnisse voraus).

Der elementare Charakter der im vorliegenden Buch behandelten Numerik zeigt sich auch und besonders in dem Verhältnis von Theorie und Beispielen. Ich denke, dass sich das eigentliche Verständnis für die Probleme und Verfahren erst mit der Analyse von typischen Beispielen entwickelt; somit ist die Interpretation von Tabellen und Grafiken eine höchst wichtige Aktivität. Die Beispiele sind nicht nur illustrierendes Beiwerk für die Theorie, sondern geradezu eine notwendige Bedingung für einen aktiven und forschenden Umgang mit der Materie. In diesem Sinne sind auch die Aufgaben (mit ausführlichen Lösungen) als integraler Bestandteil des Textes zu verstehen; der Lösungsteil enthält z.T. Kommentare zu den Aufgaben und weitere Anregungen.

Zur Erstellung von Tabellen und Grafiken wird ausgiebig von einem *Tabellenkalkulationsprogramm* Gebrauch gemacht, denn viele der hier diskutierten Verfahren sind damit einfach zu realisieren, und man kommt schnell zu aussagekräftigen Daten. Deswegen sind Grundkenntnisse über derartige Software sehr empfehlenswert (im Anhang gibt es eine kurzgefasste Gebrauchsanweisung für das hier benutzte Programm Microsoft Excel). Selbstverständlich braucht man daneben auch einen Taschenrechner, am besten einen grafischen TR (TI-85 o.ä.). Weiterhin werden manche Algorithmen auch als BASIC-Prozeduren formuliert, daher sollte man BASIC-Programme zumindest *lesen* können. Außerdem wurde für Funktionsgraphen und geometrische Zeichnungen noch ein Computer-Algebra-System (Mathematica) sowie dynamische Geometrie-Software (The Geometer's Sketchpad) verwendet; diese Programme sind jedoch für das Verständnis des Textes nicht unbedingt erforderlich. Funktionsgraphen zu zeichnen ist zwar notwendig, aber dazu reicht auch ein grafischer Taschenrechner oder andere Software.

Die mathematischen Voraussetzungen umfassen im wesentlichen elementare Analysis und lineare Algebra (mindestens im Umfang eines Sek.II-Leistungskurses) sowie einige Kenntnisse über Elementargeometrie. Dabei steht die Analysis mit Absicht an erster Stelle; einige der behandelten Themen könnte man durchaus als Interpretation der Analysis unter numerischen Aspekten ansehen. In diesem Sinne eignen sich manche Kapitel auch als ergänzendes Material zu einem Analysis-Kurs.

Zum Schluss möchte ich all denen herzlich danken, die mich bei der Arbeit an diesem Buch unterstützt haben, vor allem E. Ch. Wittmann und J. Blankenagel für die Durchsicht des Textes und für viele kritische Anmerkungen und nützliche Anregungen.

Dortmund, im Oktober 1998

Berthold Schuppar