9

*Stetige Abbildungen (Allgemeine Theorie)

In diesem Kapitel werden wir die Eigenschaften stetiger Abbildungen, die wir früher für Funktionen mit numerischen Werten und Abbildungen vom Typus $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ formuliert haben, verallgemeinern und aus einem vereinheitlichten Blickwinkel betrachten. Dabei werden wir eine Anzahl einfacher, aber dennoch wichtiger Konzepte einführen, die überall in der Mathematik benutzt werden.

9.1 Metrische Räume

9.1.1 Definition und Beispiele

Definition 1. Wir sagen, dass eine Menge X mit einer *Metrik* oder einer *metrischen Raumstruktur* versehen ist oder ein *metrischer Raum* ist, wenn eine Funktion

$$d : X \times X \to \mathbb{R} \tag{9.1}$$

aufgestellt werden kann, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

a) $d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$,
b) $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$ (Symmetrie),
c) $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$ (Dreiecksungleichung),

wobei x_1, x_2, x_3 beliebige Elemente von X sind.

In diesem Fall wird die Funktion (9.1) als *Metrik* oder als *Abstand* auf X bezeichnet.

Daher ist ein *metrischer Raum* ein Paar (X, d), das aus einer Menge X und einer auf ihr definierten Metrik besteht.

In Übereinstimmung mit geometrischer Terminologie werden die Elemente von X *Punkte* genannt.

Wir merken an, dass wir für $x_3 = x_1$ in der Dreiecksungleichung unter Berücksichtigung der Bedingungen a) und b) der Definition einer Metrik erhalten, dass

$$0 \le d(x_1, x_2)\ ,$$

d.h., ein Abstand, der die Axiome a), b) und c) erfüllt, ist nicht negativ.

Wir wollen einige Beispiele betrachten.

Beispiel 1. Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen wird zu einem metrischen Raum, wenn wir für je zwei Zahlen x_1 und x_2 wie gewohnt $d(x_1, x_2) = |x_2 - x_1|$ definieren.

Beispiel 2. Wir können auch andere Metriken auf $\mathbb{R}$ einführen. Eine triviale Metrik ist etwa die diskrete Metrik, in der der Abstand zwischen je zwei verschiedenen Punkten gleich 1 ist.

Die folgende Metrik auf $\mathbb{R}$ ist inhaltsvoller. Sei $x \mapsto f(x)$ eine nicht negative Funktion, die für $x \ge 0$ definiert ist und die für $x = 0$ verschwindet. Ist diese Funktion streng konvex, dann erhalten wir, wenn wir für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$d(x_1, x_2) = f(|x_1 - x_2|) \tag{9.2}$$

setzen, eine Metrik auf $\mathbb{R}$.

Die Axiome a) und b) gelten offensichtlich und die Dreiecksungleichung folgt einfach aus der strengen Monotonie von f und der Gültigkeit der folgenden Relation für $0 < a < b$:

$$f(a + b) - f(b) < f(a) - f(0) = f(a).$$

Insbesondere könnten wir $d(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 - x_2|}$ oder $d(x_1, x_2) = \frac{|x_1 - x_2|}{1+|x_1 - x_2|}$ einführen. Im letzteren Fall wäre der Abstand zwischen zwei Punkten auf der Geraden stets kleiner als 1.

Beispiel 3. Neben dem traditionellen Abstand

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_1^i - x_2^i|^2} \tag{9.3}$$

zwischen Punkten $x_1 = (x_1^1, \dots, x_1^n)$ und $x_2 = (x_2^1, \dots, x_2^n)$ in $\mathbb{R}^n$ können wir für $p \ge 1$ auch den Abstand

$$d_p(x_1, x_2) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_1^i - x_2^i|^p \right)^{1/p} \tag{9.4}$$

einführen. Die Gültigkeit der Dreiecksungleichung für die Funktion (9.4) folgt aus der Minkowskischen Ungleichung (vgl. Absatz 5.4.2).

Beispiel 4. Wenn wir beim Lesen eines Textes auf ein Wort mit falschen Buchstaben treffen, können wir das Wort ohne allzu viele Schwierigkeiten korrigieren, falls die Anzahl der Fehler nicht zu groß ist. Die Fehlerkorrektur ist jedoch eine Operation, die manchmal mehrdeutig ist. Aus diesem Grund müssen wir, wenn andere Bedingungen gleich sind, der Korrektur des fehlerhaften Textes den Vorzug geben, die am wenigsten Korrekturen erfordert. Dementsprechend wird in der Chiffriertheorie die Metrik (9.4) mit $p = 1$ auf der Menge aller endlichen Folgen der Länge n, die aus Nullen und Einsen bestehen, eingesetzt.

Geometrisch kann die Menge derartiger Folgen als die Menge von Ecken des Einheitswürfels $I = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, 0 \leq x^i \leq 1,\, i = 1, \ldots, n\}$ in $\mathbb{R}^n$ interpretiert werden. Der Abstand zwischen zwei Ecken entspricht der Anzahl von Vertauschungen von Nullen und Einsen, die nötig sind, um die Koordinaten einer Ecke aus denen einer anderen zu erhalten. Jede derartige Vertauschung steht für einen Gang entlang einer Würfelseite. Daher entspricht dieser Abstand dem kleinsten Weg von einer Ecke zu einer anderen entlang den Seiten des Würfels.

Beispiel 5. Beim Vergleich der Ergebnisse zweier Reihen mit n Messungen derselben Größe ist die am häufigsten benutzte Metrik (9.4) mit $p = 2$. Der Abstand zwischen Punkten in dieser Metrik wird üblicherweise *mittlere quadratische Abweichung* genannt.

Beispiel 6. Wenn wir in (9.4) zum Grenzwert für $p \to +\infty$ übergehen, dann erhalten wir, wie wir leicht sehen können, die folgende Metrik in $\mathbb{R}^n$:

$$d(x_1, x_2) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_1^i - x_2^i| \,. \tag{9.5}$$

Beispiel 7. Die Menge $C[a, b]$ der Funktionen, die auf einem abgeschlossenen Intervall stetig sind, wird zum metrischen Raum, wenn wir den Abstand zwischen zwei Funktionen f und g zu

$$d(f, g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)| \tag{9.6}$$

definieren. Die Axiome a) und b) für eine Metrik gelten offensichtlich und die Dreiecksungleichung folgt aus den Ungleichungen

$$|f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \leq d(f, g) + d(g, h) \,,$$

d.h.,

$$d(f, h) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - h(x)| \leq d(f, g) + d(g, h) \,.$$

Die Metrik (9.6) – die sogenannte *gleichförmige* oder *Tschebyscheff-Metrik* in $C[a, b]$ – wird benutzt, wenn wir eine Funktion durch eine andere (beispielsweise ein Polynom) ersetzen wollen, mit der es möglich wird, Funktionswerte in jedem Punkt $x \in [a, b]$ mit einer vorgegebenen Genauigkeit zu berechnen. Die Größe $d(f, g)$ charakterisiert die Genauigkeit einer derartigen Näherungsrechnung.

Die Metrik (9.6) bildet die Metrik (9.5) in $\mathbb{R}^n$ nach.

Beispiel 8. Ähnlich wie die Metrik (9.4) können wir in $C[a,b]$ für $p \geq 1$ die Metrik

$$d_p(f,g) = \left(\int_a^b |f-g|^p(x)\,dx \right)^{1/p} \tag{9.7}$$

einführen.

Aus der Minkowskischen Ungleichung für Integrale, die wir, indem wir zum Grenzwert übergehen, aus der Minkowskischen Ungleichung für Riemannsche Summen erhalten können, folgt, dass dies tatsächlich für $p \geq 1$ eine Metrik ist.

Die folgenden Spezialfälle der Metrik (9.7) sind besonders wichtig: $p = 1$, die Integralmetrik, $p = 2$, die Metrik der mittleren quadratischen Abweichung und $p = +\infty$, die gleichförmige Metrik.

Der mit der Metrik (9.7) versehene Raum $C[a,b]$ wird oft als $C_p[a,b]$ bezeichnet. Es lässt sich zeigen, dass $C_\infty[a,b]$ dem Raum $C[a,b]$, versehen mit der Metrik (9.6), entspricht.

Beispiel 9. Die Metrik (9.7) hätte auch auf der Menge $\mathcal{R}[a,b]$ der auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ definierten Riemann-integrierbaren Funktionen eingesetzt werden können. Da das Integral des Betrags der Differenz zweier Funktionen jedoch verschwinden kann, auch wenn die beiden Funktionen nicht identisch sind, gilt Axiom a) in diesem Fall nicht. Wir wissen nichtsdestotrotz, dass das Integral einer nicht negativen Funktion $\varphi \in \mathcal{R}[a,b]$ genau dann gleich Null ist, wenn in fast allen Punkten des abgeschlossenen Intervalls $[a,b]$ gilt, dass $\varphi(x) = 0$.

Wenn wir daher $\mathcal{R}[a,b]$ in Äquivalenzklassen von Funktionen einteilen, indem wir zwei Funktionen in $\mathcal{R}[a,b]$ als äquivalent betrachten, wenn sie sich in höchstens einer Menge mit Maß Null unterscheiden, dann wird durch (9.7) in der Tat eine Metrik auf der Menge $\widetilde{\mathcal{R}}[a,b]$ derartiger Äquivalenzklassen definiert. Die Menge $\widetilde{\mathcal{R}}[a,b]$, versehen mit dieser Metrik, wird durch $\widetilde{\mathcal{R}}_p[a,b]$ oder manchmal einfach durch $\mathcal{R}_p[a,b]$ symbolisiert.

Beispiel 10. Auf der Menge $C^{(k)}[a,b]$ von Funktionen, die auf $[a,b]$ definiert sind und stetige Ableitungen bis einschließlich zur Ordnung k besitzen, können wir die folgende Metrik definieren:

$$d(f,g) = \max\{M_0, \ldots, M_k\} \ , \tag{9.8}$$

mit

$$M_i = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(i)}(x) - g^{(i)}(x)| \ , \quad i = 0, 1, \ldots, k \ .$$

Wenn wir die Tatsache ausnutzen, dass (9.6) eine Metrik ist, lässt sich einfach zeigen, dass (9.8) ebenfalls eine Metrik ist.

Angenommen, f sei die Koordinate eines sich bewegenden Punktes, die wir als Funktion nach der Zeit betrachten. Wenn wir den zulässigen Bereich, in dem sich der Punkt im Zeitintervall $[a, b]$ bewegen kann, einschränken und das Teilchen eine bestimmte Geschwindigkeit nicht überschreiten darf und wir zusätzlich eine Gewissheit haben wollen, dass die Beschleunigungen einen bestimmten Wert nicht überschreiten können, dann ist es nur natürlich, die Menge $\{\max_{a \le x \le b} |f(x)|, \max_{a \le x \le b} |f'(x)|, \max_{a \le x \le b} |f''(x)|\}$ für eine Funktion $f \in C^{(2)}[a, b]$ zu betrachten und mit diesen Charakteristika zwei Bewegungen f und g als nahe beieinander zu betrachten, wenn für sie die Größe (9.8) klein ist.

Diese Beispiele zeigen, dass eine vorgegebene Menge auf verschiedene Arten mit einer Metrik versehen werden kann. Die Wahl der eingesetzten Metrik wird üblicherweise durch die Problemstellung bestimmt. Im Augenblick sind wir an den allgemeinsten Eigenschaften metrischer Räume interessiert, den Eigenschaften, die allen Metriken inhärent sind.

9.1.2 Offene und abgeschlossene Teilmengen metrischer Räume

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Im allgemeinen Fall, wie wir es schon für $X = \mathbb{R}^n$ in Abschnitt 7.1 getan haben, können wir auch das Konzept einer Kugel mit Zentrum in einem gegebenen Punkt, einer offenen Menge, einer abgeschlossenen Menge, einer Umgebung eines Punktes, eines Häufungspunktes einer Menge u.s.w. einführen.

Wir wollen nun diese Konzepte wiederholen, die die Grundlage für das Weitere bilden.

Definition 2. Für $\delta > 0$ und $a \in X$ wird die Menge

$$K(a, \delta) = \{x \in X \mid d(a, x) < \delta\}$$

die *Kugel mit Zentrum* $a \in X$ *mit Radius* δ oder die δ*-Umgebung des Punktes* a genannt.

Diese Bezeichnung ist in einem allgemeinen metrischen Raum üblich, wir dürfen sie jedoch nicht mit dem traditionellen Bild identifizieren, das wir aus dem Raum $\mathbb{R}^3$ kennen.

Beispiel 11. Die Einheitskugel in $C[a, b]$ mit dem Zentrum in der Funktion, die auf $[a, b]$ identisch gleich 0 ist, besteht aus den Funktionen, die auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig sind und deren Absolutbeträge auf diesem Intervall kleiner als 1 sind.

Beispiel 12. Sei X das Einheitsquadrat in $\mathbb{R}^2$, für das wir den Abstand zwischen zwei Punkten als den Abstand zwischen diesen beiden Punkten in $\mathbb{R}^2$ definieren. Dann ist X ein metrischer Raum, und das Quadrat X als metrischer Raum kann als solches für jeden Radius $\rho \ge \sqrt{2}/2$ als Kugel um sein Zentrum betrachtet werden.

Es ist klar, dass wir auf diese Weise Kugeln jeder beliebigen Form konstruieren können. Daher sollte der Ausdruck Kugel nicht zu wörtlich genommen werden.

