

1 Konvexe Mengen

1.1 Geschichtlicher Überblick

1.1.1 Die Anfänge

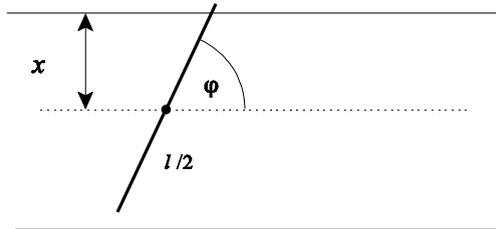
Im vorliegenden Buch sollen einige der Grundgedanken der Integralgeometrie sowie deren Anwendung in Stereologie und Bildverarbeitung dargestellt werden. Dabei dienen die stereologischen Methoden zur weiteren Bearbeitung der durch die digitale Bildverarbeitung erhaltenen Daten, indem Aussagen über die dem zweidimensionalen Bild zugrunde liegenden räumlichen Strukturen getroffen werden sollen. Ein grundlegender Begriff für alle diese Untersuchungen ist der der konvexen Menge [Bo34, Le80].

Aber wir werden erkennen, daß eine große Anzahl wichtiger Formeln allgemeiner auch für beliebige Figuren der Ebene und beliebig geformte Körper des Raumes gelten. Zu den stereologischen Problemen, Resultaten und Anwendungen gibt es eine Vielzahl von Monografien [Un70, Sa76, We80, St83, Se84, St87]. In vielen Fällen liefert dabei die Integralgeometrie bzw. die Stochastische Geometrie wesentliche Beiträge [Bl55, Ke63, Ma75, Sa76, Se84, Sc92]. Die digitale Bildverarbeitung wird hier nur insofern von Bedeutung sein, als daß durch sie die grundlegenden Meßdaten zur Verfügung stellt, aus denen dann stereologische Schlußfolgerungen gezogen werden können.

Die mathematischen Grundlagen der Stereologie sind durch die Begriffe „Integralgeometrie“ und „geometrische Wahrscheinlichkeit“ gekennzeichnet. Obwohl deren Anfänge sich über 200 Jahre zurückverfolgen lassen, sind viele Ergebnisse außerhalb der Stereologie und der stochastischen Geometrie auch heute noch weitgehend unbekannt. Deshalb soll hier vor allem die elementare zweidimensionale Integralgeometrie vorgestellt werden und deren praktisch bedeutsamen dreidimensionalen Verallgemeinerungen.

Der Graf Buffon (1707-1788) war der erste Wissenschaftler, der an einem einfachen aber sehr instruktiven Beispiel das Zusammenwirken von Integralrechnung, Geometrie und Wahrscheinlichkeitsrechnung demonstrierte. Bei diesem sogenannten *Nadelproblem* wird die Ebene durch im Abstand a verlaufende parallele Geraden in Streifen aufgeteilt. Eine Nadel der Länge l wird dann willkürlich auf die Paralle-

lenschar geworfen, und es wird gefragt, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß die Nadel eine der parallelen Geraden schneidet (siehe die folgende Abbildung). Dabei wird angenommen, daß die Nadellänge kleiner ist als der Abstand der Geraden, so daß bei jedem Versuch höchstens ein Schnittpunkt auftreten kann [Ro78].



Buffonsches Nadelproblem

Da alle Lagen der Nadel gleichwahrscheinlich sein sollen, erhalten wir ein Maß J_N für die „Anzahl“ der möglichen Lagen der Nadel, indem wir über alle möglichen Abstände x des Nadelmittelpunktes von einer der Geraden und über alle möglichen Winkel φ integrieren (vorausgesetzt natürlich, daß alle Abstände und alle Winkel mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten):

$$J_N = \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_0^\pi d\varphi = \int_0^\pi d\varphi \int_{-a/2}^{a/2} dx = \pi a \ .$$

Ein Schneiden von Nadel und einer der Geraden tritt allerdings nur dann auf, wenn für den Abstand x die Bedingung $|x| < (l/2)\sin \varphi$ gilt. Das entsprechende Maß J_S ist daher

$$J_S = \int_0^\pi d\varphi \left[2 \int_0^{l/2 \cdot \sin \varphi} dx \right] = l \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi = 2l \ .$$

Bei der Durchführung eines Nadelwurf-Experimentes werden wir bei Z_N Würfen $Z_S < Z_N$ Schnittpunkte beobachten. Da wir aber immer nur endlich viele Versuche durchführen können, gilt die Beziehung

$$\frac{J_S}{J_N} = \frac{2l}{\pi a} \approx \frac{Z_S}{Z_N} .$$

Diese Näherungsgleichung löste Buffon nach π auf und erhielt damit das verblüffende Resultat

$$\pi \approx \frac{2l}{a} \cdot \frac{Z_N}{Z_S} .$$

Es bot sich hiermit also die Möglichkeit, den Wert der Kreiszahl π „experimentell“ zu finden (siehe dazu auch Abschnitt 2.2.2). Der englische Kapitän Fox, der auf Grund einer ernsthaften Verwundung keinen aktiven Militärdienst mehr verrichten konnte, hat um 1864 entsprechende Experimente durchgeführt. Er erhielt für π Werte zwischen 3.14 und 3.18 [Mi78, Gn68].

Anders als im 18. Jahrhundert besteht für uns der Wert des Ergebnisses $\pi \approx (2l/a) \cdot (Z_N/Z_S)$ jedoch darin, daß man eine der beiden Größen a oder l bestimmen kann, wenn man die andere kennt. Auf diese Weise braucht man gegebenenfalls keine Längenmessungen vorzunehmen, um eine unbekannte Länge ermitteln zu können. Die beiden Beziehungen

$$a \approx \frac{2l}{\pi} \cdot \frac{Z_N}{Z_S} \quad \text{und} \quad l \approx \frac{\pi a}{2} \cdot \frac{Z_S}{Z_N}$$

wurden damit zum Ausgangspunkt der *Stereologie* – so wie die Gleichung $J_S/J_N = 2l/\pi a$ den Beginn der *Integralgeometrie* kennzeichnet.

Als Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitstheorie werden häufig Pascals Betrachtungen über Glücksspiele angesehen. Die Anfänge der Integralgeometrie und der geometrischen Wahrscheinlichkeiten lassen sich auf eine geometrische Variante solcher Glücksspiele zurückführen, die Buffon 1733 in einem Vortrag vor der Académie Française vorstellte: Eine Münze wird in zufälliger Weise auf einen Fußboden geworfen, der nach Art eines regelmäßigen Mosaiks unterteilt ist, z.B. in Dreiecke, Quadrate, Sechsecke. Der eine Spieler wettet, daß die Münze ganz innerhalb eines Mosaiksteins liegt, der andere hält dagegen, daß eine Kante getroffen wird (siehe dazu Aufgabe A2.7). Wie sind die

Chancen verteilt? Buffon hat solche Wahrscheinlichkeiten berechnet und im Rahmen einer erst 1777 erschienenen größeren Arbeit veröffentlicht [Bu77].

Jedoch hat Buffon die Anerkennung seiner wegweisenden Idee nicht mehr erlebt. Erst im folgenden Jahrhundert wurden auf der Grundlage seines Nadelproblems bedeutende Fortschritte erzielt. Diesmal war es Crofton (1826-1915), ein Engländer, der sich – angeregt von Buffon – um die Integralgeometrie und die geometrische Wahrscheinlichkeit verdient machte. Crofton war von 1870-1884 Professor für Mathematik an der Militärademie London. In einer Reihe von Arbeiten [Cr68, Cr69, Cr77] erhielt er als erster einige bemerkenswerte Formeln für ebene konvexe Figuren (mittlere Sehnenlänge $\bar{s} = \pi F/U$ mit F als Fläche und U als Umfang der jeweiligen Figur) sowie Formeln für die Mittelwerte von Sehnenlängenpotenzen.

Aber auch unabhängig von Mathematikern wurden im 19. Jahrhundert schon einige wichtige Formeln der Stereologie, dem praktischen Teil der Integralgeometrie, gefunden. So hat der französische Geologe Delesse (1817–1881) bereits 1847 die Beziehung $V_V = A_A$ angegeben [De47, De48], wonach der Volumenanteil einer zufällig verteilten Materialkomponente (der sogenannten „Phase“) gleich dem Flächenanteil dieser Materialkomponente im Anschliff ist.



G.L.L. Buffon
(1707–1788)



A.L. Cauchy
(1789–1857)



J. Steiner
(1796–1863)

1.1.2 Mathematische Grundlagen

Zum Teil waren einige der grundlegenden Croftonschen Formeln bereits vorher von Cauchy gefunden worden [Ca41], der auch wichtige Ergebnisse für den dreidimensionalen Raum erhielt (beispielsweise für die Anzahl der Geraden und Ebenen, die einen konvexen Körper treffen). Cauchy lehrte als Mathematiker an der *École Polytechnique* in Paris. Bereits im Alter von 22 Jahren zeigte er, daß die Winkel eines konvexen Polyeders durch seine Seitenflächen bestimmt sind. Doch ist die Geometrie im allgemeinen und die Integralgeometrie im besonderen für Cauchy nur ein Randgebiet gewesen. Sein Hauptthema war die Analysis, der die überwiegende Mehrzahl seiner 789 wissenschaftlichen Arbeiten gewidmet ist.

