1 Grundlagen und Voraussetzungen

In diesem Kapitel geht es darum, eine gemeinsame Kommunikationsbasis für den folgenden Text zu schaffen. Wer schon ein wenig mit mathematischen Bezeichnungen und Methoden vertraut ist, kann das Kapitel vermutlich ohne Probleme überspringen. Vielleicht lohnt sich aber doch ein kurzer Blick in die Inhalte, um vorhandenes Wissen aufzufrischen oder zu systematisieren. Geklärt werden Basiskonzepte wie der Mengenbegriff, aber auch die wichtigsten Verknüpfungen von Mengen sowie die entsprechenden Notationen. Darüber hinaus werden Grundlagen des mathematischen Beweisens und logischen Schließens behandelt, die man implzit oft korrekt verwendet, sich aber durchaus auch einmal explizit klar machen sollte.

Kommunikation über Mathematik

> *Die erste Regel, an die man sich in der Mathematik halten muss, ist, exakt zu sein. Die zweite Regel ist, klar und deutlich zu sein und nach Möglichkeit einfach.*
>
> Lazare N. M. Carnot

Wenn man sich mit Mathematik beschäftigen möchte, kann man ein Buch, ein Skript oder eine Internetseite zur Hand nehmen, sich einen guten Lehrer suchen oder mit anderen Lernenden über Mathematik reden. In jedem Fall kommuniziert man (direkt oder indirekt) mit anderen Personen, sei es mit dem Autor des Buches, sei es mit einem Lehrer, sei es mit einer Kommilitonin. Es ist also notwendig, sich auf gemeinsame Grundlagen zu einigen, etwa auf Redeweisen und Schreibweisen. Nur so kann man sicher sein, dass alle Beteiligten auch tatsächlich über die gleichen Dinge reden. Im Prinzip gilt das natürlich für alle wissenschaftlichen Disziplinen, aber ganz besonders gilt es für die Mathematik. Glücklicherweise ist hier der Wille zu einheitlichen Darstellungen im Vergleich zu anderen Fächern auch besonders groß. Viele der grundlegenden Begriffe, Benennungen und Verfahren sind sogar in einem internationalen Kontext geläufig und werden insgesamt recht einheitlich verwendet.

Dieses erste Kapitel soll eine gemeinsame Basis für die Beschäftigung mit der Zahlentheorie schaffen. Dabei werden die wesentlichen Grundlagen für den Umgang mit Mengen sowie elementare logische Begriffe dargestellt. Verschiedene Konventionen für die (schriftliche) Kommunikation in der Mathematik kommen hinzu. Schreibweisen sind dabei immer als Vereinbarungen aufzufassen, die im Rahmen dieses Buches (und meist auch darüber hinaus) Gültigkeit haben. Manche wird man bereits aus der Schule kennen, manche sind vielleicht noch gänzlich unbekannt, manchen ist man vermutlich in anderer Form schon einmal begegnet. Gerade in Bezug auf den letzten Fall sei angemerkt, dass auch in der Mathematik nicht *alles* ein für alle Mal und in genau einer Art und Weise festgelegt sein muss. Wichtig ist nur, dass man sich über die verwendeten Vereinbarungen, Bedingungen, Einschränkungen, also kurz über die jeweiligen Spezifika in einem Kontext einig ist. Die hier zusammengestellten Grundlagen sind entsprechend nicht mehr und nicht weniger als ein Gerüst, auf dem die Kommunikation über Mathematik basieren wird. Um miteinander zu sprechen, muss die verwendete Sprache beiden Gesprächspartnern bekannt sein.

1.1

1.1 Mengen

1.1.1 Mengen und ihre Elemente

Der Begriff der *Menge* ist ein mathematischer Grundbegriff, auf dem vieles aufbaut, der aber als Grundbegriff innerhalb der so genannten „naiven“ Mengenlehre (deshalb heißt sie so) nicht streng definiert wird. Dennoch muss man sich darüber klar werden, was mit einer Menge gemeint ist. Die folgende Beschreibung des Begriffs geht auf Georg Cantor (1845–1918), einen der Begründer der Mengenlehre, zurück. *„Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten, wohl unterschiedenen Objekten unserer Anschauung und unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen.“* Mengen bestehen also aus (voneinander verschiedenen) *Elementen*. Es gibt außerdem eine Menge, die kein Element enthält und als *leere Menge* bezeichnet wird. Eine Menge wird in der Regel mit einem großen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Für die leere Menge sind die speziellen Notationen $\{\}$ oder $\emptyset$ üblich. Man schreibt $x \in M$, um zu verdeutlichen, dass ein bestimmtes Element x zu einer Menge M gehört. Schreibt man $x \notin M$, so heißt dies hingegen, dass x kein Element der Menge M ist. Wenn also $M = \{1, 2, 3\}$ ist, dann gilt $1 \in M$, $2 \in M$ und $3 \in M$, aber beispielsweise $7 \notin M$. Als Sprechweisen sind „2 ist ein Element der Menge M“ bzw. „7 ist kein Element der Menge M“ oder kürzer „2 ist aus M“ bzw. „7 ist nicht aus M“ üblich. Die Elemente einer Menge müssen selbstverständlich nicht unbedingt Zahlen sein. Mengen können genauso aus Buchstaben oder aber auch aus (wohl unterschiedenen und das heißt unterschiedlichen) anderen Dingen wie Legosteinen (rote, grüne, blaue) oder Äpfeln (Cox Orange, Granny Smith) oder Personen (Anna, Bert, Carola, Doris, Elisabeth) beste-

hen. Auch $\{\emptyset\}$ ist eine Menge. Sie enthält als einziges Element die leere Menge und ist damit insbesondere *nicht* leer.
Eine Menge gibt man häufig durch die (im Beispiel oben bereits verwendete) Aufzählung ihrer Elemente an und schreibt $M = \{a, b, c\}$, das heißt, man setzt die Elemente der Menge in geschweifte Klammern. Außer über diese *aufzählende Mengenschreibweise* kann man Mengen auch durch *Eigenschaften ihrer Elemente* beschreiben. So bezeichnet $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 6\}$ die Menge aller natürlichen Zahlen zwischen 1 und 6. Vor dem Strich „|" steht eine allgemeine Bezeichnung der Elemente, nach dem Strich „|" steht die Eigenschaft, durch die sie zusammengefasst sind. Dabei bedeutet $x \in \mathbb{N}$, dass die Elemente x aus der Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ der natürlichen Zahlen sind.
Eine solche spezielle Bezeichnung gibt es nicht nur für die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Man schreibt $\mathbb{Z}$ für die Menge der ganzen Zahlen, $\mathbb{Q}$ für die Menge der rationalen Zahlen und $\mathbb{R}$ für die Menge der reellen Zahlen. Im Moment sollen diese Zahlenmengen und das Rechnen mit ihnen als bekannt aus dem Schulunterricht vorausgesetzt werden. In den folgenden Kapiteln werden diese Zahlen dann fundierter behandelt.
Noch ein weiterer Begriff ist in diesem Zusammenhang manchmal nützlich, nämlich der Begriff des kartesischen Produkts von Mengen. Wenn zwei nicht leere Mengen A und B gegeben sind und $a \in A$ und $b \in B$ ist, so heißt (a, b) ein geordnetes Paar. Die Menge aller dieser Paare wird mit $A \times B$ bezeichnet und *kartesisches Produkt* der beiden Mengen genannt. Das kartesische Produkt ist wiederum eine Menge. Man kann schreiben $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$. Es ist zu beachten, dass $(a, b) \neq (b, a)$ ist, es sei denn, es ist $a = b$.