Definition 3. Eine Menge $G \subset X$ ist *im metrischen Raum* (X, d) *offen*, falls für jeden Punkt $x \in G$ eine Kugel $K(x, \delta)$ existiert, so dass $K(x, \delta) \subset G$.

Aus dieser Definition folgt offensichtlich, dass X selbst eine offene Menge in (X, d) ist. Die leere Menge $\varnothing$ ist ebenfalls offen. Aus denselben Überlegungen wie schon beim $\mathbb{R}^n$ können wir beweisen, dass eine Kugel $K(a, r)$ und ihr Äußeres $\{x \in X \mid d(a, x) > r\}$ offene Mengen sind. (vgl. die Beispiele 3 und 4 in Abschnitt 7.1).

Definition 4. Eine Menge $F \subset X$ ist in (X, d) *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $X \setminus F$ in (X, d) offen ist.

Insbesondere können wir aus dieser Definition folgern, dass die *abgeschlossene Kugel*

$$\widetilde{K}(a, r) := \{x \in X \,|\, d(a, x) \leq r\}$$

eine abgeschlossene Menge in einem metrischen Raum (X, d) ist.

Der folgende Satz gilt für offene und abgeschlossene Mengen in einem metrischen Raum (X, d).

Satz 1. *a) Die Vereinigung* $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ *der Mengen jeder Familie* $\{G_\alpha, \alpha \in A\}$ *offener Mengen* G_α *in* X *ist eine offene Menge in* X.

b) Die Schnittmenge $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ *einer endlichen Anzahl offener Mengen in* X *ist eine offen Menge in* X.

a') Die Schnittmenge $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ *der Mengen jeder Familie* $\{F_\alpha, \alpha \in A\}$ *abgeschlossener Mengen* F_α *in* X *ist eine abgeschlossene Menge in* X.

b') Die Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ *einer endlichen Anzahl abgeschlossener Mengen in* X *ist eine abgeschlossene Menge in* X.

Der Beweis von Satz 1 ist eine wörtliche Wiederholung des Beweises des entsprechenden Satzes für offene und abgeschlossene Mengen in $\mathbb{R}^n$. Deswegen verzichten wir hier darauf (vgl. Satz 1 in Abschnitt 7.1).

Definition 5. Eine offene Menge in X, die den Punkt $x \in X$ enthält, wird eine *Umgebung* des Punktes x in X genannt.

Definition 6. Wir sagen, dass ein Punkt $x \in E \subset X$

- ein *innerer Punkt* von E ist, falls eine Umgebung um ihn in E enthalten ist,
- ein *äußerer Punkt* von E ist, falls eine Umgebung um ihn im Komplement von E in X enthalten ist,

- ein *Randpunkt* von E ist, falls er weder ein innerer noch ein äußerer Punkt von E ist (d.h., jede Umgebung des Punktes enthält sowohl einen Punkt aus E und einen Punkt, der nicht zu E gehört).

Beispiel 13. Alle Punkte einer Kugel $K(a,r)$ sind innere Punkte und die Menge $C_X\widetilde{K}(a,r) = X\setminus\widetilde{K}(a,r)$ besteht aus den Punkten, die außerhalb der Kugel $K(a,r)$ liegen.

Im $\mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik d entspricht die *Kugelschale* $S(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, d(a,x) = r > 0\}$ der Menge der Randpunkte der Kugel $K(a,r)$[1].

Definition 7. Ein Punkt $a \in X$ ist ein *Häufungspunkt* der Menge $E \subset X$, falls die Menge $E \cap O(a)$ für jede Umgebung $O(a)$ des Punktes unendlich ist.

Definition 8. Die Vereinigung der Menge E mit der Menge aller ihrer Häufungspunkte wird *Abschluss* der Menge E in X genannt.

Wie zuvor werden wir den Abschluss einer Menge $E \subset X$ mit $\overline{E}$ bezeichnen.

Satz 2. *Eine Menge $F \subset X$ ist genau dann in X abgeschlossen, falls sie alle ihre Häufungspunkte enthält.*

Somit gilt:

$$(F \text{ ist abgeschlossen in } X) \Longleftrightarrow (F = \overline{F} \text{ in } X)\,.$$

Wir verzichten auf den Beweis, da er nur eine Wiederholung des Beweises des analogen Satzes für den Fall $X = \mathbb{R}^n$ in Abschnitt 7.1 ist.

9.1.3 Unterräume eines metrischen Raumes

Sei (X,d) ein metrischer Raum und E eine Teilmenge von X und der Abstand zwischen zwei Punkte x_1 und x_2 in E sei gleich $d(x_1,x_2)$, d.h. gleich dem Abstand zwischen den Punkten in X. Dann erhalten wir den metrischen Raum (E,d), der üblicherweise *Teilraum* des ursprünglichen Raumes (X,d) genannt wird.

Wir können die folgende Definition übernehmen.

Definition 9. Ein metrischer Raum (X_1,d_1) ist ein *Teilraum des metrischen Raumes* (X,d), falls $X_1 \subset X$ und die Gleichung $d_1(a,b) = d(a,b)$ für jedes Punktepaar a,b in X_1 gilt.

[1] In Zusammenhang mit Beispiel 13 vgl. Aufgabe 2 am Ende des Abschnitts.

Die Kugel $K_1(a,r) = \{x \in X_1 | \, d_1(a,x) < r\}$ in einem Teilraum (X_1, d_1) des metrischen Raumes (X,d) ist offensichtlich die Schnittmenge

$$K_1(a,r) = X_1 \cap K(a,r)$$

der Menge $X_1 \subset X$ mit der Kugel $K(a,r)$ in X. Daraus folgt, dass jede offene Menge in X_1 die Form

$$G_1 = X_1 \cap G$$

besitzt, wobei G eine offene Menge in X ist und dass jede abgeschlossene Menge F_1 in X_1 die Form

$$F_1 = X_1 \cap F$$

besitzt, wobei F eine abgeschlossene Menge in X ist.

Aus dem eben Gesagten folgt, dass in einem metrischen Raum die Eigenschaft einer Menge, ob sie offen oder abgeschlossen ist, eine relative Eigenschaft ist, die vom sie umgebenden Raum abhängt.

Beispiel 14. Das offene Intervall $|x| < 1$, $y = 0$ der x-Achse in der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit der Standardmetrik in $\mathbb{R}^2$ ist ein metrischer Raum (X_1, d_1), der wie jeder metrische Raum als Teilmenge von sich selbst abgeschlossen ist, da er alle Häufungspunkte in X_1 enthält. Gleichzeitig ist er offensichtlich in $\mathbb{R}^2 = X$ nicht abgeschlossen.

Dasselbe Beispiel zeigt, dass auch Offenheit ein relativer Begriff ist.

Beispiel 15. Die Menge $C[a,b]$ stetiger Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ mit der Metrik (9.7) ist ein Teilraum des metrischen Raumes $\mathcal{R}_p[a,b]$. Wenn wir jedoch die Metrik (9.6) anstelle von (9.7) auf $C[a,b]$ betrachten, trifft dies nicht länger zu.

9.1.4 Das direkte Produkt metrischer Räume

Sind (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume, können wir eine Metrik d auf dem direkten Produkt $X_1 \times X_2$ einführen. Die verbreitetsten Methoden zur Einführung einer Metrik auf $X_1 \times X_2$ für $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ und $(x_1', x_2') \in X_1 \times X_2$ sind:

$$d\big((x_1,x_2),(x_1',x_2')\big) = \sqrt{d_1^2(x_1,x_1') + d_2^2(x_2,x_2')}$$

oder

$$d\big(x_1,x_2),(x_1',x_2')\big) = d_1(x_1,x_1') + d_2(x_2,x_2')$$

oder

$$d\big((x_1,x_2),(x_1',x_2')\big) = \max\big\{d_1(x_1,x_1'), d_2(x_2,x_2')\big\} \ .$$

Offensichtlich erhalten wir in allen drei Fällen eine Metrik auf $X_1 \times X_2$.

Definition 10. Sind (X_1, d_1) und (X_2, d_2) zwei metrische Räume, dann nennen wir den Raum $(X_1 \times X_2, d)$, wobei d eine Metrik nach einer der obigen Methoden auf $X_1 \times X_2$ ist, das *direkte Produkt* der ursprünglichen metrischen Räume.

Beispiel 16. Der Raum $\mathbb{R}^2$ kann als direktes Produkt zweier Kopien des metrischen Raumes $\mathbb{R}$ mit Standardmetrik betrachten werden und $\mathbb{R}^3$ als das direkte Produkt $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$ der Räume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.

9.1.5 Übungen und Aufgaben

1. a) Erweitern Sie Beispiel 2 und zeigen Sie, dass für eine stetige streng konvexe Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mit $f(0) = 0$ eine neue Metrik auf dem metrischen Raum (X, d) eingeführt werden kann, indem wir $d_f(x_1, x_2) = f\Big(d(x_1, x_2)\Big)$ setzen.

b) Zeigen Sie, dass für jeden metrischen Raum (X, d) eine Metrik $d'(x_1, x_2) = \frac{d(x_1,x_2)}{1+d(x_1,x_2)}$ eingeführt werden kann, in der der Abstand zwischen Punkten kleiner als 1 ist.

2. Sei (X, d) ein metrischer Raum mit der trivialen (*diskreten*) Metrik aus Beispiel 2 und sei $a \in X$. Wie sehen in diesem Fall die Mengen $K(a, 1/2)$, $K(a, 1)$, $\overline{K}(a, 1)$, $\widetilde{K}(a, 1)$ und $K(a, 3/2)$ aus und wie die Mengen $\{x \in X \,|\, d(a, x) = 1/2\}$, $\{x \in X \,|\, d(a, x) = 1\}$, $\overline{K}(a, 1) \setminus K(a, 1)$ und $\widetilde{K}(a, 1) \setminus K(a, 1)$?

3. a) Stimmt es, dass die Vereinigung jeder Familie abgeschlossener Mengen eine abgeschlossene Menge ist?

b) Ist jeder Randpunkt einer Menge ein Häufungspunkt dieser Menge?

c) Stimmt es, dass es in jeder Umgebung eines Randpunktes einer Menge Punkte gibt, die außerhalb und innerhalb dieser Menge sind?

d) Zeigen Sie, dass die Menge der Randpunkte jeder Menge eine abgeschlossene Menge ist.

4. a) Sei (Y, d_Y) ein Teilraum des metrischen Raumes (X, d_X). Zeigen Sie, dass dann für jede offene (bzw. abgeschlossene) Menge G_Y (bzw. F_Y) in Y eine offene (bzw. abgeschlossene) Menge G_X (bzw. F_X) in X existiert, so dass $G_Y = Y \cap G_X$, (bzw. $F_Y = Y \cap F_X$).

b) Die in Y offenen Mengen G'_Y und G''_Y schneiden sich nicht. Zeigen Sie, dass dann die entsprechenden Mengen G'_X und G''_X in X so gewählt werden können, dass auch sie keine gemeinsamen Punkte haben.

5. Mit einer Metrik d auf einer Menge X könnten wir versuchen, den Abstand $\bar{d}(A, B)$ zwischen Mengen $A \subset X$ und $B \subset X$ wie folgt zu definieren:

$$\bar{d}(A, B) = \inf_{a \in A,\, b \in B} d(a, b) \;.$$

a) Geben Sie ein Beispiel für einen metrischen Raum und zwei Teilmengen A und B, die sich nicht schneiden, für die aber $\bar{d}(A, B) = 0$ gilt.

b) Zeigen Sie, nach Hausdorff, dass auf der Menge abgeschlossener Mengen eines metrischen Raumes (X, d) eine *Hausdorff-Metrik* D eingeführt werden kann, wenn wir annehmen, dass für $A \subset X$ und $B \subset X$ gilt:

$$D(A, B) := \max\Big\{ \sup_{a \in A} \bar{d}(a, B),\, \sup_{b \in B} \bar{d}(A, b) \Big\} \;.$$

9.2 Topologische Räume

Für Fragen im Zusammenhang mit dem Konzept des Grenzwertes einer Funktion oder einer Abbildung ist nicht so sehr die Anwesenheit einer bestimmten Metrik auf dem Raum entscheidend, sondern vielmehr, dass wir definieren können, was eine Umgebung eines Punktes ist. Um uns davon zu überzeugen, müssen wir uns nur daran erinnern, dass der Grenzwert oder die Stetigkeit mit Hilfe von Umgebungen definiert werden können. Topologische Räume sind die mathematischen Objekte, auf denen der Übergang zum Grenzwert und das Konzept der Stetigkeit in größtmöglicher Allgemeinheit möglich werden.

9.2.1 Grundlegende Definitionen

Definition 1. Wir sagen, dass eine Menge X mit der Struktur eines *topologischen Raumes* oder einer *Topologie* versehen ist oder ein *topologischer Raum* ist, wenn wir eine Familie τ von Teilmengen von X (*offene Mengen in* X genannt) mit den folgenden Eigenschaften angeben können:

a) $\varnothing \in \tau$; $X \in \tau$.

b) $\big(\forall\, \alpha \in A\, (\tau_\alpha \in \tau)\big) \Longrightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} \tau_\alpha \in \tau$.

c) $\big(\tau_i \in \tau;\, i = 1, \dots, n\big) \Longrightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} \tau_i \in \tau$.