Im Gegensatz zu dem Analytiker Cauchy war Steiner ein Geometer. Er studierte in Heidelberg und leitete später bis zu seinem Tode einen Lehrstuhl an der Berliner Universität. Steiner lieferte 1836 den Beweis, daß der Kreis die Figur mit dem größten Flächeninhalt unter allen Figuren mit gegebenem Umfang ist [St40]. Er entdeckte die Beziehungen zwischen den geometrischen Charakteristika von Parallelfächen und Parallelkörpern (Fläche, Umfang, Volumen usw.) und zeigte die Bedeutung der Begriffe „Kantenkrümmung“ und „Eckenkrümmung“.

Ein wesentlicher Fortschritt wurde durch den Begriff der „frei beweglichen Figuren“ erreicht. Sie wurden Ende des neunzehnten Jahrhunderts von Poincaré eingeführt [Po96] und später insbesondere von Blaschke [Bl55] und Santaló als methodisches Hilfsmittel in der Integralgeometrie verwendet.

Alle diese geometrisch geprägten Begriffe wurden von Hermann Minkowski dahingehend verallgemeinert, daß der allgemeine Begriff der „Quermaß-Integrale“ eingeführt wurde. Die Quermaß-Integrale als Maße für n -dimensionale konvexe Körper fassen die einzelnen Ergebnisse von Cauchy, Crofton und Steiner unter einem einheitlichen Gesichtspunkt zusammen [Mi03].

Während in der klassischen Integralgeometrie die Mittelwerte geometrischer Größen die fast allein vorherrschende Rolle spielten, gewannen seit etwa 1960 die Untersuchungen zur statistischen Verteilung geometrischer Größen zunehmend an Bedeutung [Ke63, Ha74, Sa76, Ma75, Ri81, St87, Sc92].

Um sich Klarheit über den zugrundegelegten Wahrscheinlichkeitsraum zu verschaffen, ist es nützlich, die Rollen von Nadel und Geradenschar zu vertauschen, das heißt, die Nadel als fest anzusehen (mit dem Mittelpunkt im Ursprung und einer durch die X-Achse festgelegter Richtung) und die Gerade zufällig zu wählen.



H. Poincaré
(1854–1912)



W. Blaschke
(1885–1962)



H. Minkowski
(1864–1909)

Die Problematik der Auswahl geeigneter Koordinaten wurde besonders deutlich gemacht durch das Bertrand'sche Paradoxon [Be88]. Bertrand (1822–1900) betrachtete die Wahrscheinlichkeit p , daß eine zufällig im Einheitskreis gezogene Sehne s länger ist als $\sqrt{3}$. Er gab drei verschiedene Lösungen an, die sich durch die spezielle Definition der „Zufälligkeit“ ergaben. Zunächst kann man wie im Buffonschen Nadelproblem die Abstands-Richtungs-Darstellung der Sehnen zugrunde legen, womit man $p = 1/2$ erhält.

Bestimmt man dagegen die Lage der Sehne durch die beiden Winkel, die die Ortsvektoren der Endpunkte der Sehne mit der X-Achse bilden, und wählt diese völlig unabhängig voneinander, so ergibt sich $p = 1/3$. Beschreibt man schließlich die Sehne durch ihren Mittelpunkt und wählt diesen gleichverteilt im Kreis, so erhält man das Ergebnis $p = 1/4$ (siehe dazu Abschnitt 1.2.3).

„Die von Blaschke begründete Integralgeometrie handelt von beweglichen Figuren im Raum und von invarianten Integralen, die sich bei ihnen bilden lassen“. Dieses Zitat aus Hadwiger [Ha57] beschreibt recht gut die wesentlichen Elemente der Integralgeometrie: Es geht um bewegte Figuren und um invariante Mittelwerte im Zusammenhang mit

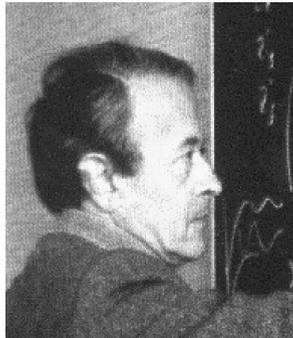
solchen bewegten Figuren. Nach frühen Resultaten von Crofton, Poincaré und anderen und angeregt durch Herglotz hat Wilhelm Blaschke mit seinen Schülern in den Jahren nach 1935 eine systematische Theorie erarbeitet, die er „Integralgeometrie“ nannte. Hauptergebnis war neben den älteren Resultaten (Cauchysche Projektionsformel, Croftonsche Schnittformel) die „kinematische Hauptformel“ für den dreidimensionalen Raum, die die Anzahl der Schnitte zwischen zwei konvexen Körpern bestimmt (siehe Abschnitt 2.1.4).

Noch einmal: Die Integralgeometrie ist dasjenige Teilgebiet der Geometrie, das sich mit der Bestimmung und Anwendung von Mittelwerten geometrisch definierter Funktionen befaßt. Zu den Grundlagen der Integralgeometrie gehören daher einerseits Teile der Theorie invarianter Maße in homogenen Räumen, andererseits gewisse Gebiete aus der Geometrie der Punktfolgen, wie etwa die Theorie der Polyeder oder die der konvexen Mengen.

Ursprünglich aus Fragestellungen über geometrische Wahrscheinlichkeiten entstanden und von Blaschke, Chern, Hadwiger, Santaló und anderen ab 1935 entwickelt, hat sich die Integralgeometrie als wichtiges Hilfsmittel in der Stochastischen Geometrie und deren Anwendungsgebieten (Stereologie, Bildanalyse, Bildrekonstruktion) erwiesen.



L.A. Santaló
(1911–2001)



G. Matheron
(1930–2000)



J. Serra
(*1940)

Invariante Maße und die zugehörigen Integrale sind etwa seit Beginn des 20. Jahrhunderts untersucht worden. Geometrische Wahrscheinlichkeitsprobleme, die im Kern erste Ansätze dazu enthielten, traten eher in den Hintergrund.

Die Mengen, bezüglich denen die Integralen berechnet wurden, waren neben affinen Unterräumen zunächst kompakte konvexe Mengen (konvexe Körper). Die Ausdehnung der Theorie auf glatte nichtkonvexe Flächen (und auf nichteuklidische Räume) verdankt man hauptsächlich Santaló und Chern (1911–2004), die Ausdehnung auf den Konvexring (mit endlichen Vereinigungen konvexer Körper) wurde von Hadwiger (1908–1981) durchgeführt.

Frühe Arbeiten zur Integralgeometrie benutzten die sogenannten „integralgeometrische Dichten“ (Geradendichte, Bewegungsdichte usw.). Diese zunächst etwas vage verwendeten Begriffsbildungen wurden dann mittels Differentialformen präzisiert.

Darstellungen dieses klassischen Teils der Integralgeometrie sind in den Büchern von Blaschke [Bl37, Bl55], Santaló [Sa53], Hadwiger [Ha57] und Stoka [St68] zu finden. Eine ausführliche Behandlung der Integralgeometrie, die auch neuere Resultate und die Anwendungen auf stochastische Problemstellungen berücksichtigt, wurde von Santaló gegeben [Sa76].

Die Wahl des Lebesgue-Maßes für die exakte Grundlegung der stochastischen Geometrie erscheint im Hinblick auf seine geometrischen Invarianzeigenschaften natürlich, da es ja (bis auf Normierung) das einzige Maß auf dem \mathbb{R}^2 ist, das invariant gegenüber Translationen, Drehungen und Spiegelungen bleibt. Allerdings wirken sich die Invarianzeigenschaften je nach Art der Parametrisierung in unterschiedlicher Weise aus.

Es ist daher naheliegend, bei diesen und anderen geometrischen Wahrscheinlichkeitsproblemen direkt nach solchen Maßen zu fragen, die ähnliche Invarianzeigenschaften haben wie das Lebesgue-Maß, also etwa bewegungsinvariant sind. Von den drei den Lösungen des Bertrandischen Paradoxons zugrundeliegenden Maßen hat nur das erste diese Eigenschaft (es wird auch bei der Lösung des Buffonschen Nadelproblems benutzt).

In den Anwendungen der Stochastischen Geometrie werden Modelle, denen invariante Maße zugrunde liegen, dann heranzuziehen sein, wenn bei der zu beschreibenden Situation Invarianzeigenschaften wie Stationarität oder Isotropie angenommen werden können.

1.1.3 Stereologie und Stochastische Geometrie

Neben der Stereologie ist die etwa ab 1970 entstandene Stochastische Geometrie ausschlaggebend gewesen für das neu erwachte Interesse an der Integralgeometrie. Die Stochastische Geometrie behandelt Modelle für zufällige Mengen und Felder zufälliger Mengen (Punktprozesse). Ihr Ansatz ist grundlegend allgemeiner als der bei geometrischen Wahrscheinlichkeiten, wo zufällig bewegte Mengen fester Form und Anzahl vorausgesetzt werden.