Beispiel 1.1.1 **1.1.1**

(i) Sei $A = \{1, 2\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$. Dann ist das kartesische Produkt der beiden Mengen $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$. Offensichtlich hat diese Menge $2 \cdot 3 = 6$ Elemente und besteht aus allen möglichen *geordneten* Paaren von Elementen aus A und B, das heißt, das erste Element ist jeweils aus A und das zweite Element ist aus B.

(ii) Das kartesische Produkt mutet zwar wie eine sehr formale Begriffsbildung an, es gibt aber durchaus Beispiele dafür, die nicht aus der Mathematik kommen. Sei etwa $M_1 = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ und $M_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Dann werden durch das kartesische Produkt $M_1 \times M_2$ die 64 Felder eines Schachbretts beschrieben.
Ganz ähnlich kodiert man mit den zehn Buchstaben $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K$ und den Zahlen von 1 bis 10 die Felder beim in der Schule so beliebten „Schiffeversenken".

(iii) Ein wichtiges (und wohlbekanntes) Beispiel für ein kartesisches Produkt ist schließlich die Menge $\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$, die man als Menge aller Punkte der Ebene in einem kartesischen Koordinatensystem auffassen kann.

Ein kartesisches Produkt kann man natürlich auch für mehr als zwei Mengen definieren. Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nicht leere Mengen, dann ist ihr kartesisches Produkt durch $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \textit{ mit } i = 1, 2, \ldots, n\}$ definiert. Man bezeichnet die Elemente $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ als *n-Tupel* von Elementen aus den A_i, wobei es wieder entscheidend ist, welches Element auf welchem Platz steht. Für $n = 3$ und $A_i = \mathbb{R}$ gibt es auch hier ein Beispiel, das schon aus dem Schulunterricht bekannt ist. Es ist $\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z)|x, y, z \in \mathbb{R}\}$ der dreidimensionale euklidische Raum, der so genannte Anschauungsraum.

1.1.2 Mengen und ihre Mächtigkeit

Mengen können endlich viele Elemente haben wie beispielsweise die Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ der ersten sechs natürlichen Zahlen. Mengen können auch unendlich viele Elemente haben wie etwa die Menge $\mathbb{N}$ aller natürlichen Zahlen. Die Anzahl der Elemente einer Menge M wird als ihre *Mächtigkeit* bezeichnet, und man schreibt dafür $|M|$. Die Menge $M_1 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ hat die Mächtigkeit $|M_1| = 6$, und die Menge $M_2 = \{a, b, c\}$ hat die Mächtigkeit $|M_2| = 3$. Die Mächtigkeit der leeren Menge ist 0, denn sie hat keine Elemente. Es ist offensichtlich, dass die Mächtigkeit einer endlichen Menge eine natürliche Zahl bzw. 0 (und das ist nach einer üblichen Vereinbarung *keine* natürliche Zahl) im Fall der leeren Menge ist. Wenn zwei endliche Mengen die gleiche Anzahl von Elementen haben, dann nennt man sie gleichmächtig. So sind die Mengen $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{a, b, c, d\}$ und $\{rot, gelb, grn, blau\}$ gleichmächtig, denn alle haben jeweils 4 Elemente.

Schwieriger wird es mit dem Begriff der Mächtigkeit (und erst recht mit dem Begriff der Gleichmächtigkeit) bei unendlichen Mengen. Wie viele natürliche Zahlen gibt es? Wie viele rationale Zahlen gibt es? Spontan würde man vermutlich in beiden Fällen mit „unendlich“ antworten. Bereits in Kapitel 2 wird sich zeigen, dass Spontaneität hier weniger angebracht ist. Der Umgang mit unendlichen Mengen ist nicht ganz ohne Probleme und erfordert eine Vielzahl recht formaler Überlegungen. Trotzdem darf man $|M| = \infty$ für die Mächtigkeit einer unendlichen Menge M schreiben. Dabei bezeichnet „∞“ nichts anderes als ein Symbol für „unendlich“ im Sinne von „nicht endlich“. Man darf allerdings nicht mit einem solchen Symbol rechnen und noch nicht einmal davon ausgehen, dass zwei unendliche Mengen so etwas wie eine gleiche Anzahl von Elementen haben. Vom mathematischen Standpunkt aus gibt es beispielsweise genauso viele natürliche wie rationale Zahlen (!), aber viel mehr reelle als rationale Zahlen (das wird erst später ausführlich behandelt).

Georg Cantor und die Idee der unendlichen Mengen

Georg Cantor (1845–1918), Professor an der Universität Halle, hat sich als einer der ersten Mathematiker intensiv mit dem Problem der Unendlichkeit von Mengen auseinander gesetzt. Die Grundlage seiner Überlegungen waren eineindeutige oder bijektive Zuordnungen (die Details werden in Definition 6.3.2 geklärt) zwischen den Elementen von Mengen. Eine solche eineindeutige Zuordnung ist bei endlichen Mengen einfach. Soll etwa eine Schulklasse mit 27 Kindern mit Mathematikbüchern versorgt werden, so braucht man 27 Bücher, 26 sind zu wenig (ein Kind bekommt kein Buch) und 28 sind zu viel (ein Buch bleibt übrig). Was man sich ohnehin intuitiv denken würde und was die Mathematik als Problemlösung vorschlägt stimmen perfekt überein.
Komplizierter wird es leider bei nicht endlichen Mengen, bei denen man sich auf die Intuition nicht mehr verlassen darf. Was sollte es auch heißen, dass unendlich viele Kinder mit unendlich vielen Büchern versorgt werden? Können dabei überhaupt Bücher übrig oder Kinder unversorgt mit Literatur bleiben? An dieser Stelle setzen die Überlegungen von Cantor ein. Konkret verglich er die Mächtigkeit der Menge der rationalen Zahlen mit der Mächtigkeit der Menge der algebraischen Zahlen. Die algebraischen Zahlen sind (genauso wie die rationalen Zahlen) eine Teilmenge der reellen Zahlen: Eine reelle Zahl heißt algebraisch, falls sie Lösung einer Gleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ (mit $a_i \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}_0$) ist. So ist beispielsweise die Zahl $\sqrt{2}$ eine algebraische Zahl, denn sie ist Lösung der Gleichung $x^2 - 2 = 0$. Aber auch alle rationalen Zahlen sind algebraisch, denn die Bruchzahl $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \neq 0$ ist Lösung der Gleichung $b \cdot x - a = 0$. Cantor konnte nun zeigen, dass es eine solche eineindeutige Zuordnung (und was das genau ist, soll erst in Kapitel 6 geklärt werden) zwischen der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen und der Menge der algebraischen Zahlen gibt.
An dieser Stelle scheint zunächst einmal nichts mehr in Ordnung zu sein. Es soll also genauso viele rationale Zahlen wie algebraische Zahlen geben? Aber einerseits sind alle rationalen Zahlen algebraisch und andererseits gibt es algebraische Zahlen, die nicht rational sind wie zum Beispiel $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$ oder $\sqrt[3]{99}$. Von einem naiven Verständnis her müsste es dann eigentlich „mehr“ algebraische als rationale Zahlen geben. In Kapitel 11 wird ein Weg beschrieben, wie man das Problem auf mathematisch ehrliche Weise in den Griff bekommt und die Gleichmächtigkeit der beiden Mengen zeigt. Dabei wird eine Methode verwendet, die auf Georg Cantor zurückgeht, das *Cantor'sche Diagonalverfahren.* Einen ersten Ansatz zur Erklärung wird es aber schon in Kapitel 2 auf Seite 35 geben („Hilberts Hotel“).