Daher ist ein topologischer Raum ein Paar (X, τ), bestehend aus einer Menge X und einer Familie τ unterscheidbarer Teilmengen der Menge mit den Eigenschaften, dass τ die leere Menge und die gesamte Menge X enthält, dass die Vereinigung jeder Anzahl von Mengen von τ eine Menge von τ ist und dass die Schnittmenge jeder endlichen Anzahl von Mengen von τ eine Menge von τ ist.

Wie wir sehen können, haben wir mit dem Axiomensystem *a)*, *b)* und *c)* für einen topologischen Raum genau die Eigenschaften offener Mengen postuliert, die wir für den Fall eines metrischen Raumes bereits bewiesen haben. Daher ist jeder metrische Raum mit der oben gegebenen Definition von offenen Mengen ein topologischer Raum.

Daher bedeutet die *Definition einer Topologie* auf X, eine Familie τ von Teilmengen von X anzugeben, die die Axiome *a)*, *b)* und *c)* eines topologischen Raumes erfüllt.

Die Definition einer Metrik in X definiert, wie wir gesehen haben, automatisch eine Topologie auf X, die durch diese Metrik induziert wird. Wir sollten jedoch bedenken, dass unterschiedliche Metriken auf X dieselbe Topologie auf X erzeugen können.

Beispiel 1. Sei $X = \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$. Wir betrachten die Metrik $d_1(x_1, x_2)$, die durch die Gleichung (9.5) in Abschnitt 9.1 definiert ist und die Metrik $d_2(x_1, x_2)$, die durch die Gleichung (9.3) in Abschnitt 9.1 definiert ist.

Die Ungleichungen

$$d_1(x_1, x_2) \leq d_2(x_1, x_2) \leq \sqrt{n} d_1(x_1, x_2)$$

implizieren offensichtlich, dass jede Kugel $K(a, r)$, die in einem beliebigen Punkt $a \in X$ zentriert ist und in einer dieser Metriken interpretiert wird, eine Kugel mit demselben Zentrum enthält, die in der anderen Metrik interpretiert wird. Daher induzieren diese beiden Metriken, nach der Definition einer offenen Teilmenge eines metrischen Raumes, dieselbe Topologie auf X.

Fast alle topologischen Räume, die wir in diesem Werk aktiv benutzen werden, sind metrische Räume. Wir sollten uns jedoch nicht vorstellen, dass jeder topologische Raum metrisiert werden kann, d.h., mit einer Metrik versehen werden kann, deren offene Mengen dieselben sind wie die offenen Mengen in der Familie τ, die die Topologie auf X definieren. Die Bedingungen, unter denen dies möglich ist, bilden den Inhalt der sogenannten *Metrisierungssätze.*

Definition 2. Ist (X, τ) ein topologischer Raum, dann werden die Mengen der Familie τ *offene Mengen* genannt und ihre Komplemente in X werden *abgeschlossene Mengen* des topologischen Raumes (X, τ) genannt.

Eine Topologie τ auf einer Menge X wird selten dadurch definiert, dass alle Mengen in der Familie τ angeführt werden. Meistens wird die Familie τ so definiert, dass wir nur eine gewisse Menge von Teilmengen von X angeben, aus denen jede Menge der Familie τ durch Vereinigung und Schnitt erhalten werden kann. Daher ist die folgende Definition sehr wichtig.

Definition 3. Eine *Basis des topologischen Raumes* (X, τ) (eine *offene Basis* oder *Basis der Topologie*) ist eine Familie $\mathfrak{B}$ offener Teilmengen von X, so dass jede offene Menge $G \in \tau$ eine Vereinigung einer Ansammlung von Elementen der Familie $\mathfrak{B}$ ist.

Beispiel 2. Ist (X, d) ein metrischer Raum und (X, τ) der entsprechende topologische Raum, dann ist die Menge $\mathfrak{B} = \{K(a, r)\}$ aller Kugeln für $a \in X$ und $r > 0$ offensichtlich eine Basis der Topologie τ. Betrachten wir außerdem die Familie $\mathfrak{B}$ aller Kugeln mit positiven rationalen Radien r, dann ist auch diese Familie eine Basis der Topologie.

Daher können wir eine Topologie dadurch definieren, dass wir nur eine Basis der Topologie angeben. Wie wir an Beispiel 2 erkennen können, kann ein topologischer Raum viele verschiedene Basen der Topologie besitzen.

Definition 4. Die geringste Mächtigkeit unter allen Basen eines topologischen Raumes wird *Gewicht* des Raumes genannt.

In der Regel werden wir uns mit topologischen Räumen beschäftigen, deren Topologien eine abzählbare Basis (vgl. jedoch die Aufgaben 4 und 6) erlauben.

Beispiel 3. Wenn wir die Familie $\mathfrak{B}$ der Kugeln in $\mathbb{R}^k$ mit allen möglichen rationalen Radien $r = \frac{m}{n} > 0$ mit Zentren in allen möglichen rationalen Punkten $\left(\frac{m_1}{n_1}, \dots, \frac{m_k}{n_k}\right) \in \mathbb{R}^k$ betrachten, erhalten wir offensichtlich eine abzählbare Basis für die Standardtopologie von $\mathbb{R}^k$. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass es unmöglich ist, die Standardtopologie in $\mathbb{R}^k$ durch eine endliche Familie offener Mengen zu definieren. Daher besitzt der übliche topologische Raum $\mathbb{R}^k$ abzählbares Gewicht.

Definition 5. Eine *Umgebung* eines Punktes eines topologischen Raumes (X, τ) ist eine offene Menge, die diesen Punkt enthält.

Ist eine Topologie τ auf X definiert, so ist klar, dass für jeden Punkt die Familie seiner Umgebungen definiert ist.

Es ist außerdem klar, dass die Familie aller Umgebungen aller möglichen Punkte eines topologischen Raumes als Basis für die Topologie dieses Raumes dienen kann. Daher können wir eine Topologie auf X einführen, indem wir die Umgebungen der Punkte von X beschreiben. Diese Art der Definition der Topologie auf X wurde ursprünglich bei der Definition eines topologischen Raumes benutzt[2]. Beachten Sie, dass wir die Topologie in einem metrischen Raum im Wesentlichen dadurch eingeführt haben, dass wir sagten, was eine δ-Umgebung eines Punktes ist. Wir wollen ein weiteres Beispiel geben.

Beispiel 4. Wir betrachten die Menge $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ reeller stetiger Funktionen, die auf der gesamten reellen Geraden definiert sind. Wir benutzen diese Menge als Ausgangsbasis für die Konstruktion einer neuen Menge – der Menge der Keime stetiger Funktionen. Wir werden zwei Funktionen $f, g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ als äquivalent im Punkt $a \in \mathbb{R}$ betrachten, wenn es eine Umgebung $U(a)$ dieses Punktes gibt, so dass $\forall x \in U(a) \big(f(x) = g(x)\big)$. Die eben eingeführte Relation ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation (sie ist reflexiv, symmetrisch und transitiv). Eine Äquivalenzklasse stetiger Funktionen im Punkt $a \in \mathbb{R}$ wird *Keim stetiger Funktionen* in diesem Punkt genannt. Ist f eine der Funktionen, die den Keim im Punkt a erzeugen, werden wir den Keim als solches durch f_a symbolisieren. Wir wollen nun eine Umgebung eines Keims definieren. Sei $U(a)$ eine Umgebung des Punktes a und f eine Funktion, die auf $U(a)$ definiert ist und den Keim f_a in a erzeugt. Dieselbe Funktion erzeugt ihren Keim f_x in jedem Punkt $x \in U(a)$. Die Menge $\{f_x\}$ aller Keime zu den Punkten $x \in U(a)$ wird *Umgebung des Keims* f_a genannt. Wenn wir die Menge derartiger Umgebungen aller Keime als Basis einer Topologie herausgreifen, verwandeln wir die Menge von Keimen stetiger Funktionen in einen topologischen Raum. Dabei ist bemerkenswert, dass in dem sich ergebenden topologischen Raum zwei

[2] Die Konzepte eines metrischen Raumes und eines topologischen Raumes wurden zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts explizit formuliert. Der französische Mathematiker M. Fréchet (1878–1973) führte 1906 das Konzept eines metrischen Raumes ein und der deutsche Mathematiker F. Hausdorff (1868–1942) definierte 1914 einen topologischen Raum.

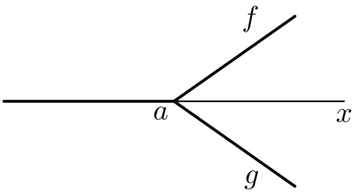

Abb. 9.1.

verschiedene Punkte (Keime) f_a und g_a keine disjunkten Umgebungen haben dürfen (s. Abb. 9.1).

Definition 6. Ein topologischer Raum ist ein *Hausdorff-Raum*, wenn das *Hausdorff-Axiom* in ihm gilt: *Je zwei unterschiedliche Punkte des Raumes besitzen Umgebungen, die sich nicht schneiden.*

Beispiel 5. Jeder metrische Raum ist offensichtlich ein Hausdorff-Raum, da für je zwei Punkte $a, b \in X$ mit $d(a, b) > 0$ ihre kugelförmigen Umgebungen $K\big(a, \frac{1}{2}d(a, b)\big)$ und $K\big(b, \frac{1}{2}d(a, b)\big)$ keine gemeinsamen Punkte haben.

Gleichzeitig, wie aus Beispiel 4 ersichtlich, gibt es topologische Räume, die keine Hausdorff-Räume sind. Das vielleicht einfachste Beispiel dafür ist der topologische Raum (X, τ) mit der trivialen Topologie $\tau = \{\varnothing, X\}$. Wenn X zumindest zwei unterschiedliche Punkte enthält, dann ist (X, τ) offensichtlich kein Hausdorff-Raum. Außerdem ist das Komplement $X \setminus x$ eines Punktes in diesem Raum keine offene Menge.

Wir arbeiten ausschließlich mit Hausdorff-Räumen.

Definition 7. Eine Menge $E \subset X$ ist in einem topologischen Raum (X, τ) *(überall) dicht*, falls für jeden Punkt $x \in X$ und jede Umgebung $U(x)$ die Schnittmenge $E \cap U(X)$ nicht leer ist.

Beispiel 6. Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist in der Standarddopologie in $\mathbb{R}$ überall dicht. Ähnlicherweise ist auch die Menge $\mathbb{Q}^n$ der rationalen Punkte in $\mathbb{R}^n$ dicht in $\mathbb{R}^n$.

Wie können zeigen, dass in jedem topologischen Raum eine überall dichte Menge existiert, deren Mächtigkeit nicht größer ist als das Gewicht des topologischen Raumes.

Definition 8. Ein metrischer Raum mit einer abzählbaren dichten Menge wird *separierbarer* Raum genannt.

Beispiel 7. Der metrische Raum $(\mathbb{R}^n, d)$ ist in jeder der Standardmetriken ein separierbarer Raum, da $\mathbb{Q}^n$ in ihm dicht ist.

Beispiel 8. Der metrische Raum $\big(C([0,1],\mathbb{R}),d\big)$ mit der durch (9.6) definierten Metrik ist ebenfalls separierbar. Aus der gleichmäßigen Stetigkeit der Funktionen $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ folgt nämlich, dass der Graph jeder derartigen Funktion so genau wie gewünscht durch einen Polygonzug angenähert werden kann, der aus einer endlichen Anzahl von Segmenten besteht, deren Knoten rationale Koordinaten haben. Die Menge derartiger Polygonzüge ist abzählbar.

Wir werden uns hauptsächlich mit separierbaren Räumen beschäftigen.

Die Definition einer Umgebung eines Punktes in einem topologischen Raum ist wörtlich identisch mit der Definition einer Umgebung eines Punktes in einem metrischen Raum. Wir wollen nun anmerken, dass daher auch die Konzepte eines *inneren Punktes*, eines *äußeren Punktes*, eines *Randpunktes* und eines *Häufungspunktes* einer Menge wie auch das Konzept des *Abschlusses* einer Menge, die alle nur auf dem Konzept einer Umgebung beruhen, ohne Veränderungen für beliebige topologische Räume übernommen werden können.

Wir können am Beweis von Satz 2 in Abschnitt 7.1 außerdem erkennen, dass eine Menge in einem Hausdorff-Raum genau dann abgeschlossen ist, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.

9.2.2 Teilräume von topologischen Räumen

Sei (X,τ_X) ein topologischer Raum und Y eine Teilmenge von X. Die Topologie τ_X ermöglicht uns, die folgende Topologie in Y zu definieren, die als *induzierte* oder *relative* Topologie auf $Y \subset X$ bezeichnet wird.

Wir definieren eine *offene Menge in* Y als eine Menge G_Y der Form $G_Y = Y \cap G_X$, wobei G_X eine offene Menge in X ist.

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass die Familie τ_Y von derartig definierten Teilmengen von Y die Axiome für offene Mengen in einem topologischen Raum erfüllt.

Wie wir erkennen können, stimmt die Definition von offenen Mengen G_Y in Y mit derjenigen überein, die wir in Absatz 9.1.3 für den Fall erhalten haben, dass Y ein Teilraum eines metrischen Raumes X ist.

Definition 9. Eine Teilmenge $Y \subset X$ eines topologischen Raumes (X,τ_X) mit der auf Y induzierten Topologie τ_Y wird ein *Teilraum des topologischen Raumes* X genannt.