Einen Einblick in die Grundlagen dieser Theorie geben die Bücher von Harding/Kendall [Ha74] und Matheron [Ma75]. Die drei Gebiete Integralgeometrie, Stochastische Geometrie und Stereologie haben sich in den letzten Jahren wechselseitig beeinflußt und neue Entwicklungen ausgelöst. Einige Mitteilungen zur geschichtlichen Entwicklung der stochastischen Geometrie sind im von Kendall geschriebenen Vorwort des Buches [St87] zu finden.

Neue integralgeometrische Formeln ergaben sich aus stereologischen Anwendungen. Für die meisten integralgeometrischen Formeln wurden Gegenstücke bei zufälligen Mengen und geometrischen Punktprozessen aufgestellt. Eine aktuelle Übersicht (aber weitgehend ohne Beweise) über Resultate der Integralgeometrie und ihre Querverbindungen zur Stochastischen Geometrie und zur Stereologie wird zum Beispiel in den Büchern von Stoyan/Kendall/Mecke [St87] und Mecke/Schneider/ Stoyan/Weil [Me90] gegeben.

Wir haben die Einleitung in die Theorie der konvexen Mengen mit einer geometrischen Variante des Münzwurfs begonnen, mit dem Buffonschen Nadelproblem. Wir wollen sie beenden mit einem geometrischen Gegenstück zu einem anderen Glücksspiel, dem Werfen von Würfeln. Bei dieser Version kommt es wie bei den Buffonschen Varianten des Münzwurfs, nicht auf die geworfene Augenzahl an, sondern auf die Lage der Würfel.

Stellen wir uns vor, daß zwei kongruente Würfel im Raum zufällig so geworfen werden, daß sie sich berühren (siehe dazu [Sc92]). Es werden nur zwei Berührsituationen positive Wahrscheinlichkeit haben, „Kante gegen Kante“ (KK) und „Ecke gegen Seite“ (ES). Wenn zwei Spieler auf diese beiden komplementären Ereignisse setzen, welcher Spieler hat dann die höhere Gewinnerwartung?

Das Resultat heißt

$$\text{Kante gegen Kante: } p_{\text{KK}} = 3\pi / (8+3\pi) \approx 0.54088$$

$$\text{Ecke gegen Seite: } p_{\text{ES}} = 8 / (8+3\pi) \approx 0.45912$$

Aber wichtiger als das Spielerische ist die praktische Anwendung der Integralgeometrie in Stereologie und Bildverarbeitung. Die von Delesse gefundene Formel $V_V = A_A$ kennen wir bereits. Später wurde dann von Rosival gezeigt, daß sogar $V_V = A_A = L_L$ gilt, d.h. daß sich auch aus dem Längenanteil der Materialkomponente der Volumenanteil bestimmen läßt [Ro98]. Und schließlich wurde im 20. Jahrhundert die erweiterte Formel $V_V = A_A = L_L = P_P$ in die Praxis eingeführt, wonach man schon mittels einer einfachen Punktzählung den Volumenanteil einer Phase ermitteln kann [Gl41].

Allerdings war zu Beginn dieser Entwicklung die Erfassung der stereologischen Rohdaten – was eigentlich immer auf das Zählen von Punkten hinauslief – eine sehr mühsame Beschäftigung. So wird von Saltykow mitgeteilt, daß man bei 6 Phasen und 1000 Zählpunkten etwa 15-20 Minuten aufwenden muß und daß sogar bei „geeigneter Mechanisierung“ 10 Minuten erforderlich sind [Sa74]. Der Name „Stereologie“ wurde wahrscheinlich erstmalig 1961 auf dem ersten internationalen Kongreß für Stereologie in Wien als Bezeichnung für dieses Wissensgebiet eingeführt [Ha80].

Es ist bemerkenswert, daß viele praktisch bedeutsame Formeln der Integralgeometrie unabhängig von der „reinen“ Mathematik gefunden wurden, sei es in der Gesteinskunde (Petrographie), der Metallographie [Sa67, Sa74] oder der Biomedizin. So wird in regelmäßigem vierjährigem Abstand der Internationale Kongreß für Stereologie durchgeführt, auf dem stets auch mathematisch-theoretische Arbeiten vorgestellt werden.

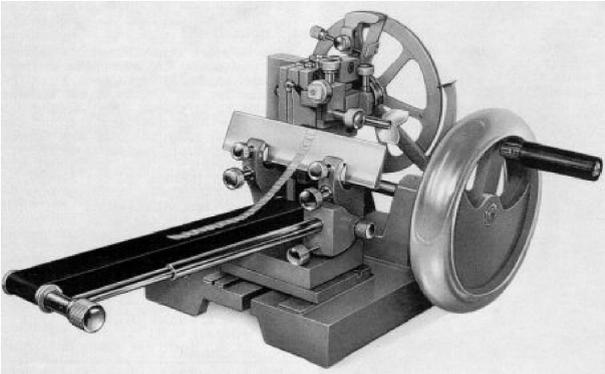
Etwa um das Jahr 1970 kam überraschend neues Interesse an der Integralgeometrie auf. In der Stereologie (und später der Bildanalyse) arbeiteten Naturwissenschaftler, Materialwissenschaftler und Mediziner an dem Problem, Mittelwerte von geometrischen Größen zwei- und dreidimensionaler Strukturen mit Hilfe von linearen und ebenen Schnitten zu schätzen. Ein Beispiel dieser Art ist die Bestimmung der spezifischen inneren Oberfläche S_V der Lunge eines Säugetiers, für die

nur die Messung der spezifischen Randlänge L_A in einem mikroskopischen ebenen Schnitt zur Verfügung steht. Die dazu in der Stereologie benutzte Formel hat die Gestalt

$$S_V = \frac{4}{\pi} L_A ,$$

wobei die rechte Seite als Mittelwert über alle ebenen Schnitte zu verstehen ist, also als Erwartungswert, wenn die Schnittebenen zufällig gewählt werden. Formeln dieser Art, die von Anwendern teils auf heuristische Weise hergeleitet wurden, erwiesen sich als Spezialfälle klassischer Ergebnisse der Integralgeometrie.

Die Integralgeometrie lieferte nicht nur die mathematische Begründung für Formeln dieses Typs, sondern auch die Bedingungen für deren Gültigkeit, also etwa die Verteilung, nach der die zufällige Schnittebene gewählt werden muß. Im obigen Beispiel $S_V = 4L_A/\pi$ etwa ist dies nicht die vom verschiebungsinvarianten Ebenenmaß herrührende Verteilung, sondern eine Verteilung, die auch alle möglichen Winkelagen der Ebene berücksichtigt.



Mikrotom älterer Bauart

Mehr und mehr haben sich die stereologischen Methoden in Disziplinen wie der Materialforschung [Un70] und der Biomedizin etabliert [El83, We79, We80]. Dabei gibt es jedoch den „technischen“ Unterschied, daß man in Materialforschung mit *Anschliffen* (Schnitte der Dicke $d=0$) arbeitet und in der Biomedizin (vielleicht mit Ausnahme von Knochenuntersuchungen) *Schnitte* untersucht (Schnitte der Dicke $d>0$).

Für die Herstellung von „dicken“ Schnitten, die natürlich sehr dünn sind ($0.02\text{-}1.0\ \mu\text{m}$ in der Elektronenmikroskopie, $2\text{-}10\ \mu\text{m}$ in der Lichtmikroskopie) benutzt man spezielle Geräte, die *Mikrotome*. Das Mikrotom wurde von J.E. Purkinje eingeführt (1787-1869), einem tschechischen Physiologen, der ein Pionier auf den Gebieten Histologie, Embryologie und Pharmakologie war und sich insbesondere mit den Funktionen von Auge, Herz und Gehirn befaßte.

Zum Schluß dieser einleitenden Bemerkungen sei noch erwähnt, daß im Juni 1977 zum 200. Jahrestag der Veröffentlichung von Buffons Formel in Paris ein Symposium stattfand („*Geometrical Probability and Biological Structures*“). Es wurde durchgeführt im „Jardin des Plantes de Paris“, dem botanischen Garten, den Buffon geschaffen hatte und dem er die letzten Jahre seines Lebens widmete. Unter den Teilnehmern waren vertreten: Miles und Serra, DeHoff und Weibel, Mandelbrot und Matheron, Gundersen und Santaló – die Liste liest sich wie ein „*Who is who*“ der Stereologie und Integralgeometrie.



1.2 Konvexe planare Figuren

1.2.1 Stützabstand und Stützfunktion

Die Theorie der konvexen Figuren und konvexen Körper ist insbesondere deshalb ein besonders reizvolles mathematisches Gebiet, weil es in ihrem Rahmen möglich ist, aus wenigen anschaulichen Voraussetzungen heraus und mit wenigen grundlegenden Kenntnissen der Analysis und Geometrie eine Vielzahl theoretisch interessanter und auch praktisch bedeutsamer Resultate herzuleiten.