Es soll nicht unerwähnt bleiben, dass die Arbeiten von Cantor wegen des ungewohnten methodischen Ansatzes von manchen Fachkollegen zunächst heftig kritisiert wurden. Auch die Mathematik schwebt nicht über den Wolken, sondern entsteht wie jede andere Wissenschaft im Diskurs zwischen Menschen. Viele der heute fast selbstverständlichen Erkenntnisse waren historisch gesehen oft das Ende eines langen und mühsamen Wegs, der nicht immer frei vom Einfluss menschlicher Schwächen verlief. Fachliche Irrtümer gab es dabei genauso wie Neid, Anfeindungen oder Streit zwischen Kollegen.

1.1.3 Gleichheit von Mengen und Teilmengen

Wenn zwei Mengen A und B gegeben sind, dann liegt es nahe, sie in Bezug auf ihre Elemente miteinander zu vergleichen. Im einfachsten Fall haben die beiden Mengen alle Elemente gemeinsam. Das gilt etwa für die Mengen $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 6\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Man schreibt $A = B$ und sagt, dass die Mengen *gleich* sind. Entsprechend bedeutet $A \neq B$ (wohl selbstverständlich), dass A und B verschieden sind, sich also mindestens in einem Element unterscheiden. Allgemein sind zwei Mengen A und B gleich, wenn mit $x \in A$ auch $x \in B$ gilt und aus $x \in B$ stets $x \in A$ folgt.

Intuitiv würde man sich unter der Gleichheit von Mengen vermutlich vorstellen, dass beide Mengen dieselben Elemente enthalten. Nichts anderes sagt die Definition: Immer wenn ein Element in der einen Menge ist, dann findet man es auch in der anderen Menge und umgekehrt. Wenn man es gerne formal aufschreiben möchte, kann man diesen Zusammenhang in der Form

$$A = B \Longleftrightarrow (x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$$

darstellen. Das Zeichen „$\Longleftrightarrow$“ (und weiter unten „$\Longrightarrow$“) wird auf Seite 13 erklärt. Es sollte Leserinnen und Leser, die es noch nicht kennen, an dieser Stelle nicht verwirren. Oftmals ist es gerade nicht die formale Schreibweise, die zum mathematischen Verständnis beiträgt. Und im Moment geht es vor allem darum, Verständnis aufzubauen.

Falls für jedes $x \in A$ auch $x \in B$ gilt, über die Umkehrung dieses Schlusses aber nichts ausgesagt ist, so heißt A eine *Teilmenge* von B. Man schreibt $A \subset B$ und definiert

$$A \subset B \Longleftrightarrow (x \in A \Longrightarrow x \in B).$$

Auch hier entspricht die Definition dem, was man sich intuitiv vorstellen würde: Jedes Element von A ist gleichzeitig ein Element von B, aber B kann gegebenenfalls weitere Elemente haben. Beispielsweise gilt für die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ die Beziehung $A \subset B$. Für jede Menge

A gilt $A \subset A$ und $\emptyset \subset A$. Damit ist jede Menge eine Teilmenge von sich selbst und die leere Menge eine Teilmenge jeder beliebigen Menge.

Die leere Menge

Die leere Menge ist schon auf den ersten Blick nicht ganz ohne merkwürdige Besonderheiten. Das Problem liegt darin, dass man sie mit „Nichts“ verbindet, was wenig Ziel führend ist. Dabei gibt es durchaus gute Beispiele für die leere Menge, von denen sich ein sehr treffendes Beispiel in vielen Schulbüchern für das erste Schuljahr findet. Hier wird mit der Schüttelbox gearbeitet, einem kleinen Kästchen mit zwei Fächern und zumeist 10 Kugeln, die sich durch Schütteln zufällig in die beiden Fächer verteilen lassen. Dabei kann es vorkommen, dass in einem Fach alle Kugeln und im anderen Fach keine Kugeln sind. Schon hat man die leere Menge einwandfrei dargestellt und es ist offensichtlich, dass sie keine Elemente und damit die Mächtigkeit 0 hat.
Seltsam erscheint es manchmal auch, wie mit der leeren Menge im mathematischen Kontext umgegangen wird. So wird man vielleicht nicht sofort als sinnvoll anerkennen, dass die leere Menge in jeder anderen Menge enthalten sein soll. Zum Verständnis kann es hier durchaus beitragen, wenn man sich auf einen ganz formalen Standpunkt begibt. Die Aussage $\emptyset \subset A$ bedeutet ja, dass mit $x \in \emptyset$ auch $x \in A$ gilt. Das ist nun aber selbstverständlich, weil es nichts nachzuprüfen gibt. Schließlich existiert kein $x \in \emptyset$, und man kann keine Aussagen über etwas nicht Vorhandenes machen. Man kann es auch so einsehen: Um die Behauptung $\emptyset \subset A$ zu widerlegen, müsste ein Element der leeren Menge aufgezeigt werden, das nicht in A liegt. Nun hat aber die leere Menge keine Elemente, also gibt es dafür gar keinen möglichen Kandidaten.

Üblich sind die Schreibweisen $A \subseteq B$, falls man betonen möchte, dass A und B auch gleich sein können (was in der Definition von $A \subset B$ vernünftigerweise nicht ausgeschlossen wird), und $A \underset{\neq}{\subseteq} B$, falls A und B keinesfalls gleich sein können oder dürfen. Die Bedeutung der Pfeile in den Definitionen wird (wie bereits angekündigt) im nächsten Abschnitt genauer geklärt.