Es ist klar, dass eine Menge, die in (Y,τ_Y) offen ist, nicht notwendigerweise in (X,τ_X) offen ist.

9.2.3 Das direkte Produkt topologischer Räume

Sind (X_1,τ_1) und (X_2,τ_2) zwei topologische Räume mit Familien offener Mengen $\tau_1 = \{G_1\}$ und $\tau_2 = \{G_2\}$, dann können wir eine Topologie auf $X_1 \times X_2$ einführen, indem wir die Mengen der Form $G_1 \times G_2$ als Basis wählen.

Definition 10. Der topologische Raum $(X_1 \times X_2, \tau_1 \times \tau_2)$, dessen Topologie die Basis besitzt, die aus Mengen der Form $G_1 \times G_2$ besteht, wobei G_i eine offene Menge im topologischen Raum (X_i, τ_i), $i = 1, 2$ ist, wird als das *direkte Produkt* der topologischen Räume (X_1, τ_1) und (X_2, τ_2) bezeichnet.

Beispiel 9. Wenn wir $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ und $\mathbb{R}^2$ mit ihren Standardtopologien betrachten, dann ist, wie wir sehen können, $\mathbb{R}^2$ das direkte Produkt $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$. Denn wir können jede offene Menge in $\mathbb{R}^2$ beispielsweise als Vereinigung von „quadratischen" Umgebungen aller ihrer Punkte erhalten. Und Quadrate (deren Seiten zu den Achsen parallel sind) sind die Produkte offener Intervalle, die in $\mathbb{R}$ offene Mengen sind.

Wir wollen festhalten, dass die Mengen $G_1 \times G_2$, mit $G_1 \in \tau_1$ und $G_2 \in \tau_2$ nur eine Basis für die Topologie bilden und nicht alle offenen Mengen im direkten Produkt topologischer Mengen sind.

9.2.4 Übungen und Aufgaben

1. Zeigen Sie, dass dann, wenn (X, d) ein metrischer Raum ist, $\left(X, \frac{d}{1+d}\right)$ auch ein metrischer Raum ist und dass die Metriken d und $\frac{d}{1+d}$ dieselbe Topologie auf X induzieren. (vgl. auch Aufgabe 1 im vorigen Abschnitt).

2. a) In der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen definieren wir eine Umgebung der Zahl $n \in \mathbb{N}$ als eine arithmetische Progression mit Differenz d teilerfremd zu n. Ist der sich ergebende topologische Raum ein Hausdorff-Raum?
b) Welche Topologie besitzt $\mathbb{N}$, wenn wir $\mathbb{N}$ als Teilmenge der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit der Standardtopologie betrachten?
c) Beschreiben Sie alle offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$.

3. Sind zwei Topologien τ_1 und τ_2 auf derselben Menge definiert, dann sagen wir, dass τ_2 *feiner* als τ_1 ist, wenn $\tau_1 \subset \tau_2$, d.h., τ_2 enthält alle Mengen in τ_1 und einige zusätzliche offene Mengen, die nicht in τ_1 enthalten sind.

a) Sind die zwei Topologien auf $\mathbb{N}$, die wir in der vorigen Aufgabe betrachtet haben, vergleichbar?
b) Wenn wir eine Metrik auf der Menge $C[0, 1]$ der stetigen Funktionen mit reellen Werten auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ einmal durch (9.6) in Abschnitt 9.1 einführen und dann durch (9.7) im selben Abschnitt, entstehen so im Allgemeinen zwei Topologien auf $C[a, b]$. Sind diese vergleichbar?

4. a) Zeigen Sie im Detail, dass der Raum der Keime stetiger Funktionen, der in Beispiel 4 definiert wurde, kein Hausdorff-Raum ist.
b) Erklären Sie, warum dieser topologische Raum nicht mit einer Metrik versehen werden kann.
c) Welches Gewicht besitzt dieser Raum?

5. a) Formulieren Sie die Axiome für einen topologischen Raum mit Hilfe abgeschlossener Mengen.

b) Beweisen Sie, dass der Abschluss des Abschlusses einer Menge dem Abschluss der Menge entspricht.
c) Beweisen Sie, dass der Rand jeder Menge eine abgeschlossene Menge ist.
d) Sei F abgeschlossen und G offen in (X, τ). Zeigen Sie, dass die Menge $G \setminus F$ in (X, τ) offen ist.
e) Sei (Y, τ_Y) ein Unterraum des topologischen Raumes (X, τ_X), und die Menge E sei so, dass $E \subset Y \subset X$ und $E \in \tau_X$. Zeigen Sie, dass dann $E \in \tau_Y$.

6. Ein topologischer Raum (X, τ), in dem jeder Punkt eine abgeschlossene Menge ist, wird ein *topologischer Raum im strengen Sinne* oder ein τ_1-Raum genannt. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Jeder Hausdorff-Raum ist ein τ_1-Raum (zur Unterscheidung und wegen dieser Inklusion werden Hausdorff-Räume manchmal auch τ_2-Räume genannt).
b) Nicht jeder τ_1-Raum ist ein τ_2-Raum. (vgl. Beispiel 4).
c) Der Raum $X = \{a, b\}$ mit den beiden Elementen $\{\varnothing, X\}$ ist kein τ_1-Raum.
d) In einem τ_1-Raum ist eine Menge F genau dann abgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.

7. a) Beweisen Sie, dass in jedem topologischen Raum eine überall dichte Menge existiert, deren Mächtigkeit nicht größer ist als das Gewicht des Raumes.
b) Beweisen Sie, dass die folgenden metrischen Räume separierbar sind: $C[a, b]$, $C^{(k)}[a, b]$, $\mathcal{R}_1[a, b]$, $\mathcal{R}_p[a, b]$ (für die Formeln der entsprechenden Metriken s. Abschnitt 9.1.)
c) In Relation (9.6) in Abschnitt 9.1 werde max durch sup ersetzt und dann auf der Menge aller beschränkten reellwertigen Funktionen, die auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ definiert sind, als Metrik betrachtet. Beweisen Sie, dass wir so einen nicht separierbaren metrischen Raum erhalten.

9.3 Kompakte Mengen

9.3.1 Definition und allgemeine Eigenschaften kompakter Mengen

Definition 1. Eine Menge K in einem topologischen Raum (X, τ) heißt *kompakt* (oder *quasikompakt*[3]), falls sich aus jeder Überdeckung von K durch offene Mengen in X eine endliche Anzahl von Mengen auswählen lässt, die K überdecken.

Beispiel 1. Ein Intervall $[a, b]$ der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit der Standardtopologie ist eine kompakte Menge, wie unmittelbar aus dem Lemma in Absatz 2.1.3 folgt, das sicherstellt, dass sich aus jeder Überdeckung eines abgeschlossenen Intervalls durch offene Intervalle eine endliche Überdeckung herausgreifen lässt.

Im Allgemeinen ist ein m-dimensionales abgeschlossenes Intervall $I^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid a^i \leq x^i \leq b^i,\ i = 1, \dots, m\}$ in $\mathbb{R}^m$ eine kompakte Menge, wie wir in Absatz 7.1.3 formuliert haben.

[3] Der in Definition 1 eingeführte Begriff einer kompakten Menge wird in einer Topologie manchmal zur Unterscheidung von einer zusätzlich Hausdorffschen Menge auch quasikompakt genannt.

Es wurde außerdem in Absatz 7.1.3 bewiesen, das eine Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ genau dann kompakt ist, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Im Unterschied zu den relativen Eigenschaften offener und abgeschlossener Mengen, ist die Eigenschaft der Kompaktheit absolut in dem Sinne, dass sie vom jeweiligen Raum unabhängig ist. Um genauer zu sein, so gilt der folgende Satz.

Satz 1. *Eine Teilmenge K eines topologischen Raumes (X, τ) ist genau dann eine kompakte Teilmenge von X, falls K als Teilmenge von sich selbst mit der durch (X, τ) induzierten Topologie kompakt ist.*

Beweis. Dieser Satz folgt aus der Definition der Kompaktheit und der Tatsache, dass jede Menge G_K, die in K offen ist, als Schnittmenge von K und einer Menge G_X, die in X offen ist, erhalten werden kann. □

Sind also (X, τ_X) und (Y, τ_Y) zwei topologische Räume, die dieselbe Topologie auf $K \subset X \cap Y$ induzieren, dann ist K entweder kompakt in sowohl X als auch Y oder in beiden Räumen nicht kompakt.

Beispiel 2. Sei d die Standardmetrik auf $\mathbb{R}$ und $I = \{x \in \mathbb{R} | \, 0 < x < 1\}$ das Einheitsintervall in $\mathbb{R}$. Der metrische Raum (I, d) ist abgeschlossen (in sich) und beschränkt. Er ist aber keine kompakte Menge, da er beispielsweise keine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

Wir formulieren nun die wichtigsten Eigenschaften kompakter Mengen.

Lemma 1. (Kompakte Mengen sind abgeschlossen). *Ist K eine kompakte Menge in einem Hausdorff-Raum (X, τ), dann ist K eine abgeschlossene Teilmenge von X.*

Beweis. Nach den Kriterien für eine abgeschlossene Menge genügt es zu zeigen, dass jeder Häufungspunkt $x_0 \in K$ von K zu K gehört.

Angenommen, $x_0 \notin K$. Zu jedem Punkt $x \in K$ konstruieren wir eine offene Umgebung $G(x)$, so dass x_0 eine Umgebung besitzt, die von $G(x)$ disjunkt ist. Die Menge $G(x)$, $x \in K$ aller derartiger Umgebungen bildet eine offene Überdeckung von K, aus der wir eine endliche Überdeckung $G(x_1), \ldots, G(x_n)$ auswählen können. Ist nun $O_i(x_0)$ eine Umgebung von x_0, so dass $G(x_i) \cap O_i(x_0) = \varnothing$, dann ist die Menge $O(x) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} O_i(x_0)$ ebenfalls eine Umgebung von x_0 und $G(x_i) \cap O(x_0) = \varnothing$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Dies bedeutet aber, dass $K \cap O(x_0) = \varnothing$, und dann kann x_0 kein Häufungspunkt von K sein. □

Lemma 2. (Geschachtelte kompakte Mengen.) *Sei $K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \supset \cdots$ eine geschachtelte Folge nicht leerer kompakter Mengen. Dann ist die Schnittmenge $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} K_i$ nicht leer.*

Beweis. Nach Lemma 1 sind die Mengen $G_i = K_1 \setminus K_i$, $i = 1, \ldots, n, \ldots$ in K_1 offen. Ist die Schnittmenge $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ leer, dann bildet die Folge $G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n \subset \cdots$ eine Überdeckung von K_1. Wenn wir daraus eine endliche Überdeckung auswählen, dann erkennen wir, dass ein Element G_m der Folge eine Überdeckung von K_1 bildet. Nach der Annahme ist jedoch $K_m = K_1 \setminus G_m \neq \varnothing$. Mit diesem Widerspruch ist der Beweis von Lemma 2 abgeschlossen. □

Lemma 3. (Abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen.) *Eine abgeschlossene Teilmenge F einer kompakten Menge K ist selbst kompakt.*

Beweis. Sei $\{G_\alpha, \alpha \in A\}$ eine offene Überdeckung von F. Wenn wir zu diesen Mengen die offen Menge $G = K \setminus F$ hinzufügen, erhalten wir eine offene Überdeckung der ganzen kompakten Menge K. Aus dieser Überdeckung können wir eine endliche Überdeckung von K herausgreifen. Da $G \cap F = \varnothing$, folgt, dass die Menge $\{G_\alpha, \alpha \in A\}$ eine endliche Überdeckung von F enthält. □

9.3.2 Metrische kompakte Mengen

Wir werden unten einige Eigenschaften metrischer kompakter Mengen anführen, d.h. von metrischen Räumen, die bzgl. einer durch die Metrik induzierten Topologie kompakte Mengen sind.

Definition 2. Die Menge $E \subset X$ wird ein *ε-Gitter* im metrischen Raum (X, d) genannt, falls für jeden Punkt $x \in X$ ein Punkt $e \in E$ existiert, so dass $d(e, x) < \varepsilon$.

Lemma 4. (Endliche ε-Gitter.) *Ist ein metrischer Raum (K, d) kompakt, dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Gitter in K.*

Beweis. Wir wählen zu jedem Punkt $x \in K$ eine offene Kugel $K(x, \varepsilon)$. Diese Kugeln bilden eine offene Überdeckung von K, aus der wir eine endliche Überdeckung $K(x_1, \varepsilon), \ldots, K(x_n, \varepsilon)$ herausgreifen. Die Punkte $x_1, \ldots, x_n$ bilden offensichtlich das gesuchte ε-Gitter. □

Neben Argumenten, die die Auswahl einer endlichen Überdeckung betreffen, finden wir in der Analysis oft Argumente, in denen eine konvergente Teilfolge aus einer beliebigen Folge herausgegriffen wird. Dabei gilt der folgende Satz:

Satz 2. (Kriterium für die Kompaktheit in einem metrischen Raum.) *Ein metrischer Raum (K, d) ist genau dann kompakt, wenn wir aus jeder Folge ihrer Punkte eine Teilfolge auswählen können, die gegen einen Punkt von K konvergiert.*

Die Konvergenz der Folge $\{x_n\}$ gegen einen Punkt $a \in K$ bedeutet wie zuvor, dass zu jeder Umgebung $U(a)$ des Punktes $a \in K$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x_n \in U(a)$ für $n > N$.