Eine konvexe Figur K (allgemeiner auch ein konvexer Körper) ist durch folgende spezielle Eigenschaft gekennzeichnet: Je zwei Punkte $p, q \in K$ besitzen einen endlichen Abstand, und alle Punkte r , die auf der geraden Strecke zwischen p und q liegen, gehören ebenfalls zu K . Damit sind Kreise, Rechtecke und Ellipsen konvexe Figuren, nicht aber Sterne oder Kreisringe. Insbesondere in der älteren Literatur (beispielsweise bei Blaschke, [B155]) werden konvexe Körper deshalb sehr anschaulich als *Eikörper* bezeichnet. Wenn sich die Integralgeometrie im allgemeinen auch mit beliebigen n -dimensionalen Punktmengen beschäftigt, so sollen hier im ersten Kapitel doch ausschließlich die konvexen Figuren untersucht werden.

Eine Gerade G wird als *Stützgerade* einer konvexen ebenen Figur K bezeichnet, wenn G eine Tangente an K ist. Sämtliche Stützgeraden von K bilden eine Kurvenschar, deren Enveloppe (Einhüllende) der Rand ∂K der konvexen Figur ist (siehe Abbildung 1.1). Wenn wir uns den Ursprung O eines Polarkoordinatensystems im Inneren von K denken, so kann eine Gerade G durch ihre Normalenrichtung φ und ihren Abstand p vom Ursprung, den sogenannten *Stützabstand* bezüglich der Richtung φ , beschrieben werden, d.h. die Normalform der Geradengleichung ist $x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi = p$. Für jede Richtung φ ergibt sich ein eindeutig bestimmter Tangentenabstand $p = p(\varphi)$, so daß wir die folgende allgemeine Tangentengleichung erhalten:

$$x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi = p(\varphi) \quad . \quad (1.1)$$

In Formel (1.1) ist φ der Parameter der Stützgeraden, und die jeweilige Stützfunktion $p(\varphi)$ beschreibt die konkrete Form der konvexen Figur.

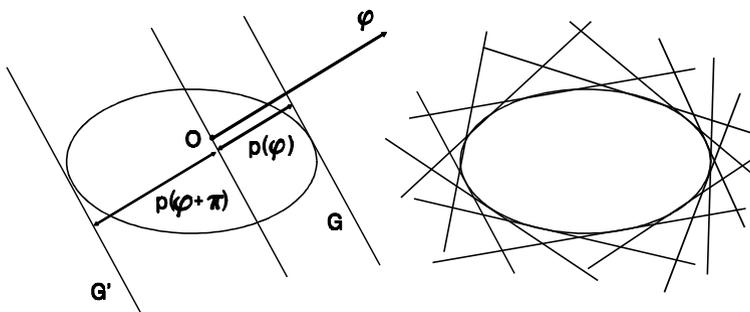


Abb. 1.1 - Stützgeraden und Enveloppe der Stützgeradenschar

1.2.2 Umfang und mittlere Breite

In der Gleichung (1.1) sind x und y die Koordinaten der auf einer Tangente t liegenden Punkte, wobei die Tangente durch den Winkel φ bestimmt ist. Wenn nun für einen zweiten Winkel φ' die Tangente t' festgelegt wird, dann haben wir mit den beiden Gleichungen

$$x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi = p(\varphi) \quad , \quad x \cdot \cos \varphi' + y \cdot \sin \varphi' = p(\varphi')$$

zwei lineare Gleichungen für die beiden Unbekannten x und y , so daß wir die Lösung

$$x = \frac{p(\varphi) \cdot \sin \varphi' - p(\varphi') \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi - \varphi')} \quad , \quad y = - \frac{p(\varphi) \cdot \cos \varphi' - p(\varphi') \cdot \cos \varphi}{\sin(\varphi - \varphi')}$$

für die Koordinaten des Schnittpunktes q der beiden Tangenten t und t' erhalten (siehe Abbildung 1.2).

Setzen wir jetzt $\varphi' = \varphi + \Delta\varphi$ und lassen die Differenz $\Delta\varphi$ sehr klein werden, so können wir die Gleichung $x \cos \varphi' + y \sin \varphi' = p(\varphi')$ mit $\sin \Delta\varphi \approx \Delta\varphi$ und $\cos \Delta\varphi \approx 1$ durch

$$x \cdot (\cos \varphi - \Delta\varphi \sin \varphi) + y \cdot (\sin \varphi + \Delta\varphi \cos \varphi) = p(\varphi) + \Delta p$$

ersetzen, was mit der ersten Gleichung $x \sin \varphi + y \cos \varphi = p(\varphi)$ sofort auf

$$p'(\varphi) = \frac{\partial p}{\partial \varphi} = -x \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi \quad (1.2)$$

führt. Das ist aber nichts anderes als die nach φ differenzierte Gleichung (1.1).

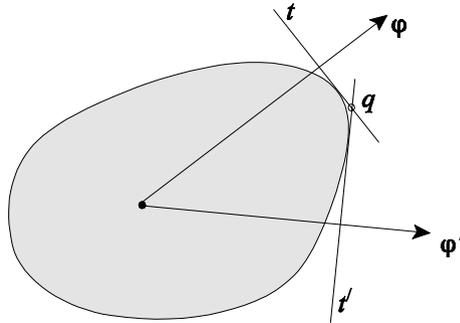


Abb. 1.2 - Schnittpunkt zweier Tangenten

Wenn man also die allgemeine Gleichung $f(x,y,c)=0$ einer Kurvenschar nach dem Scharparameter c differenziert (in unserem Fall also nach dem Winkel φ), so erhält man die Möglichkeit, durch Elimination des Scharparameters die Gleichung der Enveloppe der Kurvenschar zu bestimmen. In unserem Fall folgen aus der Gleichung (1.1) und aus der nach φ differenzierten Gleichung (1.2) sofort die beiden Koordinaten x und y als Funktionen von φ :

$$\begin{aligned} x &= p \cos \varphi - p' \sin \varphi \\ y &= p \sin \varphi + p' \cos \varphi \end{aligned} \quad (1.3)$$

Die sich aus (1.3) ergebenden Punkte $(x(\varphi), y(\varphi))$ liegen sämtlich auf der Enveloppe (der Einhüllenden) der Tangenten an die vorgegebene konvexe Figur (siehe Abbildung 1.2), d.h. (1.3) beschreibt den Rand dieser Figur (der Punkt $(x(\varphi), y(\varphi))$ ist der Berührungspunkt der Tangente t mit der Figur).

Da $p(\varphi)$ im Gleichungssystem (1.3) nur allgemein gegeben ist, kann man den Parameter φ aus diesen beiden Gleichungen nicht elimi-

nieren, um etwa eine Gleichung der Form $f(x,y)=0$ für den Rand der jeweiligen Figur zu erhalten. Das System (1.3) ist jedoch nichts anderes als die Parameterdarstellung der Enveloppe der Geradenschar (1.1) und damit die Parameterdarstellung des Randes ∂K der konvexen Figur K . Wenn sich der Winkel φ um einen kleinen Betrag $d\varphi$ ändert, so folgen aus (1.3) die differentiellen Änderungen von x und y :

$$\begin{aligned} dx &= -(p + p'') \sin\varphi \, d\varphi \\ dy &= +(p + p'') \cos\varphi \, d\varphi \end{aligned} \quad (1.4)$$

Diese Gleichung beschreibt, wie sich die Koordinaten des Berührungspunktes der zur Richtung φ senkrecht verlaufenden Tangente bei einer Vergrößerung oder Verkleinerung des Winkels um $d\varphi$ verändern. Die Wegdifferenz, die der Berührungspunkt dabei zurücklegt, ist durch

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = (p + p'') \, d\varphi = \varrho \, d\varphi \quad (1.5)$$

festgelegt. Die Größe ϱ gibt den Krümmungsradius des Randes ∂K der konvexen Figur K im Berührungspunkt der entsprechenden Tangente an (für konvexe Figuren können wir immer vereinbaren, daß das positive Vorzeichen der Wurzel in (1.5) verwendet wird, d.h., daß mit wachsendem φ auch die Bogenlänge zunimmt).

Die *Kurvenkrümmung* $\kappa = 1/\varrho$ ist ein Maß für die Richtungsänderung der Tangente in Abhängigkeit von der Bogenlänge s . Das Differential $\kappa ds = ds/\varrho = d\varphi$ beschreibt die Änderung des Tangentenwinkels, wenn die nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve von s bis $s + ds$ durchlaufen wird. Bei geschlossenen und überschneidungsfreien Kurven gilt also für die *totale Krümmung* τ die Formel

$$\tau = \oint \kappa \, ds = \oint d\varphi = 2\pi .$$

Die Totalkrümmung $\tau = 2\pi$ einer solchen Kurve entspricht der gesamten Änderung der Tangentenrichtung bei einem einmaligen Umlauf um die Kurve.

Wenn nun der Winkel φ einmal von 0 bis 2π läuft, dann hat der Berührungspunkt der Tangente den gesamten Rand ∂K überstrichen, d.h., der zurückgelegte Weg ist gleich dem Umfang von K :

$$U = \int_{\partial K} ds = \int_0^{2\pi} (p + p'') d\varphi = \int_0^{2\pi} p d\varphi . \quad (1.6)$$

Bei dieser Integration haben wir berücksichtigt, daß $p(\varphi)$ eine periodische Funktion ist, so daß die Integrale über beliebige Ableitungen von $p(\varphi)$ stets verschwinden.