1.1.4 Verknüpfungen von Mengen

Für die Mengen A und B definiert man ihren *Durchschnitt von Mengen* $A \cap B$ als Menge der Elemente, die A und B gemeinsam haben, die also sowohl in A als auch in B liegen. Es ist entsprechend durch

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \textit{ und } x \in B\}$$

dieser Durchschnitt (gesprochen „A geschnitten B“) definiert. Seien beispielsweise $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{3, 4, 5\}$ gegeben, dann ist $A \cap B = \{3, 4\}$.

Falls $A \cap B = \emptyset$ für die Mengen A und B gilt, nennt man A und B *disjunkt*. So sind die Mengen $B = \{3, 4, 5\}$ und $C = \{1, 2\}$ disjunkt, das heißt, sie haben keine gemeinsamen Elemente und $B \cap C = \emptyset$.
Der Durchschnitt von Mengen hat ganz praktische, alltägliche Bezüge. Wenn etwa der Zeuge eines Raubüberfalls einen blauen Lancia mit Hamburger Kennzeichen gesehen haben will, dann wird die entsprechende Datenbank nach Fahrzeugen mit den Merkmalen „blau", „Lancia" und „Kennzeichen HH" durchsucht. Es wird somit der Durchschnitt von drei Teilmengen der Menge aller Personenkraftwagen gebildet, nämlich der Menge aller blauen Personenkraftwagen, aller Lancias und aller Personenkraftwagen mit Hamburger Kennzeichen.
Die *Vereinigung* $A \cup B$ ist die Menge aller Elemente, die wenigstens in einer der beiden Mengen, also entweder in A oder in B (oder in beiden Mengen gleichzeitig) liegen. Betrachtet man noch einmal $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{3, 4, 5\}$, dann ist $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Die Definition der Vereinigung ist durch

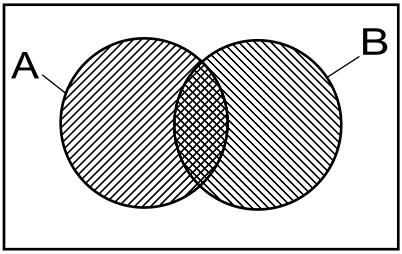
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \textit{ oder } x \in B\}$$

gegeben (gesprochen „A vereinigt B"). Dabei ist zu beachten, dass *oder* hier nicht im ausschließenden Sinn gebraucht wird (also nicht im Sinne eines „entweder – oder", wie man es umgangssprachlich meistens verwendet).
Auch die Vereinigung von Mengen kann man sich leicht mit Hilfe eines Alltagsbeispiels veranschaulichen. Ist sich der oben genannte Zeuge nicht sicher, ob das Fahrzeug nun blau oder schwarz gewesen ist, dann kommt man zur Vereinigung von Mengen, nämlich der aller blauen Lancias mit Hamburger Kennzeichen und der aller schwarzen Lancias mit Hamburger Kennzeichen.
Für *und* bzw. *oder* findet man in der mathematischen Literatur häufig formale Kürzel. Das mathematische *und* wird dabei symbolisch in der Form $\wedge$, das mathematische *oder* in der Form $\vee$ geschrieben. Entsprechend wird die Definition des Durchschnitts dann als $A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$ und die Definition der Vereinigung als $A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$ angegeben. Inhaltlich macht das selbstverständlich keinen Unterschied.
Die Wörter *und* bzw. *oder* sind (wie bereits angemerkt) in den Definitionen im mathematischen und nicht im umgangssprachlichen Sinne benutzt worden. Die Verbindung zweier Aussagen durch *und* bedeutet, dass die gesamte Aussage nur dann wahr ist, wenn beide Teilaussagen wahr sind. Im konkreten Beispiel der Definition des Durchschnitts müssen also beide Bedingungen für das Element x erfüllt sein. Werden zwei Aussagen durch *oder* verbunden, dann ist die gesamte Aussage wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist. Bei der Definition der Vereinigung muss entsprechend mindestens eine der beiden angegebenen Bedingungen für das Element x erfüllt sein.

Noch einmal: Das mathematische *oder* unterscheidet sich von der Benutzung des Worts *oder* in der Umgangssprache. Wenn im Flugzeug die Frage nach „chicken or beef“ gestellt wird, dann ist damit „*entweder* Hühnchen *oder* Rindfleisch“ gemeint, aber sicher nicht an das Servieren von beiden Gerichten zur gleichen Zeit gedacht.
Als eine weitere Mengenverknüpfung soll an dieser Stelle die *Differenzmenge* $A \setminus B$ definiert werden. In der Differenzmenge $A \setminus B$ zweier Mengen A und B sind alle diejenigen Elemente zusammengefasst, die in A, aber nicht in B liegen. Entsprechend kann man

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \; und \; x \notin B\}$$

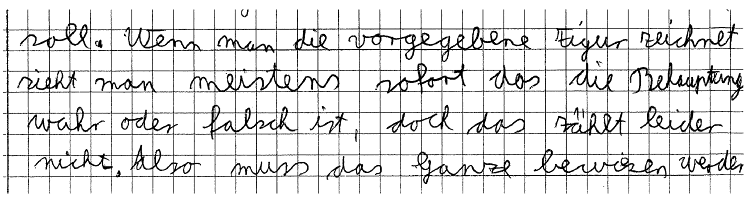
definieren (gesprochen „A ohne B“). Sind also beispielsweise die Mengen $A = \{1,2,3,4\}$ und $B = \{3,4,5\}$ gegeben, so ist $A \setminus B = \{1,2\}$. Man kann an diesem Beispiel auch erkennen, dass in der Regel $A \setminus B \neq B \setminus A$ gilt, die Verknüpfung also nicht kommutativ ist. Im gegebenen Beispiel ist nämlich $B \setminus A = \{5\} \neq \{1,2\} = A \setminus B$.
Auch die Bildung der Differenzmenge zweier Mengen ist eine aus dem Alltag bekannte Sache. Hat der Zeuge des Raubüberfalls einen Lancia mit Hamburger Kennzeichen erkannt, der auf keinen Fall rot ist, dann wird die Differenzmenge aus allen Lancias mit Hamburger Kennzeichen und allen roten Fahrzeugen gebildet.
Als Sprechweisen nimmt man „A geschnitten B“ für den Durchschnitt, „A vereinigt B“ für die Vereinigung und (wie ebenfalls bereits erwähnt) „A ohne B“ für die Differenzmenge der Mengen A und B.
Für die Darstellung von Mengenverknüpfungen verwendet man häufig das Venn-Diagramm, dessen Name an den Logiker John Venn (1834–1923) erinnert. Ein Venn-Diagramm für zwei Mengen A und B zeigt die folgende Abbildung.



Durch den Kasten (der zwar nicht zwingend ein Kasten sein muss, aber häufig dafür benutzt wird) stellt man die so genannte *Grundmenge* (also zum Beispiel die Zahlen, Buchstaben oder Automarken) dar, von der A und B Teilmengen sind. Ganz offensichtlich ist, was in dieser Abbildung der Durchschnitt und was die Vereinigung der beiden Mengen A und B sein soll. Auch $A \setminus B$ wird man unschwer identifizieren können. Venn-Diagramme eignen sich sehr gut für schematische Darstellungen. Sie sind auch praktisch, wenn man Aussagen über Mengen zu prüfen hat. So kann man etwa zeichnerisch klären, dass Gleichungen wie $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ oder $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ gelten. Man vergleiche dazu auch Übungsaufgabe 4 im Anschluss an dieses Kapitel.