Wir werden das Konzept eines Grenzwertes unten in Abschnitt 9.6 detaillierter untersuchen.

Wir schicken dem Beweis von Satz 2 zwei Lemmata voraus.

Lemma 5. *Ist ein metrischer Raum (K, d) derart, dass sich aus jeder Folge ihrer Punkte eine in K konvergente Teilfolge auswählen lässt, dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Gitter.*

Beweis. Gäbe es kein endliches ε_0-Gitter für ein $\varepsilon_0 > 0$, könnten wir eine Folge $\{x_n\}$ von Punkten in K konstruieren, so dass $d(x_n, x_i) > \varepsilon_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Es ist offensichtlich unmöglich, aus dieser Folge eine konvergente Teilfolge auszuwählen. □

Lemma 6. *Ist ein metrischer Raum (K, d) derart, dass aus jeder Folge ihrer Punkte eine Teilfolge ausgewählt werden kann, die in K konvergiert, dann besitzt jede geschachtelte Folge nicht leerer abgeschlossener Teilmengen des Raumes eine nicht leere Schnittmenge.*

Beweis. Ist $F_1 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$ die Folge der abgeschlossenen Mengen, dann erhalten wir, wenn wir einen Punkt aus jeder Menge wählen, eine Folge $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, aus der wir eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_i}\}$ auswählen können. Der Grenzwert $a \in K$ dieser Folge gehört nach dieser Konstruktion notwendigerweise zu jeder der abgeschlossenen Mengen F_i, $i \in \mathbb{N}$. □

Wir sind nun in der Lage Satz 2 zu beweisen.

Beweis. Sei (K, d) kompakt und $\{x_n\}$ eine Folge von Punkten in der Menge. Zunächst wollen wir zeigen, dass wir aus dieser Folge eine Teilfolge auswählen können, die gegen einen Punkt in K konvergiert. Besitzt die Folge $\{x_n\}$ nur eine endliche Anzahl von unterschiedlichen Werten, dann ist die Behauptung offensichtlich. Daher nehmen wir an, dass die Folge $\{x_n\}$ unendlich viele verschiedene Werte annimmt. Für $\varepsilon_1 = 1/1$ konstruieren wir ein endliches 1-Gitter und wählen eine abgeschlossene Kugel $\widetilde{K}(a_1, 1)$, die eine unendliche Anzahl von Gliedern der Folge enthält. Nach Lemma 3 ist die Kugel $\widetilde{K}(a_1, 1)$ selbst wieder eine kompakte Menge, in der ein endliches $\varepsilon_2 = 1/2$-Gitter und eine Kugel $\widetilde{K}(a_2, 1/2)$ existieren, die unendlich viele Elemente der Folge enthalten. Auf diese Weise bilden wir eine geschachtelte Folge von kompakten Mengen $\widetilde{K}(a_1, 1) \supset \widetilde{K}(a_2, 1/2) \supset \cdots \supset \widetilde{K}(a_n, 1/n) \supset \cdots$, die nach Lemma 2 einen gemeinsamen Punkt $a \in K$ besitzt. Indem wir einen Punkt x_{n_1} in der Kugel $\widetilde{K}(a_1, 1)$, dann einen Punkt x_{n_2} in $\widetilde{K}(a_2, 1/2)$ mit $n_2 > n_1$ wählen und so weiter, gelangen wir zu einer Folge $\{x_n\}$, die nach dieser Konstruktion gegen a konvergiert.

Wir wollen nun den Umkehrschluss beweisen, d.h., wir zeigen, dass dann, wenn wir aus jeder Folge $\{x_n\}$ von Punkten des metrischen Raumes (K, d) eine in K konvergierende Teilfolge auswählen können, (K, d) kompakt ist.

Können wir nämlich aus einer offenen Überdeckung $\{G_\alpha,\, \alpha \in A\}$ des Raumes (K, d) keine endliche Überdeckung auswählen, dann konstruieren wir nach Lemma 5 ein endliches 1-Gitter in K und finden so eine abgeschlossene Kugel $\widetilde{K}(a_1, 1)$, die ebenfalls nicht durch eine endliche Anzahl von Mengen der Familie $\{G_\alpha,\, \alpha \in A\}$ überdeckt werden kann.

Nun können wir die Kugeln $\widetilde{K}(a_1, 1)$ als Ausgangsmenge betrachten und durch Konstruktion eines endlichen 1/2-Gitters in ihr eine Kugel $\widetilde{K}(a_2, 1/2)$ finden, die keine Überdeckung durch eine endliche Anzahl von Mengen der Familie $\{G_\alpha,\, \alpha \in A\}$ zulässt.

Die sich daraus ergebende Folge abgeschlossener Mengen $\widetilde{K}(a_1, 1) \supset \widetilde{K}(a_2, 1/2) \supset \cdots \supset \widetilde{K}(a_n, 1/n) \supset \cdots$ besitzt nach Lemma 6 einen gemeinsamen Punkt $a \in K$ und nach unserer Konstruktion existiert nur ein derartiger Punkt. Dieser Punkt wird von einer Menge G_{α_0} der Familie überdeckt. Da G_{α_0} offen ist, müssen für genügend große Werte von n alle Mengen $\widetilde{K}(a_n, 1/n)$ in G_{α_0} enthalten sein. Dieser Widerspruch beendet den Beweis des Satzes. □

9.3.3 Übungen und Aufgaben

1. Eine Teilmenge eines metrischen Raumes ist *vollständig beschränkt*, wenn sie für jedes $\varepsilon > 0$ ein endliches $\varepsilon - Gitter$ besitzt.

a) Beweisen Sie, dass vollständige Beschränktheit davon unabhängig ist, ob das Gitter von Punkten der Menge gebildet wird oder von Punkten des umgebenden Raumes.
b) Zeigen Sie, dass eine Teilmenge eines metrischen Raumes genau dann kompakt ist, wenn sie vollständig beschränkt und abgeschlossen ist.
c) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass eine abgeschlossene beschränkte Teilmenge eines metrischen Raumes nicht immer vollständig beschränkt ist und daher nicht immer kompakt.

2. Eine Teilmenge eines topologischen Raumes ist *relativ kompakt*, wenn ihr Abschluss kompakt ist.

Geben Sie Beispiele für relativ kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

3. Ein topologischer Raum ist *lokal kompakt*, wenn jeder Punkt des Raumes eine relativ kompakte Umgebung besitzt.

Geben Sie Beispiele für lokal kompakte topologische Räume, die nicht kompakt sind.

4. Zeigen Sie, dass zu jedem lokal kompakten aber nicht kompakten topologischen Raum (X, τ_X) ein kompakter topologischer Raum (Y, τ_Y) existiert, so dass $X \subset Y$, $Y \setminus X$ aus einem einzigen Punkt besteht und der Raum (X, τ_X) ein Teilraum des Raumes (Y, τ_Y) ist.

9.4 Zusammenhängende topologische Räume

Definition 1. Ein topologischer Raum (X, τ) ist *zusammenhängend*, wenn er keine offen-abgeschlossenen Mengen, außer X selbst und der leeren Menge enthält.

Diese Definition wird anschaulicher und verständlicher, wenn wir sie folgendermaßen neu formulieren:

Ein topologischer Raum ist genau dann zusammenhängend, wenn er sich nicht als Vereinigung zweier disjunkter, nicht leerer abgeschlossener Mengen (oder zwei disjunkter, nicht leerer offenen Mengen) schreiben lässt.

Definition 2. Eine Menge E in einem topologischen Raum (X, τ) ist *zusammenhängend*, wenn sie als topologischer Teilraum von (X, τ) (mit der induzierten Topologie) zusammenhängend ist.

Aus dieser Definition und Definition 1 folgt, dass die Eigenschaft einer Menge, nämlich ob sie zusammenhängend ist oder nicht, vom sie umgebenden Raum unabhängig ist. Genauer gesagt, so ist E sowohl in X als auch Y zusammenhängend oder nicht, wenn (X, τ_X) und (Y, τ_Y) topologische Räume sind, die E enthalten und dieselbe Topologie auf E induzieren.

Beispiel 1. Sei $E = \{x \in \mathbb{R} | \, x \neq 0\}$. Die Menge $E_- = \{x \in E | \, x < 0\}$ ist nicht leer, ungleich E und offen-abgeschlossen in E (wie auch $E_+ = \{x \in \mathbb{R} | \, x > 0\}$), wenn wir E als topologischen Raum mit der Standardtopologie, die durch die Standardtopologie in $\mathbb{R}$ induziert wird, betrachten. Daher ist E, wie uns auch unsere Anschauung sagt, nicht zusammenhängend.

Satz. (Zusammenhängende Teilräume in $\mathbb{R}$.) *Eine nicht leere Menge $E \subset \mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn zu jedem x und z in E aus den Ungleichungen $x < y < z$ folgt, dass $y \in E$.*

Daher sind Intervalle (endliche oder unendliche) die einzigen zusammenhängenden Teilmengen auf der Geraden; offene, halb offene und abgeschlossene.

Beweis. N o t w e n d i g. Sei E eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$ und sei das Punktetripel a, b und c derart, dass $a \in E$, $b \in E$, aber $c \notin E$, obwohl $a < c < b$. Wenn wir $A = \{x \in E | \, x < c\}$ und $B = \{x \in E | \, x > c\}$ setzen, können wir erkennen, dass $a \in A$ und $b \in B$, d.h., $A \neq \varnothing$ und $B \neq \varnothing$ mit $A \cap B = \varnothing$. Außerdem ist $E = A \cup B$ und beide Mengen A und B sind in E offen. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass E zusammenhängend ist.

H i n r e i c h e n d. Sei E ein Teilraum von $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass jeder Punkt auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ zwischen jedem Punktepaar a und b in der Menge auch zu E gehört. Wir werden zeigen, dass E zusammenhängend ist.

Angenommen, A sei eine offen-abgeschlossene Teilmenge von E mit $A \neq \varnothing$ und $B = E \setminus A \neq \varnothing$. Sei $a \in A$ und $b \in B$. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $a < b$. (Offensichtlich ist $a \neq b$, da $A \cap B = \varnothing$.) Wir betrachten den Punkt $c_1 = \sup\{A \cap [a, b]\}$. Da $A \ni a \leq c_1 \leq b \in B$, gilt $c_1 \in E$. Da A in E abgeschlossen ist, können wir folgern, dass $c_1 \in A$.

Nun betrachten wir den Punkt $c_2 = \inf\{B \cap [c_1, b]\}$ und folgern auf ähnliche Weise, da B abgeschlossen ist, dass $c_2 \in B$. Daher ist $a \leq c_1 < c_2 \leq b$, da

$c_1 \in A$, $c_2 \in B$ und $A \cap B = \varnothing$. Nun folgt aber aus der Definition von c_1 und c_2 und der Gleichung $E = A \cup B$, dass kein Punkt des offenen Intervalls $]c_1, c_2[$ zu E gehören kann. Dies ist ein Widerspruch zur vorausgesetzten Eigenschaft von E. Daher kann die Menge E keine Teilmenge A mit diesen Eigenschaften besitzen, womit bewiesen ist, dass E zusammenhängend ist. □

9.4.1 Übungen und Aufgaben

1. a) Zeigen Sie, dass $B = X \setminus A$ eine gleichzeitig offen-abgeschlossene Teilmenge von (X, τ) ist, wenn A eine derartige Menge ist.

b) Zeigen Sie, dass wir mit Hilfe des umgebenden Raumes die Eigenschaft des Zusammenhangs einer Menge auch folgendermaßen formulieren können: *Eine Teilmenge E eines topologischen Raumes (X, τ) ist genau dann zusammenhängend, wenn es kein Paar offener (oder abgeschlossener) Teilmengen G'_X und G''_X gibt, die disjunkt sind und derart, dass $E \cap G'_X \neq \varnothing$, $E \cap G''_X \neq \varnothing$ und $E \subset G'_X \cup G''_X$.*

2. Zeigen Sie:

a) Die Vereinigung zusammenhängender Teilräume mit einem gemeinsamen Punkt ist zusammenhängend.

b) Die Schnittmenge zusammenhängender Teilräume ist nicht immer zusammenhängend.

c) Der Abschluss eines zusammenhängenden Teilraumes ist zusammenhängend.

3. Wir können die Gruppe $GL(n)$ nicht singulärer $n \times n$-Matrizen mit reellen Elementen als offene Teilmenge im Produktraum $\mathbb{R}^{n^2}$ betrachten, wenn wir jedes Element der Matrix mit einer Kopie der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen assoziieren. Ist der Raum $GL(n)$ zusammenhängend?

4. Ein topologischer Raum ist *lokal zusammenhängend*, wenn jeder ihrer Punkte eine zusammenhängende Umgebung besitzt.

a) Zeigen Sie, dass ein lokal zusammenhängender Raum nicht zusammenhängend sein kann.

b) Die Menge E in $\mathbb{R}^2$ besteht aus dem Graphen der Funktion $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ (für $x \neq 0$) plus dem abgeschlossenen Intervall $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 0 \wedge |y| \leq 1\}$ auf der y-Achse. Die Menge E ist mit der durch den $\mathbb{R}^2$ induzierten Topologie versehen. Zeigen Sie, dass der sich daraus ergebende topologische Raum zusammenhängend ist, aber nicht lokal zusammenhängend.