Betrachten wir nun die Breite B der konvexen Figur K bezüglich einer gegebenen Richtung φ . Wenn der Koordinatenursprung innerhalb der Figur liegt (siehe Abbildung 1.3), ist

$$B(\varphi) = p(\varphi) + p(\varphi + \pi) . \quad (1.7)$$

Deshalb kann man die mittlere Breite der Figur bei Berücksichtigung von (1.6) durch die folgende einfache Formel berechnen:

$$\bar{B} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B(\varphi) d\varphi = \frac{U}{\pi} \quad (1.8)$$

Diese Formel ist einfach in ihrer Struktur und verblüffend in ihrer Aussage: Unabhängig davon, wie die konvexe Figur K aussieht, ist die mittlere Breite eindeutig durch den Umfang U von K bestimmt. Die Formel gilt nicht nur für kreis- oder ellipsenartige Figuren, sondern auch für konvexe Figuren „mit Ecken“, d.h. auch für ganz oder teilweise durch Strecken begrenzte konvexe Figuren und damit auch für konvexe Polygone. Speziell gilt das Barbiersche Theorem, daß alle Figuren konstanter Breite den gleichen Umfang besitzen.

Wir können die Formel (1.8) auch folgendermaßen interpretieren: Die „Anzahl“ $Z(\varphi)$ der Geraden, die senkrecht zur Richtung φ verlaufen und dabei die gegebene Figur schneiden, ist proportional zur Breite $B(\varphi)$. Also ist die „Gesamtanzahl“ Z_K aller dieser die Figur K schneidenden Geraden proportional dem Integral über $B(\varphi)$:

$$Z_K \sim \int_0^\pi B(\varphi) d\varphi = U \quad (1.9)$$

ier brauchte nur von 0 bis π integriert zu werden, da die beiden Richtungen φ und $\varphi+\pi$ der Geradenormalen dieselbe Gerade (allerdings mit unterschiedlicher Normalenrichtung) beschreiben. Wenn wir im Weiteren von „Anzahl aller Geraden“ sprechen, so werden wir darunter stets „ungerichtete“ Geraden verstehen, d.h. die beiden Geraden $G(p, \varphi)$ und $G(-p, \varphi+\pi)$ werden als identisch angesehen.

Der Umfang U einer konvexen Figur K ist also ein „integralgeometrisches Maß“ für Z_K , die „Anzahl aller Geraden“, die K schneiden. Wir haben das Wort *Anzahl* in Anführungsstriche gesetzt, da es sich hier nicht um 100 oder 10^6 oder 10^{100} Geraden handelt (also um irgendeine ganze Zahl), sondern dieses Maß ist dimensionsbehaftet, d.h. Z_K ist beispielsweise 1 Millimeter oder 1 Meter oder 1 Kilometer.

Ein einzelnes Geradenmaß hat in diesem Sinn keine zahlenmäßige Bedeutung. Wenn wir aber fragen, ob ein Kreis vom Durchmesser d oder aber ein Quadrat der Seitenlänge d von mehr Geraden getroffen werden, so finden wir das Verhältnis

$$\frac{Z_{\text{Kreis}}}{Z_{\text{Quadrat}}} = \frac{U_{\text{Kreis}}}{U_{\text{Quadrat}}} = \frac{\pi d}{4 d} \approx 0.7854 \quad , \quad (1.10)$$

d.h. die Anzahl der den Kreis treffenden Geraden beträgt nur etwa 78.5% der Anzahl aller das Quadrat schneidenden Geraden.

Bei einer Parallelprojektion in Richtung φ liefert die dazu senkrechte Breite $B(\varphi+\pi/2)$ einer konvexen Figur gleichzeitig die Länge $L(\varphi)$ der Schattenlinie (siehe Abbildung 1.3):

$$L(\varphi) = B(\varphi+\pi/2) = p(\varphi+\pi/2) + p(\varphi-\pi/2) \quad .$$

Damit erhalten wir für die mittlere Schattenlänge einer konvexen Figur sofort das Theorem von Barbier [Ba60]:

$$\bar{L} = \bar{B} = U/\pi \quad . \quad (1.11)$$

Es entsteht die interessante Frage, ob man aus der Kenntnis „aller“

Schattenlinien einer konvexen Figur oder aus der Kenntnis aller ihrer Breiten, d.h. aus der Kenntnis der Funktionen $L(\varphi)$ oder $B(\varphi)$, die Stützfunktion $p(\varphi)$ und damit die Gestalt der konvexen Figur ableiten kann. Dieses Problem ist beispielsweise von praktischer Bedeutung, wenn man aus der optisch gemessenen Breite von Walzstäben das Profil der Stäbe bestimmen soll.

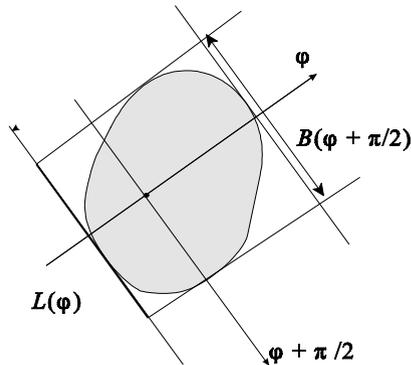


Abb. 1.3 - Breite $B(\varphi + \pi/2)$ und Schattenlinie $L(\varphi)$

Bei zentralsymmetrischen Figuren kann man den Koordinatenursprung derart wählen, daß $p(\varphi) = p(\varphi + \pi)$ gilt. Damit erhält man die Beziehung $L(\varphi) = 2p(\varphi + \pi/2) = B(\varphi + \pi/2)$ und folglich $p(\varphi) = B(\varphi)/2$.

Im allgemeinen Fall ist die Aufgabe, die Stützfunktion $p(\varphi)$ aus $B(\varphi)$ zu ermitteln, jedoch nicht zu lösen. Zum Beweis dieser Behauptung sind in Abbildung 1.4 drei Beispiele angegeben, bei denen zwar $B(\varphi) = \text{const}$ gilt, jedoch nur im Fall des Kreises $p(\varphi) = r$. Obwohl es sich um unterschiedliche Figuren handelt, sind alle Breitenfunktionen gleich.

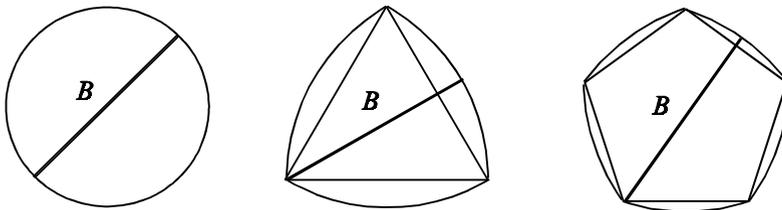


Abb. 1.4 - Figuren gleicher konstanter Breite

Alle diese Figuren werden auch als „Gleichdicke“ bezeichnet. Man kann das Bogendreieck (Abbildung 1.4 Mitte) zu einem Gleichdick ohne Ecken weiterentwickeln, indem man zu einer Parallelfigur übergeht (siehe Abschnitt 1.3.1).

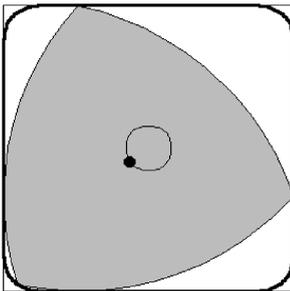
Statt von Gleichdicken spricht man bei solchen Objekten wie den in Abbildung 1.4 gezeigten auch von Reuleaux-Polygonen, weil der deutsche Ingenieur Reuleaux diese Objekte im Maschinenbau angewendet hat. Aber auch in anderen Zusammenhängen sind Gleichdicke – wie die folgenden vier Beispiele zeigen – als interessante geometrische Figuren anzutreffen. Der von Reuleaux konstruierte Bohrer ermöglicht es, „fast quadratische“ Löcher zu bohren. Dabei bewegt sich der Mittelpunkt des Gleichdicks exzentrisch auf einem kleinen Kreis.



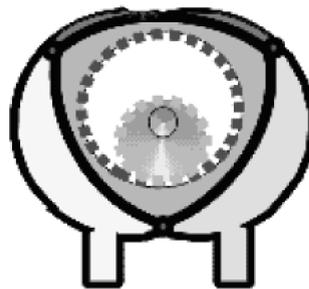
Englische Münze



Bogenfenster Notre-Dame



Reuleaux-Bohrer



Wankel-Motor

Auch im Wankel-Motor (Kreiskolbenmotor, benannt nach seinem Erfinder Felix Wankel) ist das Gleichdick zu finden. Der Wankelmotor ist ein Verbrennungsmotor, bei dem keine zylindrischen Kolben in einem Zylinder in axialer Richtung hin und her bewegt werden. Statt

dessen findet sich die umkehrfreie Bewegung eines so genannten Kreis-
kolbens, der – auf einer Exzenterwelle angeordnet – um seine eigene
Achse rotiert. Die Ecken des Kolbens stehen ständig in Kontakt mit
dem Motorgehäuse und bilden so drei unabhängige Arbeitsräume.