1.2

1.2 Grundbegriffe des logischen Schließens


soll. Wenn man die vorgegebene Figur zeichnet
sieht man meistens sofort das die Behauptung
wahr oder falsch ist, doch das fählt leider
nicht, Also muss das Ganze bewiesen werden

Beweisen aus der Sicht von Lukas, 8. Klasse eines Gymnasiums

Im vorangegangenen Abschnitt wurde der Begriff der *Aussage* benutzt. Auch dies ist ein Begriff, der in der Mathematik eine wichtige Rolle spielt. Der Begriff ist wiederum ein *Grundbegriff*, über dessen Bedeutung man sich im Klaren (und einig) sein sollte, der aber nicht in einem formalen Sinn definiert wird. Würde man den Begriff nämlich definieren, so bräuchte man andere Begriffe und Grundbegriffe, mit deren Hilfe man ihn beschreiben könnte. Irgendwo muss aber ein Anfang sein, das heißt, es muss Begriffe geben, von denen man ausgehen kann und muss, ohne sie zu hinterfragen. Der Begriff der *Aussage* ist ein solcher nicht weiter zu hinterfragender Grundbegiff.

Grundlegend an Aussagen ist, dass sie entweder wahr oder falsch sein können. „Rom liegt am Tiber“ ist eine (wahre) Aussage und „Paris ist die Hauptstadt der Schweiz“ ist eine (allerdings falsche) Aussage. Genauso ist „3 ist eine ganze Zahl“ eine (wahre) Aussage und „$\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl“ eine (falsche) Aussage. Weitere mathematische Aussagen sind „$3 \leq 5$“ und „$3 \cdot 5 = 17$“, wobei der Wahrheitsgehalt wohl leicht festzustellen ist. Auch der Satz „Jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, kann als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden“ (die so genannte *Goldbach'sche Vermutung*) ist eine Aussage, von der allerdings nicht bekannt ist, ob sie wahr oder falsch ist. Darauf soll an späterer Stelle noch einmal eingegangen werden. Jeder mathematische Satz (zum Beispiel der *Satz des Pythagoras* oder der *Höhensatz für rechtwinklige Dreiecke*) ist eine mathematische Aussage, von der man weiß, dass sie wahr ist (denn sonst würde man sie nicht als einen Satz, sondern höchstens als eine Vermutung bezeichnen).

Es ist sicher unmittelbar einsichtig, dass man sich zumeist nicht nur für die einzelnen Aussagen interessiert, sondern dafür, in welcher Art und Weise mathematische Aussagen zusammenhängen und welche Aussagen sich aus anderen mathematischen Aussagen ableiten lassen. Das ist im Alltag nicht anders. Wenn man weiß, dass der Täter eines Raubüberfalls in einem blauen Lancia geflüchtet ist, und man außerdem weiß, dass Frau P. einen blauen Lancia fährt und zu Raubüberfällen neigt, so ist Frau P. tatverdächtig. Hätte man sie allerdings zur Tatzeit in der Mensa gesehen, so würde man schließen, dass Frau P. wohl nicht als Täterin in Frage kommt. Kurz und gut, man bildet aus Fakten eine Schlusskette, die gegebenenfalls durch neue Fakten korrigiert wird. Sie sollte aber in sich konsistent sein und (nicht nur im Fall der Mathematik) möglichst auf korrekten Grundannahmen und bewiesenen Fakten beruhen.

1.2.1 Implikationen und die Äquivalenz von Aussagen

Man betrachte als Beispiel die folgende Aussage: Wenn a und b gerade natürliche Zahlen sind, dann ist ihr Produkt $a \cdot b$ durch 4 teilbar. Die Aussage besteht aus einer Bedingung oder Voraussetzung oder Prämisse („a und b sind gerade natürliche Zahlen") und einer Behauptung oder Folgerung („$a \cdot b$ ist durch 4 teilbar"). Formal und kurz gefasst würde man $a, b \in \mathbb{N}$ voraussetzen und diese Aussage als

$$2|a \wedge\ 2|b \implies 4|a \cdot b$$

schreiben. Das Zeichen „$\Longrightarrow$" steht für „daraus folgt", man kann auch „impliziert" sagen. Die gesamte Aussage heißt eine *Implikation*, bei der aus einer Voraussetzung (Bedingung, Prämisse) eine Schlussfolgerung gezogen wird. Im Fall der gerade aufgeschriebenen Aussage ist diese Implikation korrekt (warum das so ist, wird in Übungsaufgabe 8 im Anschluss an dieses Kapitel geklärt).

Es gibt Implikationen, bei denen auch die Umkehrung eine wahre Aussage ist. Dies ist etwa im folgenden Beispiel erfüllt: „Sind x, y reelle Zahlen und gilt $x \cdot y = 0$, so ist $x = 0$ oder $y = 0$." Man überlegt sich leicht, dass hier die Implikation und ihre Umkehrung gelten. Sind nämlich x und y reelle Zahlen, von denen mindestens eine gleich 0 ist, dann ist auch das Produkt der beiden Zahlen gleich 0. Man kann entsprechend

$$x \cdot y = 0 \iff x = 0 \text{ oder } y = 0$$

für $x, y \in \mathbb{R}$ schreiben. Das Zeichen „$\Longleftrightarrow$" steht für „genau dann, wenn", das heißt, die beiden Aussagen, die der Doppelpfeil miteinander verbindet, sind *äquivalent*, und es kann jeweils eine aus der anderen gefolgert werden. Ein weiteres Beispiel zeigt die Übungsaufgabe 10 im Anschluss an dieses Kapitel.

1.2.2 Mathematische Logik und Alltagslogik

Implikationen bereiten manchmal Schwierigkeiten, weil man versucht, Regeln der Alltagslogik auch in mathematischen Zusammenhängen zu verwenden. So ist es im Alltag gar nicht so selten, dass in einer Argumentation die Voraussetzung und die Folgerung umgedreht werden. Man weiß etwa, dass die Straße nass ist, wenn es zuvor geregnet hat. Genauso weiß man umgekehrt, dass es nicht unbedingt geregnet haben muss, wenn die Straße nass ist. Es könnte auch die Straßenreinigung unterwegs gewesen sein. Wenn man allerdings morgens aus dem Fenster schaut und eine nasse Straße sieht, dann schließt man (vielleicht ganz richtig) auf Regen als Ursache. In die reale Schlussfolgerung werden nämlich intuitiv Aspekte wie ein düsterer Himmel oder nasse Blätter an den Bäumen einbezogen. Darüber hinaus sind viele Schlussfolgerungen des Alltags mit einer gewissen Fehlerquote behaftet, die dort bisweilen nicht weiter stört. Was macht es schon, wenn man den Regenschirm mitnimmt, obwohl es nicht regnen wird.