5. In Absatz 7.2.2 haben wir eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ als eine Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ definiert, in der je zwei Punkte durch einen Weg verbunden werden können, dessen Spur in E liegt. Im Unterschied zu der Definition des topologischen Zusammenhangs, die wir in diesem Abschnitt eingeführt haben, wird das in Kapitel 7 eingeführte Konzept üblicherweise *wegweiser Zusammenhang* oder *bogenweiser Zusammenhang* genannt. Zeigen Sie:

a) Eine wegweise zusammenhängende Teilmenge in $\mathbb{R}^n$ ist zusammenhängend.

b) Nicht jede zusammenhängende Teilmenge in $\mathbb{R}^n$ mit $n > 1$ ist wegweise zusammenhängend (vgl. Aufgabe 4).

c) Jede zusammenhängende offen Teilmenge in $\mathbb{R}^n$ ist wegweise zusammenhängend.

9.5 Vollständige metrische Räume

In diesem Abschnitt werden wir nur metrische Räume untersuchen; genauer gesagt eine Klasse derartiger Räume, die in verschiedenen Gebieten der Analysis eine wichtige Rolle spielen.

9.5.1 Grundlegende Definitionen und Beispiele

In Analogie zu dem, was wir bereits von unseren Untersuchungen des Raumes $\mathbb{R}^n$ wissen, führen wir die Begriffe Cauchy-Folge (fundamentale Folge) und konvergente Folge von Punkten eines beliebigen metrischen Raumes ein.

Definition 1. Eine Folge $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ von Punkten eines metrischen Raumes (X, d) ist eine *Cauchy-Folge* oder eine *fundamentale* Folge, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ für alle Indizes $m, n \in \mathbb{N}$, die größer als N sind.

Definition 2. Eine Folge $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ von Punkten eines metrischen Raumes (X, d) konvergiert gegen den Punkt $a \in X$ und a ist ihr Grenzwert, falls $\lim\limits_{n\to\infty} d(a, x_n) = 0$.

Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, wird wie schon zuvor *konvergent* genannt.

Wir geben nun die grundlegende Definition:

Definition 3. Ein metrischer Raum (X, d) ist *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge ihrer Punkte konvergiert.

Beispiel 1. Die Menge $\mathbb{R}$ reeller Zahlen mit der Standardmetrik ist ein vollständiger metrischer Raum, wie aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium für die Konvergenz numerischer Folgen folgt.

Da jede konvergente Punktefolge in einem metrischen Raum offensichtlich eine Cauchy-Folge ist, können wir anmerken, dass die Definition eines vollständigen metrischen Raumes die Einführung des Cauchyschen Konvergenzkriteriums ermöglicht.

Beispiel 2. Wird beispielsweise die Zahl 0 aus der Menge $\mathbb{R}$ entfernt, dann ist die verbleibende Menge $\mathbb{R}\setminus 0$ kein vollständiger Raum in der Standardmetrik. Denn die Folge $\{x_n = 1/n; n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Cauchy-Folge von Punkten dieser Menge, die in $\mathbb{R} \setminus 0$ keinen Grenzwert besitzt.

Beispiel 3. Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist mit jeder der Standardmetriken vollständig, wie wir in Absatz 7.2.1 erklärt haben.

Beispiel 4. Wir betrachten die Menge $C[a,b]$ stetiger Funktionen mit reellen Werten auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ mit der Metrik

$$d(f,g) = \max_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)| \tag{9.9}$$

(vgl. Beispiel 7 in Abschnitt 9.1). Wir werden zeigen, dass der metrische Raum $C[a,b]$ vollständig ist.

Beweis. Sei $\{f_n(x);\, n \in \mathbb{N}\}$ eine Cauchy-Folge von Funktionen in $C[a,b]$, d.h.

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall m \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N} \big((m > N \wedge n > N) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \quad \forall x \in [a,b]\, (|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon)\big).\end{aligned} \tag{9.10}$$

Zu jedem festen Wert $x \in [a,b]$ ist die numerische Folge $\{f_n(x);\, n \in \mathbb{N}\}$, wie wir aus (9.10) erkennen können, eine Cauchy-Folge und besitzt daher nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium einen Grenzwert $f(x)$. Somit gilt

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)\ , \quad x \in [a,b]\ . \tag{9.11}$$

Wir werden zeigen, dass die Funktion $f(x)$ auf $[a,b]$ stetig ist und somit $f \in C[a,b]$.

Aus (9.10) und (9.11) folgt, dass die Ungleichung

$$|f(x) - f_n(x)| \le \varepsilon \quad \forall x \in [a,b] \tag{9.12}$$

für $n > N$ gilt.

Wir halten den Punkt $x \in [a,b]$ fest und zeigen, dass die Funktion f in diesem Punkt stetig ist. Angenommen, das Inkrement h ist derart, dass $(x+h) \in [a,b]$. Aus der Gleichung

$$f(x+h) - f(x) = f(x+h) - f_n(x+h) + f_n(x+h) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)$$

folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned}|f(x+h) - f(x)| \le{} & |f(x+h) - f_n(x+h)| \\ & + |f_n(x+h) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|\ .\end{aligned} \tag{9.13}$$

Auf Grund von (9.12) übersteigen die ersten und letzten Ausdrücke auf der rechten Seite dieser letzten Ungleichung für $n > N$ nicht ε. Wenn wir $n > N$ festhalten, erhalten wir eine Funktion $f_n \in C[a,b]$. Wir wählen dann $\delta = \delta(\varepsilon)$, so dass $|f_n(x+h) - f_n(x)| < \varepsilon$ für $|h| < \delta$ und erhalten so, dass $|f(x+h) - f(x)| < 3\varepsilon$ für $|h| < \delta$. Dies bedeutet aber, dass die Funktion f im Punkt x stetig ist. Da x im abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ ein beliebiger Punkt war, haben wir somit gezeigt, dass $f \in C[a,b]$. □

Somit ist der Raum $C[a,b]$ mit der Metrik (9.9) ein vollständiger metrischer Raum. Dies ist eine sehr wichtige Tatsache, von der in der Analysis häufig Gebrauch gemacht wird.

Beispiel 5. Wenn wir anstelle der Metrik (9.9) die Integralmetrik

$$d(f,g) = \int_a^b |f-g|(x)\,dx \tag{9.14}$$

auf derselben Menge $C[a,b]$ betrachten, ist der sich ergebende metrische Raum nicht mehr vollständig.

Beweis. Der Einfachheit halber werden wir annehmen, dass $[a,b] = [-1,1]$. Wir betrachten als Beispiel die Folge $\{f_n \in C[-1,1];\, n \in \mathbb{N}\}$ von Funktionen, die folgendermaßen definiert ist:

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{für} \quad -1 \le x \le -1/n\ , \\ nx, & \text{für} \quad -1/n < x < 1/n\ , \\ 1, & \text{für} \quad 1/n \le x \le 1\ . \end{cases}$$

(vgl. Abb. 9.2.)

Aus den Eigenschaften des Integrals folgt unmittelbar, dass diese Folge eine Cauchy-Folge im Sinne der Metrik (9.14) in $C[-1,1]$ ist. Gleichzeitig besitzt sie in $C[-1,1]$ keinen Grenzwert. Wäre nämlich eine stetige Funktion $f \in C[-1,1]$ der Grenzwert dieser Folge bzgl. der Metrik (9.14), dann müsste f auf dem Intervall $-1 \le x \le 0$ konstant gleich -1 sein und gleichzeitig konstant gleich 1 auf dem Intervall $0 < x \le 1$, was mit der Stetigkeit von f im Punkt $x = 0$ nicht verträglich ist. □

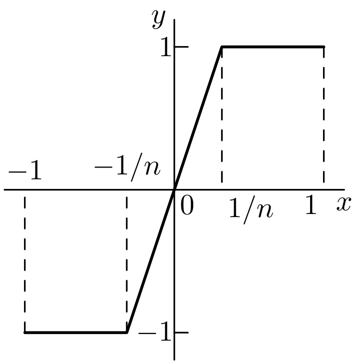

Abb. 9.2.

Beispiel 6. Es ist etwas schwieriger zu zeigen, dass sogar die Menge $\mathcal{R}[a,b]$ der Riemann-integrierbaren Funktionen mit reellen Werten, die auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ definiert sind, bzgl. der Metrik (9.14)[4] nicht

[4] Bzgl. der Metrik (9.14) vgl. die Anmerkung zu Beispiel 9 in Abschnitt 9.1.

vollständig ist. Wir werden dies mit Hilfe des Kriteriums für die Riemann-Integrierbarkeit einer Funktion nach Lebesgue zeigen.

Beweis. Wir wollen das abgeschlossene Intervall $[0,1]$ für das Intervall $[a,b]$ wählen und wir werden eine Cantor-Menge darauf konstruieren, die keine Menge mit Maß Null ist. Sei $\Delta \in]0,1/3[$. Wir entfernen aus dem Intervall $[0,1]$ den mittleren Teil mit der Länge Δ. Genauer gesagt, entfernen wir die $\Delta/2$-Umgebung des Mittelpunkts des abgeschlossenen Intervalls $[0,1]$. Auf jedem der beiden verbleibenden Intervalle entfernen wir das mittlere Stück der Länge $\Delta \cdot 1/3$. In jedem der vier verbleibenden abgeschlossenen Intervalle entfernen wir das mittlere Stück der Länge $\Delta \cdot 1/3^2$ und so weiter. Die Länge der auf diese Weise entfernten Intervalle beträgt $\Delta + \Delta \cdot 2/3 + \Delta \cdot 4/3^2 + \cdots + \Delta \cdot (2/3)^n + \cdots = 3\Delta$. Da $0 < \Delta < 1/3$, gilt $1 - 3\Delta > 0$ und daraus folgt, wie wir zeigen können, dass die (Cantor-) Menge K, die im abgeschlossenen Intervall $[0,1]$ verbleibt, nicht das Maß Null im Sinne von Lebesgue besitzt.

Wir betrachten nun die folgende Folge: $\{f_n \in \mathcal{R}[0,1]; n \in \mathbb{N}\}$. Sei f_n eine Funktion, die überall in $[0,1]$ gleich 1 ist, außer in den Punkten der Intervalle, die wir in den ersten n Schritten entfernt haben. Darin setzen wir sie gleich Null. Es ist einfach zu zeigen, dass diese Folge eine Cauchy-Folge bzgl. der Metrik (9.14) ist. Wäre eine Funktion $f \in \mathcal{R}[0,1]$ der Grenzwert dieser Folge, dann müsste f in fast jedem Punkt des Intervalls $[0,1]$ gleich der charakteristischen Funktion der Menge K sein. Dann hätte f in allen Punkten der Menge K Unstetigkeitsstellen. Da aber K nicht das Maß 0 hat, müssten wir aus dem Kriterium nach Lebesgue folgern, dass $f \notin \mathcal{R}[0,1]$. Daher ist $\mathcal{R}[a,b]$ bzgl. der Metrik (9.14) kein vollständiger metrischer Raum. □

9.5.2 Die Vervollständigung eines metrischen Raumes

Beispiel 7. Wir wollen wieder zur reellen Geraden zurückkehren und die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen mit der durch die Standardmetrik in $\mathbb{R}$ induzierten Metrik betrachten.

Es ist klar, dass eine Folge rationaler Zahlen, die gegen $\sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert, eine Cauchy-Folge ist, aber in $\mathbb{Q}$ keinen Grenzwert besitzt, d.h., $\mathbb{Q}$ ist mit dieser Metrik kein vollständiger Raum. $\mathbb{Q}$ ist jedoch ein Teilraum des vollständigen metrischen Raumes $\mathbb{R}$, den wir natürlicherweise als Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ betrachten. Beachten Sie, dass wir die Menge $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ auch als Teilmenge des vollständigen metrischen Raumes $\mathbb{R}^2$ betrachten können, dass es aber nicht sinnvoll erscheint, $\mathbb{R}^2$ eine Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ zu nennen.

Definition 4. Der kleinste vollständige metrische Raum, der einen vorgegebenen metrischen Raum (X,d) enthält, wird *Vervollständigung* von (X,d) genannt.

Diese intuitiv verständliche Definition erfordert zumindest zwei Klarstellungen: Was verstehen wir unter dem „kleinsten" Raum und existiert dieser Raum?

Wir werden bald in der Lage sein beide Fragen zu beantworten. In der Zwischenzeit benutzen wir die folgende formalere Definition.

Definition 5. Ist ein metrischer Raum (X, d) ein Teilraum des metrischen Raumes (Y, d) und ist die Menge $X \subset Y$ in Y überall dicht, dann nennen wir den Raum (Y, d) eine *Vervollständigung* des metrischen Raumes (X, d).

Definition 6. Wir sagen, dass der metrische Raum (X_1, d_1) zum metrischen Raum (X_2, d_2) *isometrisch* ist, falls eine bijektive Abbildung $f : X_1 \to X_2$ existiert, so dass für alle Punkte a und b in X_1 gilt, dass $d_2\big(f(a), f(b)\big) = d_1(a, b)$. (Die Abbildung $f : X_1 \to X_2$ wird in diesem Fall als *Isometrie* bezeichnet.)