1.2.3 Fläche und mittlere Sehnenlänge

Um die Fläche F einer konvexen Figur bestimmen zu können, gehen
wir von der Abbildung 1.5 aus. Wenn wir uns die Figur aus infinitesi-
malen Dreiecken der Grundlinie ds und der Höhe $p(\varphi)$ zusamen-
gesetzt denken, dann folgt mit Formel (1.5) und $(p'/p)' = p''/p + p'/p^2$
sofort

$$F = \frac{1}{2} \int_{\partial K} p ds = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p(p + p'') d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p^2 - p'^2) d\varphi \quad (1.12)$$

Man kann die Fläche einer Figur aber auch dadurch bestimmen, daß
man die Figur in viele schmale parallele Streifen zerlegt.

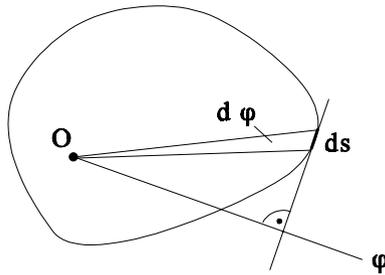


Abb. 1.5 - Zur Bestimmung der Fläche einer konvexen Figur

Der linke Kreis in Abbildung 1.6 gibt uns eine ungefähre Vorstellung
davon, wie die Geraden angeordnet sein könnten. Jede der Geraden
 $x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi = p$ liefert (bei konvexen Figuren) genau eine Sehne, falls
es zum Schnitt kommt. Die entsprechende Sehnenlänge sei $s(\varphi)$. Die
„Summe“ S_φ aller Sehnenlängen bei fester Normalenrichtung φ der
Geraden – besser gesagt, das integralgeometrische Maß der Sehnen-
längensumme – ist dann durch

$$S_\varphi \sim \int_{p(\varphi-\pi)}^{p(\varphi)} s(p,\varphi) dp = F_\varphi = F \tag{1.13}$$

gegeben, wobei F wieder die Fläche der konvexen Figur ist. Dieses Ergebnis ist nicht allzu überraschend, da die Zerlegung der Figur in schmale parallele Streifen der Breite Δp im Grenzwert $\Delta p \rightarrow 0$ gerade den Flächeninhalt liefert. Das integralgeometrische Maß S_K der „Summe aller Sehnenlängen“ ergibt sich nun durch Integration über alle Winkel, d.h. es ist

$$S_K = \int_0^\pi S_\varphi d\varphi \sim \int_0^\pi F_\varphi d\varphi = \pi F \tag{1.14}$$

Auch hier braucht uns nicht zu stören, daß das Maß S_K die Dimension mm^2 oder m^2 oder km^2 besitzt – es ist eben nur ein „Maß“. Da andererseits die „Anzahl aller Sehnen“ N_K durch die Formel (1.9) geliefert wird, erhalten wir für die mittlere Sehnenlänge die Formel

$$\bar{s}_K = \frac{S_K}{N_K} = \frac{\pi F}{U} \tag{1.15}$$

Wesentlich bei den hier dargestellten Überlegungen ist, daß die Verteilung der die Figur schneidenden Geraden homogen und isotrop ist. Um diese Forderung zu veranschaulichen, sind in Abbildung (1.6) „gleichverteilte“ Sehnen auf unterschiedliche Art in drei Kreise eingezeichnet (Bertrandsches Paradoxon, siehe dazu [Sc92]).

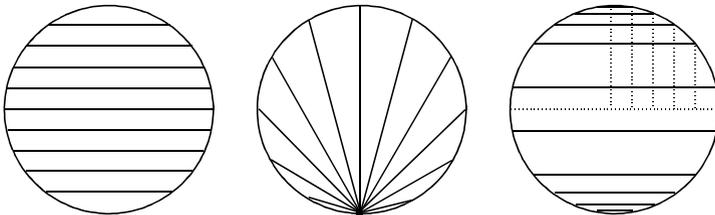


Abb. 1.6 - „Gleichverteilte“ Sehnen in Kreisen

Die Sehnenverteilung im linken Kreis entspricht der bisher verwendeten Geradendefinition $x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi = p$. Im mittleren Kreis wurden die Sehnen so eingezeichnet, daß der zweite Endpunkt gleichverteilt auf dem Kreisumfang liegt. Und schließlich sind die Sehnen des dritten Kreises durch äquidistante Differenzen der Lage ihrer Endpunkte auf dem Kreisdurchmesser charakterisiert. Berechnet man nun die mittlere Sehnenlänge in diesen drei Fällen, so sind drei Integrale auszuwerten, die die folgenden Werte besitzen:

$$I_1 \sim \frac{1}{R} \int_0^R s(h) dh = \frac{2}{R} \int_0^R \sqrt{R^2 - h^2} dh = \frac{\pi R}{2} = 1.570...R$$

$$I_2 \sim \frac{1}{\pi R} \int_0^{\pi R} s(b) db = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi R} \sin\left(\frac{b}{2R}\right) db = \frac{4R}{\pi} = 1.273...R \quad (1.16)$$

$$I_3 \sim \frac{1}{R} \int_0^R s(r) dr = \frac{2}{R} \int_0^R r dr = R$$

Welches dieser drei Ergebnisse ist nun das „richtige“? Intuitiv würden wir für das erste Resultat plädieren, weil die Sehnen „so schön gleichmäßig“ eingezeichnet sind. Aber man kann auch eine mathematisch fundierte Argumentation für das Ergebnis I_1 liefern, indem man fordert, daß die den Kreis schneidenden Sehnen so zu wählen sind, daß sich die Integrationen über „alle Sehnen“ als bewegungsinvariant erweisen (siehe Abbildung 1.7 für die beiden ersten Varianten).

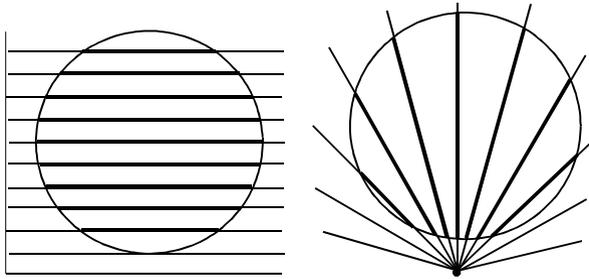


Abb. 1.7 - Gleichverteilte Sehnen in verschobenen Kreisen

1.3 Einige Beispiele

1.3.1 Parallelfiguren

Betrachten wir zu Anfang ein ganz einfaches Beispiel. Es sei ein Segment S der Länge l im eindimensionalen Raum gegeben (das Segment liegt auf einer Geraden). Ein zweites Segment S' der Länge $2r$ wird mit seinem Zentrum auf alle Punkte von S geschoben. Welche Figur ergibt sich als Überlagerung aller dieser Kombinationen? Wie die folgende Skizze zeigt, entsteht ein neues Segment S'' der Länge $L(S'') = l + 2r = L(S) + 2r$. Die Menge der Punkte des Segmentes S'' wird als „Parallelmenge des Segmentes S im Abstand r “ bezeichnet.

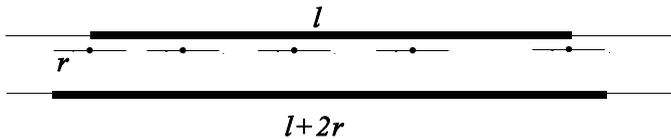


Abb. 1.8 - Eindimensionale Parallelfigur

Diese Operation der Vergrößerung einer Figur ist von Steiner erstmalig betrachtet worden [St40]. Sie läßt sich auch im Zweidimensionalen durchführen, wie hier für einen Kreis, ein Quadrat und ein gleichseitiges Dreieck gezeigt werden soll (alle Punkte der Ebene mit einem Abstand $d \leq r$ zu der vorgegebenen Figur werden mit berücksichtigt).



Abb. 1.9 - Zweidimensionale Parallelfiguren

Die Flächen der drei grauen Objekte kann man direkt elementargeometrisch berechnen. Es ergeben sich die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
 F(K_r) &= \pi a^2 + 2\pi ar + \pi r^2 \\
 F(Q_r) &= a^2 + 4ar + \pi r^2 \\
 F(D_r) &= a^2\sqrt{3}/4 + 3ar + \pi r^2
 \end{aligned}$$

Diese drei Formeln lassen sich dahingehend verallgemeinern, daß es eine generelle Beziehung zwischen den geometrischen Grundgrößen Fläche F und Umfang U der jeweiligen Ausgangsfigur und den entsprechenden Werten der vergrößerten Figur gibt:

$$F(K_r) = F(K) + U(K) \cdot r + \pi r^2 .$$

Der Beweis dafür soll jetzt angegeben werden. Als „Parallelfigur“ einer konvexen Figur K bestimmt man die Figur K_r , deren Rand ∂K_r überall den Abstand r vom Rand ∂K hat. Diese Vergrößerung kann dadurch erreicht werden, daß man zur Stützfunktion $p(\varphi)$ der Figur K einfach den Abstand r addiert:

$$p_r(\varphi) = p(\varphi) + r . \quad (1.17)$$

Für Kreise ist diese Beziehung unmittelbar einleuchtend. Aber sie gilt auch für beliebige konvexe Figuren, da die Verbindungslinie zweier nächstgelegener Punkt von ∂K und ∂K_r senkrecht zu den Randlinien verlaufen muß, so daß die entsprechenden Tangenten genau den Abstand r voneinander besitzen.