Auch für die Mathematik braucht man zwar ein gutes Quantum Intuition, sie darf aber nicht statt eines Beweises benutzt werden. Außerdem haben fehlerhafte Schlussfolgerungen in der Regel unerwünschte Konsequenzen (was selbstverständlich auch im Alltag zutreffen kann, man denke nur an Fehlurteile vor Gericht). Es ist also wesentlich, die Voraussetzungen einer mathematischen Aussage ganz genau zu bestimmen. Nur auf dieser Basis darf dann (logisch konsistent) argumentiert werden.

1.2.3 Einige (wenige) Regeln des mathematischen Beweisens und logischen Schließens

Mathematisches Argumentieren und Beweisen ist keine Hexerei, sondern es beruht auf klaren Regeln. Solche Schlussregeln sind ein Bereich, mit dem sich die mathematische Logik beschäftigt. Nun ist es zum Verständnis des Buchs nicht notwendig, einen tiefen Einblick in dieses Gebiet zu bekommen. Es ist aber nützlich, sich zumindest einige grundlegende Regeln zu vergegenwärtigen. Sie sollen im Folgenden formuliert werden. Dabei werden die vorgestellten Regeln nicht im Rahmen einer Theorie der Logik abgeleitet, sondern lediglich angegeben. Für eine exakte und breitere Darstellung sei auf spezielle Literatur wie etwa das Buch von Bauer und Wirsing [3] verwiesen.

Ausgangspunkt aller folgenden Betrachtungen sind mathematische Aussagen, die für den Rest des Kapitels mit P und Q bezeichnet werden. Mit $\neg P$ ist die *Negation* von P gemeint, und das ist die Aussage, die genau dann wahr ist,

wenn P falsch ist. Steht P etwa für die Aussage „$\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl“, dann steht $\neg P$ für die Aussage „$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl“. Logisch steckt dahinter das Prinip von ausgeschlossenen Dritten („tertium non datur“) nach dem entweder eine Aussage oder ihre Negation wahr ist, nicht aber beide wahr sein können.
Viele mathematische Beweise beruhen auf dem Prinzip der Deduktion. Man geht von einer oder mehreren Voraussetzungen aus und folgert direkt daraus weitere Aussagen. Die Voraussetzungen „Ludwig II. ist ein Mensch“ und „alle Menschen sind sterblich“ lassen die Folgerung „Ludwig II. ist sterblich“ zu. In gleicher Weise lässt sich aus den Voraussetzungen „alle geraden Zahlen sind durch 2 teilbar“ und „4 ist eine gerade Zahl“ folgern, dass 4 duch 2 teilbar ist. Man geht also von wahren Aussagen aus und schließt daraus auf eine weitere Aussage, die dann auch wahr ist. Ein solcher Schluss ist korrekt, das sagt einem sicherlich nicht nur die mathematische Logik, sondern auch der eigene gesunde Menschenverstand. Was passiert nun, wenn man von einer falschen Aussage ausgeht? Nun, dann ist Vorsicht geboten, denn aus einer solchen falschen Aussage kann man mit zulässigen Operationen sowohl richtige als auch falsche Aussagen ableiten. So folgt aus der Voraussetzung „$0 = 1$“ durch Multiplikation der Gleichung mit 0 die wahre Aussage „$0 = 0$“ und durch Addition von 1 auf beiden Seiten der Gleichung die falsche Aussage „$1 = 2$“. In beiden Fällen ist die Implikation korrekt, doch das natürlich eine ziemlich nutzlose Information. Über den Wahrheitsgehalt der hergeleiteten Aussage lässt sich nichts sagen, weil die Startaussage falsch ist.
Wem das zu abgehoben ist, der darf sich ruhig auf ein Alltagsbeispiel beziehen. Wie jeder weiß, sind Wale Säugetiere, sodass die Aussage „Wale sind Fische“ falsch ist. Die Aussagen „Fische leben im Wasser“ und „Fische haben Kiemen“ sind hingegen richtig. Nun kann man aus der falschen Aussage sowohl „Wale haben Kiemen“ (was falsch ist) als auch „Wale leben im Wasser“ (was richtig ist) folgern.

1.2.4 Implikationen und Beweisverfahren

> *In der Mathematik gibt es keine Autoritäten. Das einzige Argument für die Wahrheit ist der Beweis.*
>
> Kazimierz Urbanik

Zum Verständnis dieses Abschnitts soll ein Beispiel beitragen, in dem eine Implikation aus dem Alltag im Vordergrund steht. Konkret geht es um eine Aussage aus der Werbung, die gut geeignet ist, Besonderheiten des logischen Schließens herauszuarbeiten.

1.2.1 **Beispiel 1.2.1** Für die Zahnpasta *Zahngold* wird mit der Aussage geworben, dass sie zuverlässig die Zähne gesund erhält. Formal kann man das so schreiben:

$$\textit{MENSCH benutzt Zahngold} \implies \textit{MENSCH hat gesunde Zähne}$$

Offensichtlich kann dann ein Mensch, der keine gesunden Zähne hat, die Zahnpasta *Zahngold* nicht benutzt haben, das heißt auch die Implikation

$$\textit{MENSCH hat keine gesunden Zähne} \implies$$

$$\textit{MENSCH benutzt Zahngold nicht}$$

ist gültig und mit dem Versprechen des Herstellers offensichtlich zu vereinbaren. Es gibt also, wenn man den Werbespruch als volle Wahrheit akzeptiert, nur zwei Möglichkeiten: Entweder hat man (aus welchem Grund auch immer) gesunde Zähne oder aber man gehört zu den Menschen, die auf *Zahngold* verzichten. Formal heißt das dann

$$\textit{MENSCH benutzt kein Zahngold} \ \vee \ \textit{MENSCH hat gesunde Zähne.}$$

Man könnte den Zusammenhang auch noch einmal anders ausdrücken, wenn man sich überlegt, dass die Benutzung von Zahngold und schlechte Zähne sich ausschließen. Dies lässt sich als

$$\textit{NIE}\ (\textit{MENSCH benutzt Zahngold} \ \wedge \ \textit{MENSCH hat kranke Zähne})$$

einigermaßen formal beschreiben. Insbesondere darf man aus dem Werbespruch nicht schließen, dass ein Mensch mit gesunden Zähnen die Zahnpasta *Zahngold* benutzt. Vielleicht sind ja gute Gene oder eine andere wundervolle Zahnpasta dafür verantwortlich. Wenn man also nur weiß, dass eine Person gute Zähne hat, dann kann man daraus leider (zumindest aus der Sicht des Herstellers von *Zahngold*) nicht unbedingt etwas über die Ursachen folgern.