Es ist klar, dass diese Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, d.h., wir erhalten so eine Äquivalenzrelation zwischen metrischen Räumen. Beim Studium der Eigenschaften metrischer Räume untersuchen wir nicht den einzelnen Raum, sondern die Eigenschaften aller Räume, die dazu isometrisch sind. Aus diesem Grund können wir isometrische Räume als identische Räume betrachten.

Beispiel 8. Zwei kongruente Figuren in der Ebene sind als metrische Räume isometrisch, so dass wir beispielsweise beim Studium metrischer Eigenschaften von Figuren vollständig von der Lage einer Figur in der Ebene abstrahieren.

Wenn wir uns darauf verständigen, isometrische Räume als gleich zu identifizieren, können wir zeigen, dass dann, wenn eine Vervollständigung eines metrischen Raumes überhaupt existiert, diese eindeutig ist.

Vorläufig beweisen wir die folgende Aussage.

Lemma. *Die folgende Ungleichung gilt für alle vier Punkte a, b, u und v des metrischen Raumes (X, d):*

$$|d(a, b) - d(u, v)| \leq d(a, u) + d(b, v) \; . \tag{9.15}$$

Beweis. Nach der Dreiecksungleichung gilt:

$$d(a, b) \leq d(a, u) + d(u, v) + d(b, v) \; .$$

Auf Grund der Symmetrie der Punkte folgt aus dieser Ungleichung (9.15). □

Wir beweisen nun die Eindeutigkeit der Vervollständigung.

Satz 1. *Sind die metrischen Räume (Y_1, d_1) und (Y_2, d_2) Vervollständigungen desselben Raumes (X, d), dann sind sie isometrisch.*

Beweis. Wir konstruieren eine Isometrie $f : Y_1 \to Y_2$ wie folgt: Für $x \in X$ setzen wir $f(x) = x$. Dann ist $d_2\big(f(x_1), f(x_2)\big) = d\big(f(x_1), f(x_2)\big) = d(x_1, x_2) = d_1(x_1, x_2)$ für $x_1, x_2 \in X$. Ist $y_1 \in Y_1 \setminus X$, dann ist y_1 ein Häufungspunkt von X, da X in Y_1 überall dicht ist. Sei $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von Punkten von X, die gegen y_1 bzgl. der Metrik d_1 konvergiert. Diese Folge ist bzgl. der Metrik d_1 eine Cauchy-Folge. Da aber die Metriken d_1 und d_2 auf X beide gleich d sind, ist diese Folge auch eine Cauchy-Folge in (Y_2, d_2). Letzterer ist vollständig, weswegen diese Folge einen Grenzwert $y_2 \in Y_2$ besitzt. Mit den üblichen Verfahren kann gezeigt werden, dass dieser Grenzwert eindeutig ist. Wir setzen nun $f(y_1) = y_2$. Da jeder Punkt $y_2 \in Y_2 \setminus X$ wie auch jeder Punkt $y_1 \in Y_1 \setminus X$ der Grenzwert einer Cauchy-Folge von Punkten in X ist, ist die so konstruierte Abbildung $f : Y_1 \to Y_2$ surjektiv.

Wir wollen nun zeigen, dass

$$d_2\big(f(y_1'), f(y_1'')\big) = d_1(y_1', y_1'') \tag{9.16}$$

für je zwei Punkte y_1', y_1'' in Y_1 gilt.

Falls y_1' und y_1'' zu X gehören, ist diese Gleichung offensichtlich. Im Allgemeinen bilden wir zwei Folgen $\{x_n'; n \in \mathbb{N}\}$ und $\{x_n''; n \in \mathbb{N}\}$, die gegen y_1' bzw. y_1'' konvergieren. Aus (9.15) folgt, dass

$$d_1(y_1', y_1'') = \lim_{n\to\infty} d_1(x_n', x_n'') \ ,$$

oder, was dasselbe ist, dass

$$d_1(y_1', y_1'') = \lim_{n\to\infty} d(x_n', x_n'') \ . \tag{9.17}$$

Nach unserer Konstruktion konvergieren diese gleichen Folgen gegen $y_2' = f(y_1')$ bzw. $y_2'' = f(y_1'')$ im Raum (Y_2, d_2). Daher ist

$$d_2(y_2', y_2'') = \lim_{n\to\infty} d(x_n', x_n'') \ . \tag{9.18}$$

Wenn wir (9.17) und (9.18) miteinander vergleichen, gelangen wir zu Gleichung (9.16). Diese Gleichung stellt gleichzeitig sicher, dass die Abbildung $f : Y_1 \to Y_2$ injektiv ist und vervollständigt damit den Beweis, dass f eine Isometrie ist. □

In Definition 5 zur Vervollständigung (Y, d) eines metrischen Raumes (X, d) haben wir verlangt, dass (X, d) ein Teilraum von (Y, d) ist, der in (Y, d) überall dicht ist. Wenn wir isometrische Räume identifizieren, können wir die Vorstellungen zur Vervollständigung erweitern und die folgende Definition annehmen:

Definition 5′. Ein metrischer Raum (Y, d_Y) ist eine *Vervollständigung* des metrischen Raumes (X, d_X), falls ein dichter Teilraum von (Y, d_Y) existiert, der zu (X, d_X) isometrisch ist.

Wir wollen nun die Existenz einer Vervollständigung zeigen.

Satz 2. *Jeder metrische Raum besitzt eine Vervollständigung.*

Beweis. Ist der Ausgangsraum bereits vollständig, dann entspricht er seiner eigenen Vervollständigung.

Im Wesentlichen haben wir bereits die Idee zur Konstruktion einer Vervollständigung eines unvollständigen metrischen Raumes (X, d_X) beim Beweis von Satz 1 vorgestellt.

Wir betrachten die Menge der Cauchy-Folgen im Raum (X, d_X). Zwei derartige Folgen $\{x'_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ und $\{x''_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ werden als *äquivalent* bezeichnet, wenn $d_X(x'_n, x''_n) \to 0$ für $n \to \infty$. Es ist einfach zu zeigen, dass wir so eine Äquivalenzrelation erhalten. Wir werden die Menge der Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen mit S bezeichnen. Wir führen in S folgende Metrik ein: Sind s' und s'' Elemente von S und sind $\{x'_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ und $\{x''_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ Folgen der Klassen s' bzw. s'', dann setzen wir

$$d(s', s'') = \lim_{n\to\infty} d_X(x'_n, x''_n)\,. \tag{9.19}$$

Aus der Ungleichung (9.15) folgt, dass diese Definition nicht zweideutig ist: Der Grenzwert auf der rechten Seite existiert (nach dem Cauchyschen Kriterium für eine numerische Folge) und ist von der Wahl der besonderen Folgen $\{x'_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ und $\{x''_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ in den Klassen s' und s'' unabhängig.

Die Funktion $d(s', s'')$ erfüllt alle Axiome einer Metrik. Der sich daraus ergebende metrische Raum (S, d) ist die gesuchte Vervollständigung des Raumes (X, d_X). Tatsächlich ist (X, d_X) isometrisch zum Teilraum (S_X, d) des Raumes (S, d), der aus den Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen besteht, die konstante Folgen $\{x_n = x \in X;\, n \in \mathbb{N}\}$ enthalten. Es ist nur natürlich, eine derartige Klasse $s \in S$ mit dem Punkt $x \in X$ zu identifizieren. Die Abbildung $f : (X, d_X) \to (S_X, d)$ ist offensichtlich eine Isometrie.

Nun muss nur noch gezeigt werden, dass (S_X, d) in (S, d) überall dicht ist und dass (S, d) ein vollständiger Raum ist.

Wir beweisen zunächst, dass (S_X, d) in (S, d) dicht ist. Sei s ein beliebiges Element aus S und $\{x_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ eine Cauchy-Folge in (X, d_X), die zur Klasse $s \in S$ gehört. Wenn wir $\xi_n = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ setzen, erhalten wir eine Folge $\{\xi_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ von Punkten in (S_X, d), die genau das Element $s \in S$ als Grenzwert besitzt, wie wir aus (9.19) erkennen können.

Wir wollen nun zeigen, dass der Raum (S, d) vollständig ist. Sei $\{s_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ eine beliebige Cauchy-Folge im Raum (S, d). Wir wählen zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Element ξ_n in (S_X, d), so dass $d(s_n, \xi_n) < 1/n$. Dann ist die Folge $\{\xi_n;\, n \in \mathbb{N}\}$, wie schon die Folge $\{s_n;\, n \in \mathbb{N}\}$, eine Cauchy-Folge. In diesem Fall ist die Folge $\{x_n = f^{-1}(\xi_n);\, n \in \mathbb{N}\}$ aber ebenfalls eine Cauchy-Folge. Die Folge $\{x_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ definiert ein Element $s \in S$, gegen das die vorgegebene Folge $\{s_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ auf Grund von Gleichung (9.19) konvergiert. □

Anmerkung 1. Nun, da die Sätze 1 und 2 bewiesen sind, wird klar, dass die Vervollständigung eines metrischen Raumes im Sinne von Definition 5′ tatsächlich der kleinste vollständige Raum ist (bis auf eine Isometrie), der den vorgegebenen metrischen Raum enthält. Auf diese Weise haben wir die ursprüngliche Definition 4 gerechtfertigt und präzisiert.

Anmerkung 2. Die Konstruktion der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, bei der wir von der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ausgingen, hätte ganz genau wie bei der Konstruktion der Vervollständigung eines metrischen Raumes, die wir oben in voller Allgemeingültigkeit ausgeführt haben, durchgeführt werden können. Genauso wurde der Übergang von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$ von Cantor formuliert.

Anmerkung 3. In Beispiel 6 haben wir gezeigt, dass der Raum $\mathcal{R}[a,b]$ der Riemann-integrierbaren Funktionen in der natürlichen Integralmetrik nicht vollständig ist. Seine Vervollständigung ist der wichtige Raum $\mathcal{L}[a,b]$ der Lebesgue-integrierbaren Funktionen.

9.5.3 Übungen und Aufgaben

1. a) Beweisen Sie das folgende Lemma geschachtelter Kugeln. *Sei* (X,d) *ein metrischer Raum und* $\widetilde{K}(x_1,r_1) \supset \cdots \supset \widetilde{K}(x_n,r_n) \supset \cdots$ *eine geschachtelte Folge von abgeschlossenen Kugeln in* X, *deren Radien gegen Null streben. Der Raum* (X,d) *ist genau dann vollständig, wenn zu jeder derartigen Folge ein eindeutiger Punkt existiert, der in allen Kugeln der Folge enthalten ist.*

b) Zeigen Sie, dass dann, wenn wir die Bedingung $r_n \to 0$ für $n \to \infty$ im obigen Lemma weglassen, die Schnittmenge einer geschachtelten Folge von Kugeln leer sein kann und dies sogar in einem vollständigen Raum.

2. a) Eine Menge $E \subset X$ eines metrischen Raumes (X,d) ist *nirgendwo dicht* in X, wenn sie in keiner Kugel dicht ist, d.h., falls zu jeder Kugel $K(x,r)$ eine zweite Kugel $K(x_1,r_1) \subset K(x,r)$ existiert, die keine Punkte der Menge E enthält.
Eine Menge E ist von der ersten Kategorie in X, wenn sie als abzählbare Vereinigung nirgendwo dichter Mengen dargestellt werden kann.
Eine Menge, die nicht von der ersten Kategorie ist, ist von der zweiter Kategorie in X.
Zeigen Sie, dass ein vollständiger metrischer Raum eine Menge zweiter Kategorie (in sich selbst) ist.

b) Sei $f \in C^{(\infty)}[a,b]$. Es gelte, dass $\forall x \in [a,b]\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall m > n\ (f^{(m)}(x) = 0)$. Zeigen Sie, dass die Funktion f ein Polynom ist.

9.6 Stetige Abbildungen topologischer Räume

Aus dem Blickwinkel der Analysis enthält dieser und der folgende Abschnitt die wichtigsten Ergebnisse dieses Kapitels.

Die hier untersuchten zentralen Begriffe und Sätze bilden eine natürliche, manchmal in Worten ausgeführte Erweiterung für Abbildungen beliebiger topologischer oder metrischer Räume und für Konzepte und Sätze, die uns bereits bekannt sind. Dabei werden sich nicht nur die Aussagen der Sätze, sondern auch vielfach die Beweise als identisch zu den bereits betrachteten erweisen; in diesen Fällen werden die Beweise weggelassen, mit einem Hinweis auf die entsprechenden, bereits untersuchten Sätzen.

9.6.1 Der Grenzwert einer Abbildung

a. Grundlegende Definition und Spezialfälle

Definition 1. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung der Menge X mit einer bestimmten Basis $\mathcal{B} = \{B\}$ in X auf einen topologischen Raum Y. Der Punkt $A \in Y$ ist *Grenzwert der Abbildung $f : X \to Y$ auf der Basis $\mathcal{B}$* und wir schreiben $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = A$, falls für jede Umgebung $V(A)$ von A in Y ein Element $B \in \mathcal{B}$ der Basis $\mathcal{B}$ existiert, dessen Bild unter der Abbildung f in $V(A)$ enthalten ist.