Wenn (1.17) gilt, dann kann man sofort weitere Schlußfolgerungen für Parallelfiguren ableiten. Wegen (1.6) gilt für den Umfang der Parallelfigur

$$U_r = \int_0^{2\pi} p_r(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} (p(\varphi) + r) d\varphi = U + 2\pi r \quad (1.18)$$

und nach Formel (1.12) erhält man für die Fläche der Parallelfigur

$$F_r = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[p_r^2(\varphi) - \left(\frac{dp_r(\varphi)}{d\varphi} \right)^2 \right] d\varphi = F + r \cdot U + \pi r^2 . \quad (1.19)$$

Man kann die Flächenformel (1.12) auch noch auf andere Weise auswerten. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p^2 - p'^2) d\varphi \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p^2 d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\bar{p} + (p - \bar{p}))^2 d\varphi
 \end{aligned}
 \tag{1.20}$$

Hier bedeutet \bar{p} den Mittelwert von $p(\varphi)$ über den gesamten Vollwinkel, d.h. den Mittelwert im Bereich von 0 bis 2π . Also ist $\bar{p} = U/2\pi$ (siehe Formel (1.8)). Die weitere Auswertung von (1.20) liefert dann

$$F \leq \pi \bar{p}^2 + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p - \bar{p})^2 d\varphi \leq \pi \bar{p}^2$$

oder

$$F \leq U^2 / 4\pi \quad \text{bzw.} \quad f = U^2 / 4\pi F \geq 1$$

wobei f der sogenannte Formfaktor ist.

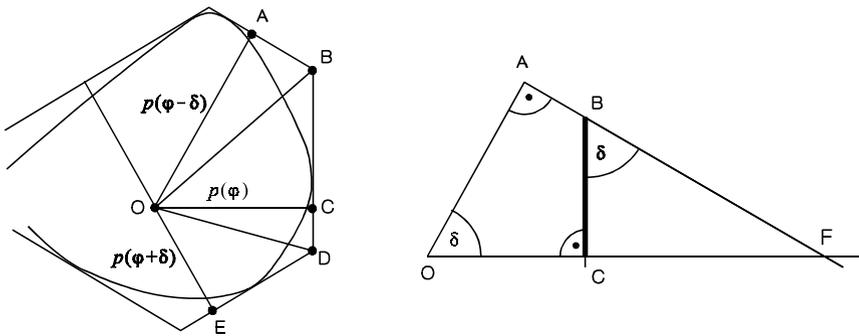


Abb. 1.10 - Seitenlänge im umschreibenden N -Eck

Die Ungleichung (1.22) wird als „isoperimetrische Ungleichung“ bezeichnet. Sie besagt, daß unter allen Figuren gleichen Umfangs (insbesondere unter allen konvexen Figuren) der Kreis die größte Fläche besitzt, denn für Kreise gilt mit $p = \bar{p}$ die Gleichung $F = U^2/4\pi$.

Auch in der Bildverarbeitung wird der Ausdruck $f = U^2/4\pi F$ als charakteristisches Merkmal verwendet. Der Formfaktor f hängt nur von der Form einer Figur ab, nicht von ihrer Größe oder ihrer Lage, so daß auf diese Weise Kreise und Quadrate oder die Buchstaben O und D leicht voneinander unterschieden werden können.

1.3.2* Umschreibende N-Ecke

Statt der zwei parallelen Tangenten zur Definition der Breite einer Figur kann man auch insgesamt N Tangenten an die (konvexe) Figur legen, die senkrecht zu den Richtungen

$$\varphi_n = \varphi + n \frac{2\pi}{N} \quad \text{für } n \in 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.23)$$

stehen. Für jedes ganzzahlige $n > 2$ entstehen umschreibende N -Ecke, die im allgemeinen – bis auf das umschreibende Dreieck – unterschiedlich lange Seiten besitzen, aber an allen Ecken gleiche Innenwinkel $\pi - 2\pi/N$ aufweisen. Mit Hilfe der Stützfunktion ist es jetzt möglich, die Länge der zur Richtung φ senkrechten Seite eines umschreibenden N -Ecks zu bestimmen (siehe Abbildung 1.10).

Es ist $BC/CF = OA/AF$ oder $BC = CF \cdot \cot \delta$ mit $\delta = 2\pi/N$. Da aber weiter die einfach zu beweisenden Beziehungen $CF = OF - OC = -OC + OA/\cos \delta$ und $OA = p(\varphi - \delta)$ bzw. $OC = p(\varphi)$ gelten, folgt

$$BC = \frac{p(\varphi - \delta)}{\sin \delta} - \frac{p(\varphi)}{\tan \delta} . \quad (1.24)$$

Genauso können wir die Strecke CD bestimmen, so daß wir für die Seitenlänge $s(\varphi) = BD$ den Ausdruck

$$s(\varphi) = \frac{p(\varphi + \delta) + p(\varphi - \delta) - 2p(\varphi) \cdot \cos \delta}{\sin \delta} \quad (1.25)$$

erhalten. Der Mittelwert \bar{s} dieser einen Seite über alle Winkel φ ist mit $\bar{p} = \bar{B} / 2 = U/2\pi$ durch die Formel

$$\bar{s} = \frac{U}{\pi} \cdot \frac{1 - \cos \delta}{\sin \delta} = \frac{U}{\pi} \cdot \tan \frac{\delta}{2} \tag{1.26}$$

gegeben. Da nun die Mittelwerte aller N Seiten des umschreibenden N -Ecks gleich sind, folgt für den mittleren Umfang $\bar{U}_N = N \cdot \bar{s}$ des umschreibenden N -Ecks das Resultat

$$\bar{U}_N = U \cdot \frac{N}{\pi} \cdot \frac{1 - \cos \delta}{\sin \delta} = U \cdot \frac{N}{\pi} \cdot \tan \frac{\pi}{N} = U \cdot f_N \tag{1.27}$$

Die folgende Tabelle 1.1 gibt für einige Werte von N die zugehörigen Faktoren f_N an. Der Grenzwert von f_N erreicht für $N \rightarrow \infty$ den Wert 1, d.h. dann stimmen die Umfänge der Figur und des umschreibenden N -Ecks miteinander überein.

Tabelle 1.1 - Faktor f_N aus Formel (1.27)

N	f_N	N	f_N
3	1.65399	10	1.03425
4	1.27324	12	1.02349
5	1.15633	15	1.01488
6	1.10266	20	1.00831
7	1.07303	30	1.00367
8	1.05479	60	1.00091

In der Praxis der digitalen Bildverarbeitung werden oft umschreibende Rechtecke und umschreibende Achtecke von (nicht notwendigerweise konvexen) Objekten untersucht. Allerdings wird dabei nicht „über alle Rotationswinkel“ gemittelt, sondern man bestimmt nur für eine einzige Lage der Figur U_4 bzw. U_8 . Den ungefähren Umfang der konvexen

Hülle des jeweiligen Objektes kann man dann mittels der einfachen Formeln $U = \overline{U}_N / f_N$ durch $U \approx 0.79U_4$ bzw. durch $U \approx 0.95U_8$ abschätzen.

1.3.3* Croftonscher Seilliniensatz

Abschließend soll mit dem Croftonschen Seilliniensatz noch ein hübsches Beispiel für die hier entwickelten Formeln gegeben werden [Cr68]. Es seien K_1 und K_2 zwei sich nicht schneidende konvexe Figuren. Einmal wird ein Seil um beide Figuren K_1 und K_2 gelegt und zum anderen wird ein zweites Seil zwischen den Figuren gekreuzt (siehe Abbildung 1.11). Das ungekreuzte Seil beschreibt den Rand der gemeinsamen konvexen Hülle K_{ges} der beiden Figuren, die den Umfang U_{ges} besitzt. Durch K_{ges} verlaufen

- Z_{10} Geraden, die K_1 treffen, nicht aber K_2
- Z_{20} Geraden, die nur K_2 treffen, nicht aber K_1
- Z_{12} Geraden, die K_1 und K_2 treffen,
- Z_{00} Geraden, die weder K_1 noch K_2 treffen, d.h. K_1 und K_2 trennen.

Unter den Größen Z_{10} , Z_{20} usw. sollen integralgeometrische Maße verstanden werden, so daß wir wegen Formel (1.9) im Fall konvexer Figuren statt dieser Maße auch die Umfänge der Figuren verwenden können. Es ist mit dem stets gleichen Proportionalitätsfaktor μ der Umfang durch $U_{\text{ges}} = \mu \cdot Z_{\text{ges}} = \mu \cdot (Z_{10} + Z_{20} + Z_{12} + Z_{00})$ gegeben.