Mathematisch betrachtet sieht das Ganze so aus: Seien P und Q mathematische Aussagen und sei $P \implies Q$ (was man auch „wenn P, dann Q“ sprechen kann) ein korrekter Schluss, dann sind auch die Verknüpfungen $\neg\, Q \implies \neg\, P$, $\neg\, P \vee Q$ und $\neg\,(P \wedge \neg\, Q)$ wahr. Darüber hinaus gilt sogar, dass die vier Aussagen $P \implies Q$, $\neg\, Q \implies \neg\, P$, $\neg\, P \vee Q$ und $\neg\,(P \wedge \neg\, Q)$ äquivalent sind. Daraus ergeben sich verschiedene Möglichkeiten, aus einer Aussage P eine Aussage Q zu folgern. Eine dieser Möglichkeiten ist, von $\neg\, Q$ auf $\neg\, P$ zu schließen, eine andere ist es, die Äquivalenz der Implikation zu $\neg\,(P \wedge \neg\, Q)$ zu nutzen. Im ersten Fall bekommt man den *Beweis durch Kontraposition*, im anderen Fall den *Beweis durch Widerspruch*. Diese Verfahren werden nun erklärt.

Beweis durch Kontraposition

Seien P und Q mathematische Aussagen und sei $P \Longrightarrow Q$ ein korrekter Schluss, dann ist auch $\neg Q \Longrightarrow \neg P$ ein korrekter Schluss und umgekehrt. Die Aussagen $P \Longrightarrow Q$ und $\neg Q \Longrightarrow \neg P$ sind äquivalent. Möchte man den Schluss $P \Longrightarrow Q$ durch Kontraposition beweisen, so geht man von der Folgerung Q aus. Ihre Negation $\neg Q$ wird angenommen, daraus wird $\neg P$, also die Negation der Voraussetzung abgeleitet. Ist dieser Schluss gelungen, so hat man damit (auch) die ursprüngliche Behauptung bewiesen. Ist etwa zu zeigen, dass x^2 eine ungerade natürliche Zahl ist, wenn $x \in \mathbb{N}$ ungerade ist, so kann man das per Kontraposition machen. Man würde annehmen, dass die Quadratzahl $x^2 \in \mathbb{N}$ gerade (also durch 2 teilbar) ist und daraus ableiten, dass dann auch x eine gerade natürliche Zahl sein muss (man vergleiche Übungsaufgabe 9).
Der Beweis durch Kontraposition hat durchaus ein Äquivalent in der Verwendung von Logik in Alltagssituationen. Nimmt man an, dass auch Herr H. in den beschriebenen Raubüberfall verwickelt ist, so kann man seine direkte Beteiligung leicht ausschließen, wenn man weiß, dass er nicht am Tatort war. Wenn Herr H. etwa eine Opernaufführung in München besucht hat, dann kann er *nicht* zur gleichen Zeit einen Raubüberfall in Hamburg durchgeführt haben. Hätte also Herr H. den Raubüberfall in Hamburg begangen, so wäre er nicht in München gewesen. Das ist genau der Umkehrschluss, mit dem man zur Entlastung von Herrn H. argumentieren würde. Formal kann man es so betrachten: Die Implikation „Herr H. ist der Täter $\Longrightarrow$ Herr H. war zum Tatzeitpunkt in Hamburg“ ist gleichbedeutend mit der Implikation „Herr H. war zum Tatzeitpunkt nicht in Hamburg $\Longrightarrow$ Herr H. ist nicht der Täter“.

Beweis durch Widerspruch

Auf der Äquivalenz von $P \Longrightarrow Q$ und $\neg(P \wedge \neg Q)$ basiert der Beweis durch Widerspruch. Man nimmt an, dass P und gleichzeitig $\neg Q$ gilt und leitet daraus einen Widerspruch und folglich die Negation der Aussage in der Klammer ab. Gelingt dies, dann ist wiederum die ursprüngliche Behauptung bewiesen. Die aus der Schule bekannte Behauptung, dass eine Zahl x mit der Eigenschaft $x^2 = 2$ nicht rational sein kann, wird in der Regel mit einem Widerspruchsbeweis gezeigt. Man nimmt an, dass x eine rationale Zahl ist, also als (voll gekürzter) Bruch in der Form $\frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ geschrieben werden kann. Außerdem soll die Gleichung $x^2 = 2$ erfüllt sein. Setzt man nun den Bruch ein, so bekommt man $(\frac{p}{q})^2 = 2$. Daraus ergibt sich ein Widerspruch (nach ein paar Überlegungen sieht man, dass sowohl p als auch q durch 2 teilbar sein müssten), und die Behauptung ist bewiesen. Übrigens wird in einem späteren Kapitel (und zwar auf Seite 310) der Beweis noch einmal in aller Ausführlichkeit beschrieben. Eine Alltagssituation, die dem Beweis durch Widerspruch entspricht, ist leicht gefunden. Nimmt man wiederum an, dass Herr H. der Täter bei einem Raubüberfall in Hamburg war, er aber nicht am Tatort, sondern bei einer Opernaufführung in München war, so ergibt sich ein Widerspruch, durch den Herrn H. entlastet wird. Vergleicht man dieses Beispiel mit der beim Beweis durch Kontraposition geschilderten Situation, so wird sofort klar, dass sich die Situationen nicht grundlegend unterscheiden. Der Unterschied ist einzig und allein, aus welcher Perspektive auf diese Situation geblickt wird.

Der Beweis durch Kontraposition und der Widerspruchsbeweis sind so genannte *indirekte Beweise*, bei denen Negationen von wahren Aussagen (die dann also falsch sind) verwendet werden. Betrachtet man hingegen eine Schlusskette von Aussagen, die alle wahr sind, so spricht man von einem *direkten Beweis*.

Direkter Beweis

Direkte Beweise sind logisch unkompliziert, da hier einzig und allein wahre Aussagen zu einer gültigen Schlusskette zusammengesetzt werden. Das folgende Beispiel, bei dem auch noch eine Fallunterscheidung berücksichtigt wird, soll diesen Weg verdeutlichen. Die Behauptung ist, dass für beliebige Mengen A und B die Beziehung $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset (A \cup B)$ gilt. Dabei bietet sich ein direkter Beweis an. Sei also $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Dann gilt $x \in A \setminus B$ oder $x \in B \setminus A$. Ist $x \in A \setminus B$, dann ist insbesondere $x \in A$ und somit $x \in A \cup B$. Ist $x \in B \setminus A$, dann ist $x \in B$ und somit auch $x \in A \cup B$. Damit ist die Behauptung gezeigt. Schließlich soll an dieser Stelle nicht unerwähnt bleiben, dass als weiteres Beweisverfahren der *Beweis durch vollständige Induktion* eine wichtige Rolle in der Mathematik spielt. Diese Beweismethode wird aber erst im Kapitel 2 besprochen.

1.2.5 Quantoren

In mathematischen Definitionen und Sätzen kommen immer wieder die Redewendungen „es gibt mindestens ein x ...“ bzw. „für alle x gilt ...“ vor. Man nennt sie *Quantoren* und spricht im ersten Fall vom *Existenzquantor* und im zweiten Fall vom *Allquantor*.

1.2.2 **Beispiel 1.2.2** Hinter den folgenden (ausnahmsweise stets wahren) Aussagen verbirgt sich der Existenzquantor.

- Es gibt eine gerade natürliche Zahl n, die sich als Summe von zwei Primzahlen schreiben lässt.
- Mindestens eine Primzahl ist eine gerade Zahl.
- Es existiert eine nicht rationale Zahl, deren Quadrat 2 ist.

Hinter den folgenden (ebenfalls ausschließlich wahren) Aussagen verbirgt sich hingegen der Allquantor.

Beispiel 1.2.3 **1.2.3**

- Alle Primzahlen, die größer als 2 sind, sind ungerade Zahlen.
- Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ kann man eindeutig n^2 bestimmen.
- Jede rationale Zahl lässt sich als Summe von Stammbrüchen schreiben (und wenn man wissen möchte, warum das so ist, sollte man in diesem Buch bis zur Aufgabe 8 auf Seite 336 im Anschluss an Kapitel 11 vorankommen).

Man kürzt den Existenzquantor durch das Zeichen $\exists$ (das die Autoren dieses Buchs prinzipiell bevorzugen, aber noch lieber lassen sie es bei der sprachlichen Formulierung) bzw. durch das Zeichen $\bigvee$ ab. Ein Beispiel für eine (wahre) *Existenzaussage* ist (man vergleich oben): „Es gibt eine gerade natürliche Zahl, die sich als Summe von zwei Primzahlen darstellen lässt“. Diese Aussage ist bereits wahr, wenn man ein einziges Beispiel findet, das den Bedingungen genügt, also etwa $8 = 5 + 3$ angibt.
Häufig fragt man in der Mathematik aber auch, ob es weitere Beispiele gibt bzw. ob man alle Fälle bestimmen kann, für die eine bestimmte Aussage gilt. Im Beispiel würde sich die Frage stellen, ob *alle* geraden Zahlen als Summe von zwei Primzahlen darstellbar sind. Auf diese Frage soll später noch einmal eingegangen werden. Hier geht es nur um das Prinzip der so genannten *Allaussage*, die mit Hilfe des Allquantors formuliert werden kann. Für den Allquantor schreibt man $\forall$ (das ist die von den Autoren eher bevorzugte Schreibweise), man kann aber auch das Zeichen $\bigwedge$ verwenden. Ein Beispiel für eine (wahre) Allaussage ist: „Alle natürlichen Zahlen, die größer als 1 sind, lassen sich als ein Produkt von Primzahlen schreiben.“ Man hätte auch die folgende Formulierung wählen können: „Jede natürliche Zahl, die größer als 1 ist, lässt sich als ein Produkt von Primzahlen schreiben.“ Insbesondere gibt es also auch für den Allquantor verschiedene sprachliche Formulierungen.
Existenzaussagen haben zum Inhalt, dass es *mindestens* ein Element der beschriebenen Art gibt, es können aber auch mehr sein. Wenn man betonen möchte, dass es *genau* ein solches Element gibt, dann schreibt man das in

normalen Worten oder aber wählt das Zeichen $\exists!$ für diesen Sachverhalt. Allaussagen beziehen sich hingegen, wie der Name es nahe legt, auf *alle* Elemente mit einer bestimmten Eigenschaft.

Vielleicht ist das Wesentliche an den Quantoren, sich bei einer bestimmten Aussage darüber klar zu werden, wie sie einzuordnen ist. Gilt eine Behauptung zum Beispiel für alle Elemente mit einer bestimmten Eigenschaft? Reicht es, wenn ein einzelnes Element identifiziert wird, das eine bestimmte Eigenschaft hat? Die Quantoren bieten vielleicht ein wenig Hilfe beim Sortieren von Voraussetzungen und Zielen an.

1.3

1.3 Übungsaufgaben

Eine mathematische Aufgabe kann manchmal genauso unterhaltsam sein wie ein Kreuzworträtsel, und angespannte geistige Arbeit kann eine ebenso wünschenswerte Übung sein wie ein schnelles Tennisspiel.

George Pòlya

Bei den folgenden Übungsaufgaben werden nicht nur Begriffe benutzt, die im ersten Kapitel eingeführt wurden. Das ist sicherlich ungewöhnlich für ein Mathematikbuch, gerade nach diesem eher einführenden Kapitel aber recht nützlich. Man sollte sich also nicht scheuen, auch elementares Schulwissen bei der Lösung der Aufgaben zu berücksichtigen.

1. Sei A eine Menge und $a \in A$. Was ist
   a) $A \cap \{a\}$,
   b) $A \cup \{a\}$,
   c) $\{a\} \cup \{\}$,
   d) $A \cup A$,
   e) $A \cap A$,
   f) $A \setminus A$,
   g) $A \setminus \{\}$,
   h) $\{\} \setminus A$?
2. Bestimmen Sie alle Teilmengen der Menge $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Welche Teilmengen hat die Menge $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?
3. Sei M eine Menge und $\mathcal{P}(M)$ die Menge aller ihrer Teilmengen. Man nennt $\mathcal{P}(M)$ die *Potenzmenge* von M. Wie viele Elemente hat die Potenzmenge einer Menge der Mächtigkeit 4 bzw. 5 bzw. 6? Haben Sie

eine Vermutung, wie viele Elemente die Potenzmenge einer Menge der Mächtigkeit n für eine beliebige natürliche Zahl n hat?

4. Prüfen Sie mit Hilfe eines Venn-Diagramms die Gültigkeit der beiden folgenden Gleichungen
   a) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$
   b) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
   für beliebige Mengen A, B und C.

5. Zeigen Sie, dass für beliebige Mengen A und B die folgenden Aussagen wahr sind:
   a) $A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A$,
   b) $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$.

6. Vergleichen Sie $(A \cap B) \cup C$ mit den beiden folgenden Mengen und prüfen Sie jeweils, ob die Teilmengenbeziehung gilt.
   a) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$,
   b) $A \cap (B \cup C)$.

7. Seien A und B Mengen.
   a) Zeigen Sie, dass $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq A \cup B$ gilt.
   b) Unter welcher Bedingung gilt die Gleichheit $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$? Nutzen Sie für die Antwort ein Venn-Diagramm.

8. Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{N}$ die Implikation $2|a \wedge\ 2|b \implies 4|a \cdot b$ gilt. Prüfen Sie auch die Umkehrung.

9. Sei x eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass x^2 ungerade ist, wenn x ungerade ist.

10. Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{N}$ aus $a \neq b$ die Ungleichung $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$ folgt. Prüfen Sie, ob auch die Umkehrung gilt.

11. Zeigen Sie, dass sich jede ungerade natürliche Zahl k mit $k > 1$ als Differenz von zwei Quadratzahlen schreiben lässt. Überlegen Sie sich, dass es mehrere Lösungen geben kann und wie diese Lösungen aussehen.

12. Geben Sie verschiedene sprachliche Formulierungen für den Existenzquantor und den Allquantor an.