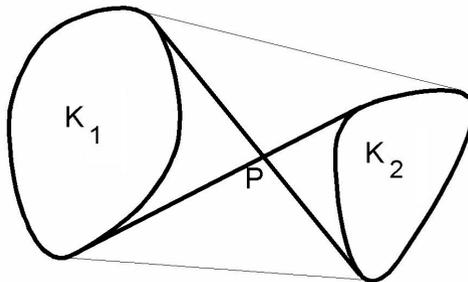


Abb. 1.11 - Zum Croftonschen Seilliniensatz

Nun konstruieren wir aus K_1 und dem Kreuzungspunkt P die konvexe Figur K_{p_1} und aus K_2 und P die konvexe Figur K_{p_2} . Die K_{p_1} treffenden Geraden lassen sich aufteilen in

- Z_{10} Geraden, die nur K_1 treffen, nicht aber K_2
- Z_{12} Geraden, die K_1 und K_2 treffen,
- Z_{p_1} Geraden, die zwar K_{p_1} treffen, nicht aber K_1
(also durch die „Spitze“ zwischen P und K_1 gehen).

Eine ähnliche Überlegung gilt für K_{p_2} . Es ist also (wieder mit dem festen Faktor μ)

$$U_{p_1} = \mu(Z_{10} + Z_{12} + Z_{p_1}) \quad , \quad U_{p_2} = \mu(Z_{20} + Z_{12} + Z_{p_2}) \quad . \quad (1.28)$$

Mit den Formeln $U_{\text{cross}} = U_{p_1} + U_{p_2} = \mu \cdot (Z_{10} + Z_{20} + Z_{12} + Z_{p_1} + Z_{p_2}) + Z_{12}$ und $Z_{p_1} + Z_{p_2} = Z_{00}$ finden wir dann den Seilliniensatz von Crofton in der Form

$$U_{\text{cross}} = U_{\text{ges}} + \mu Z_{12} \quad , \quad U_{\text{cross}} = U_1 + U_2 + \mu Z_{00} \quad . \quad (1.29)$$

Der Anteil der beide konvexen Figuren treffenden Geraden ist daher einfach durch das Verhältnis

$$\frac{Z_{12}}{Z_{\text{ges}}} = \frac{U_{\text{cross}} - U_{\text{ges}}}{U_{\text{ges}}} \quad (1.30)$$

gegeben, und der Anteil der zwischen den beiden Figuren verlaufenden Geraden durch das Verhältnis

$$\frac{Z_{00}}{Z_{\text{ges}}} = \frac{U_{\text{cross}} - U_1 - U_2}{U_{\text{ges}}} \quad . \quad (1.31)$$

1.3.4 Projektionen und orthogonale Schatten

Hier soll noch einmal zu dem bereits in Abschnitt 1.2.2 untersuchten Problem der Schattenbildung zurückgekehrt werden (siehe Abbildung 1.3). Wir hatten dort die einfache Formel $\bar{L} = \bar{B} = U/\pi$ für die mittlere Schattenlänge einer konvexen Figur gefunden.

Eine etwas andere Situation tritt auf, wenn die vorgegebene konvexe Figur durch einen Streifen der Dicke d geschnitten wird und uns der Schatten der durch den Schnitt entstehenden Teilfigur interessiert (Abb. 1.12). Dann liefert die maximale Ausdehnung der Schnittfigur in horizontaler Richtung die Länge der Schattenlinie. Dabei wird manchmal nur die untere (oder obere) Begrenzung des Streifens entscheidend sein (Skizze links), manchmal werden die untere und die obere Begrenzung den Schatten festlegen (mittlere Skizze), und es ist auch möglich, daß irgendwelche Extrempunkte innerhalb des Streifens für die Schattenbildung verantwortlich sind (Skizze rechts).

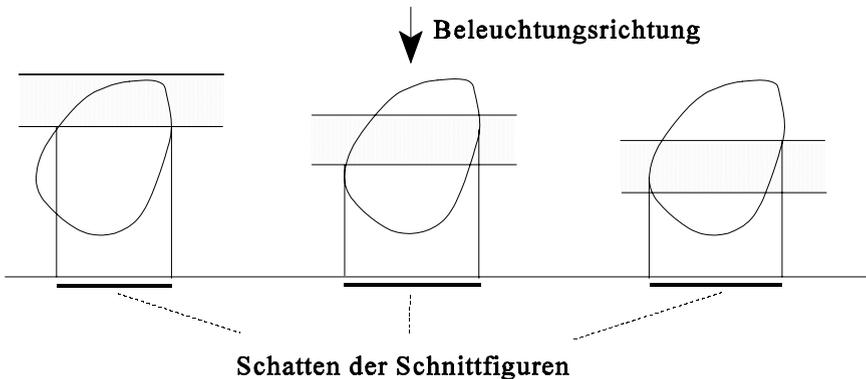


Abb. 1.12 - Schattenbildung bei dicken Schnitten

Alle diese Fälle lassen sich für eine festgehaltene Beleuchtungsrichtung φ auch dadurch erzeugen, daß man die originale Figur in den beiden Richtungen φ und $\varphi + \pi$ um die Strecke $d/2$ ausdehnt, daß man also statt der in Abschnitt 1.3.1 untersuchten Parallelfiguren K_r die „gestreckten“ Figuren $K_{d/2}(\varphi)$ betrachtet. Dabei handelt es sich – exakt gesprochen – um die Minkowski-Summe $K_r \oplus S$ zwischen der Figur K und einer Strecke S der Länge d (siehe Abbildung 1.13 und Abschnitt 3.1.7).

Jede einzelne Situation aus Abbildung 1.12 kann dann durch das Schneiden der gestreckten Figur mit einer orthogonal zur Richtung φ verlaufenden Geraden angesehen werden (Schnitt der Dicke $d=0$), und die Länge des in Abbildung 1.12 auftretenden Schattens ist gleich der Länge einer Sehne der gestreckten Figur.

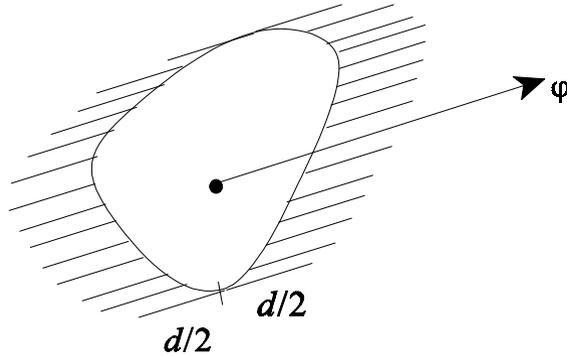


Abb. 1.13 - „Streckung“ einer Figur

Die Ausdehnung der originalen Figur in Richtung φ ist durch die einfache Formel $a(\varphi) = p(\varphi) + p(\varphi + \pi)$ gegeben, wobei $p(\varphi)$ die originale Stützfunktion ist. Diese Ausdehnung ist ein Maß N_φ für alle die Figur treffenden Geraden, die senkrecht zur Richtung φ verlaufen. Also ist das Maß aller die gestreckten Figur treffenden Geraden durch die Formel $N_{\varphi, d/2} = a_{d/2}(\varphi) = a(\varphi) + d$ bestimmt. Integrieren wir jetzt über sämtliche Richtungen φ zwischen 0 und π , so ergibt sich wegen (1.9) das Maß aller die gestreckte Figur schneidenden Geraden:

$$N_{d/2} = N + \pi d = U + \pi d . \tag{1.32}$$

Das integralgeometrische Maß S_φ für die Länge aller Sehnen senkrecht zur Richtung φ ist nach (1.13) durch die Fläche F der jeweiligen Figur gegeben. Also erhalten wir für die gestreckte Figur die einfache Beziehung $S_{\varphi, d/2} = F + d(p(\varphi + \pi/2) + p(\varphi - \pi/2))$, weil die zusätzlich in Abbildung 1.13 auftretende Fläche das Produkt aus d und der zur Richtung φ orthogonalen Breite $b(\varphi + \pi/2)$ der Figur ist. Daher ergibt sich das über alle Richtungen φ zwischen 0 und π integrierte Maß für die Sehnenlänge durch

$$S_{d/2} = S + d \int_0^\pi b(\varphi + \pi/2) d\varphi = \pi F + d U ,$$

und wir finden die mittlere Sehnenlänge der gestreckten Figur als

$$\bar{s}(d) = \frac{S_{d/2}}{N_{d/2}} = \frac{\pi F + Ud}{U + \pi d} . \quad (1.33)$$

Für $d=0$ erhalten wir als mittlere Sehnenlänge wiederum das Ergebnis (1.15). In der Grenze $d \rightarrow \infty$ ist die Schattenlänge schließlich durch die Breite der Figur gegeben, so daß das Resultat (1.11) gewonnen wird.

1.4 Aufgaben

- A1.1 Berechne die Stützfunktion $p(\varphi)$ eines achsenparallelen Quadrates der Seitenlänge a , dessen Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems liegt!
- A1.2 Untersuche, wie sich die Stützfunktion einer konvexen Figur ändert, wenn die Figur um Δx und Δy verschoben wird!
- A1.3 Gegeben sei ein Quadrat der Seitenlänge a , das durch Geraden geschnitten wird. Berechne den Anteil v derjenigen Geraden, die gegenüberliegende Quadratseiten schneiden!
- A1.4 Untersuche das in Aufgabe 1.3 gestellte Problem für beliebige Rechtecke und zeige, daß der minimale Anteil v für Quadrate erreicht wird!



<http://www.springer.com/978-3-540-37229-5>

Integralgeometrie für Stereologie und Bildrekonstruktion

Voss, K.

2007, XI, 231 S., Softcover

ISBN: 978-3-540-37229-5