Am häufigsten treffen wir auf den Fall, dass X wie Y ein topologischer Raum ist und $\mathcal{B}$ die Basis von Umgebungen oder punktierten Umgebungen eines Punktes $a \in X$. Wenn wir unsere frühere Schreibweise $x \to a$ für die Basis punktierter Umgebungen $\{\dot{U}(a)\}$ des Punktes a beibehalten, können wir Definition 1 für diese Basis spezialisieren:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A := \forall V(A) \subset Y \; \exists \dot{U}(a) \subset X \; \big(f\big(\dot{U}(a)\big) \subset V(A)\big) \; .$$

Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, können wir diese letzte Definition in $\varepsilon - \delta$-Notation formulieren:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A := \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in X$$
$$\big(0 < d_X(a, x) < \delta \Longrightarrow d_Y\big(A, f(x)\big) < \varepsilon\big) \; .$$

Anders formuliert:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} d_Y\big(A, f(x)\big) = 0 \; .$$

Wir erkennen daran, dass wir mit dem Begriff einer Umgebung das Konzept des Grenzwertes einer Abbildung $f : X \to Y$ auf einem topologischen oder metrischen Raum Y definieren können, wie wir es für $Y = \mathbb{R}$ oder allgemeiner $Y = \mathbb{R}^n$ getan haben.

b. Eigenschaften des Grenzwertes einer Abbildung

Wir machen nun einige Anmerkungen zu den allgemeinen Eigenschaften des Grenzwertes.

Wir halten zunächst fest, dass die früher erhaltene Eindeutigkeit des Grenzwertes nicht länger gilt, wenn Y kein Hausdorff-Raum ist. Ist Y aber ein Hausdorff-Raum, dann ist der Grenzwert eindeutig und der Beweis unterscheidet sich überhaupt nicht von dem, den wir für den Spezialfall $Y = \mathbb{R}$ oder $Y = \mathbb{R}^n$ gegeben haben.

Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung auf einen metrischen Raum, dann ist es sinnvoll von der *Beschränktheit* der Abbildung zu sprechen (und dabei die Beschränktheit der Menge $f(X)$ in Y zu meinen) und davon, dass eine Abbildung auf einer Basis $\mathcal{B}$ in X *schließlich beschränkt* ist (und dabei zu meinen, dass ein Element $B \in \mathcal{B}$ existiert, auf dem f beschränkt ist).

Aus der Definition eines Grenzwertes folgt, dass dann, wenn eine Abbildung $f : X \to Y$ einer Menge X mit der Basis $\mathcal{B}$ auf einen metrischen Raum Y einen Grenzwert auf der Basis $\mathcal{B}$ besitzt, sie auf dieser Basis schließlich beschränkt ist.

c. Fragen zur Existenz des Grenzwertes einer Abbildung

Satz 1. (Grenzwert verketteter Abbildungen.) *Sei Y eine Menge mit Basis $\mathcal{B}_Y$ und $g : Y \to Z$ eine Abbildung von Y auf einen topologischen Raum Z, die auf der Basis $\mathcal{B}_Y$ einen Grenzwert besitzt.*

Sei X eine Menge mit Basis $\mathcal{B}_X$ und $f : X \to Y$ eine Abbildung von X auf Y, so dass zu jedem Element $B_Y \in \mathcal{B}_Y$ ein Element $B_X \in \mathcal{B}_X$ existiert, dessen Bild in B_Y enthalten ist, d.h. $f(B_X) \subset B_Y$.

Unter diesen Annahmen ist die verkettete Abbildung $g \circ f : X \to Z$ der Abbildungen f und g definiert und besitzt einen Grenzwert auf der Basis $\mathcal{B}_X$ mit

$$\lim_{\mathcal{B}_X} g \circ f(x) = \lim_{\mathcal{B}_Y} g(y) \ .$$

Zum Beweis siehe Satz 7 in Abschnitt 3.2.

Ein anderer, wichtiger Satz zur Existenz des Grenzwertes ist das Cauchysche Kriterium, dem wir uns nun zuwenden wollen. Dieses Mal werden wir eine Abbildung $f : X \to Y$ in einen metrischen Raum untersuchen, genauer gesagt, in einen vollständigen metrischen Raum.

Für eine Abbildung $f : X \to Y$ der Menge X in einen metrischen Raum (Y, d) ist es nur natürlich, die folgende Definition zu treffen.

Definition 2. Die *Oszillation* der Abbildung $f : X \to Y$ auf einer Menge $E \subset X$ entspricht der Größe

$$\omega(f, E) = \sup_{x_1, x_2 \in E} d\bigl(f(x_1), f(x_2)\bigr) \ .$$

Dabei gilt der folgende Satz.

Satz 2. (Cauchysches Kriterium zur Existenz des Grenzwertes einer Abbildung.) *Sei X eine Menge mit einer Basis $\mathcal{B}$ und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung von X auf einen vollständigen metrischen Raum (Y, d).*

Es ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Abbildung f einen Grenzwert auf der Basis $\mathcal{B}$ besitzt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein Element B in $\mathcal{B}$ existiert, auf dem die Oszillation der Abbildung kleiner als ε ist.

In Kürze:

$$\exists \lim_{\mathcal{B}} f(x) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists B \in \mathcal{B} \left(\omega(f, B) < \varepsilon \right) .$$

Zum Beweis siehe Satz 6 in Absatz 3.2.4.

Wir wollen anmerken, dass die Vollständigkeit des Raumes Y nur für den Schluss von der rechten Seite auf die linke Seite notwendig ist. Ist Y kein vollständiger Raum, dann ist es außerdem meistens diese Schlussfolgerung, die ungültig wird.

9.6.2 Stetige Abbildungen

a. Grundlegende Definitionen

Definition 3. Eine Abbildung $f : X \to Y$ eines topologischen Raumes (X, τ_X) auf einen topologischen Raum (Y, τ_Y) ist *in einem Punkt* $a \in X$ *stetig*, wenn zu jeder Umgebung $V\big(f(a)\big) \subset Y$ des Punktes $f(a) \in Y$ eine Umgebung $U(a) \subset X$ des Punktes $a \in X$ existiert, deren Bild $f\big(U(a)\big)$ in $V\big(f(a)\big)$ enthalten ist.

Somit gilt also

$$\begin{aligned} &f : X \to Y \text{ ist stetig in } a \in X := \\ &\qquad = \forall V\big(f(a)\big) \, \exists U(a) \, \Big(f\big(U(a)\big) \subset V\big(f(a)\big) \Big) . \end{aligned}$$

Sind X und Y metrische Räume (X, d_X) und (Y, d_Y), dann kann Definition 3 natürlich auch in der $\varepsilon - \delta$-Notation formuliert werden:

$$\begin{aligned} &f : X \to Y \text{ ist stetig in } a \in X := \\ &\quad = \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in X \, \Big(d_X(a, x) < \delta \Longrightarrow d_Y\big(f(a), f(x)\big) < \varepsilon \Big) . \end{aligned}$$

Definition 4. Die Abbildung $f : X \to Y$ ist *stetig*, wenn sie in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

Wir bezeichnen die Menge der stetigen Abbildungen von X auf Y mit $C(X, Y)$.

Satz 3. (Kriterium für die Stetigkeit.) *Eine Abbildung $f : X \to Y$ eines topologischen Raumes (X, τ_X) auf einen topologischen Raum (Y, τ_Y) ist genau dann stetig, wenn das Urbild jeder offenen (bzw. abgeschlossenen) Teilmenge von Y offen (bzw. abgeschlossen) in X ist.*

Beweis. Da das Urbild eines Komplements dem Komplement des Urbilds entspricht, genügt es, die Behauptung für offene Mengen zu zeigen.

Wir zeigen zunächst, dass für $f \in C(X, Y)$ und $G_Y \in \tau_Y$ gilt, dass $G_X = f^{-1}(G_Y)$ zu τ_X gehört. Ist $G_X = \varnothing$, ist unmittelbar klar, dass das Urbild offen ist. Ist $G_X \neq \varnothing$ und $a \in G_X$, dann gibt es nach der Definition der

Stetigkeit der Abbildung f im Punkt a eine Umgebung $U_X(a)$ von $a \in X$ zur Umgebung G_Y des Punktes $f(a)$, so dass $f\big(U_X(a)\big) \subset G_Y$. Daher ist $U_X(a) \subset G_X = f^{-1}(G_Y)$. Da $G_X = \bigcup\limits_{a \in G_X} U_X(a)$, können wir folgern, dass G_X offen ist, d.h. $G_X \in \tau_X$.

Wir wollen nun beweisen, dass $f \in C(X,Y)$, falls das Urbild jeder offenen Menge in Y offen in X ist. Wenn wir einen Punkt $a \in X$ und eine Umgebung $V_Y\big(f(a)\big)$ seines Bildes $f(a)$ in Y herausgreifen, können wir erkennen, dass die Menge $U_X(a) = f^{-1}\big(V_Y\big(f(a)\big)\big)$ in jeder Umgebung von $a \in X$ offen ist, deren Bild in $V_Y\big(f(a)\big)$ enthalten ist. Folglich haben wir die Definition der Stetigkeit der Abbildung $f : X \to Y$ in einem beliebigen Punkt $a \in X$ bewiesen. □

Definition 5. Eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ eines topologischen Raumes (X, τ_X) auf einen anderen (Y, τ_Y) ist ein *Homöomorphismus*, falls sowohl die Abbildung selbst als auch die inverse Abbildung $f^{-1} : Y \to X$ stetig sind.

Definition 6. Topologische Räume, die Homöomorphismen aufeinander zulassen, werden *homöomorph* genannt.

Wie wir an Satz 3 erkennen können, entsprechen sich unter einem Homöomorphismus $f : X \to Y$ des topologischen Raumes (X, τ_X) auf (Y, τ_Y) die Systeme der offenen Mengen τ_X und τ_Y in dem Sinne, dass $G_X \in \tau_X \Leftrightarrow f(G_X) = G_Y \in \tau_Y$.

Daher sind homöomorphe Räume im Hinblick auf ihre topologischen Eigenschaften absolut identisch. Folglich ist ein Homöomorphismus dieselbe Art von Äquivalenzrelation in der Menge aller topologischen Räume wie beispielsweise Isometrie in der Menge metrischer Räume.

b. Lokale Eigenschaften stetiger Abbildungen

Wir stellen nun die lokalen Eigenschaften stetiger Abbildungen vor. Diese folgen unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften des Grenzwertes.

Satz 4. (Stetigkeit einer Verkettung stetiger Abbildungen.) *Seien (X, τ_X), (Y, τ_Y) und (Z, τ_Z) topologische Räume. Ist die Abbildung $g : Y \to Z$ in einem Punkt $b \in Y$ stetig und ist die Abbildung $f : X \to Y$ in einem Punkt $a \in X$ stetig, für den $f(a) = b$ gilt, dann ist die Verkettung dieser Abbildungen $g \circ f : X \to Z$ in $a \in X$ stetig.*

Dies folgt aus der Definition der Stetigkeit einer Abbildung und Satz 1.

Satz 5. (Beschränktheit einer Abbildung in einer Umgebung einer Stetigkeitsstelle). *Ist eine Abbildung $f : X \to Y$ eines topologischen Raumes (X, τ) auf einen metrischen Raum (Y, d) in einem Punkt $a \in X$ stetig, dann ist sie in einer Umgebung dieses Punktes beschränkt.*

Dieser Satz folgt daraus, dass eine Abbildung, die einen Grenzwert besitzt, (auf einer Basis) schließlich beschränkt ist.

Bevor wir den nächsten Satz zu Eigenschaften stetiger Abbildungen formulieren, möchten wir daran erinnern, dass wir für Abbildungen auf $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n$ den Ausdruck

$$\omega(f;a) := \lim_{r\to 0} \omega\big(f, K(a,r)\big)$$

als *Oszillation von f im Punkt a* definiert haben. Da sowohl der Begriff der Oszillation einer Abbildung auf einer Menge als auch der Begriff einer Kugel $K(a,r)$ in jedem metrischen Raum sinnvoll sind, ist auch die Definition der Oszillation $\omega(f,a)$ der Abbildung f im Punkt a für eine Abbildung $f : X \to Y$ eines metrischen Raumes (X, d_X) auf einen metrischen Raum (Y, d_Y) sinnvoll.

Satz 6. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ eines metrischen Raumes (X, d_X) auf einen metrischen Raum (Y, d_Y) ist genau dann im Punkt $a \in X$ stetig, wenn $\omega(f,a) = 0$.*

Dieser Satz folgt unmittelbar aus der Definition der Stetigkeit einer Abbildung in einem Punkt.

c. Globale Eigenschaften stetiger Abbildungen

Wir untersuchen nun einige der wichtigen globalen Eigenschaften stetiger Abbildungen.

Satz 7. *Das Bild einer kompakten Menge ist unter einer stetigen Abbildung kompakt.*

Beweis. Sei $f : K \to Y$ eine stetige Abbildung des kompakten Raumes (K, τ_K) auf einen topologischen Raum (Y, τ_Y) und sei $\{G_Y^\alpha,\ \alpha \in A\}$ eine Überdeckung von $f(K)$ durch offene Mengen in Y. Nach Satz 3 bilden die Mengen $\{G_X^\alpha = f^{-1}(G_Y^\alpha),\ \alpha \in A\}$ eine offen Überdeckung von K. Wir können eine endliche Überdeckung $G_X^{\alpha_1}, \ldots, G_X^{\alpha_n}$ herausgreifen und erhalten so eine endliche Überdeckung $G_Y^{\alpha_1}, \ldots, G_Y^{\alpha_n}$ von $f(K) \subset Y$. Daher ist $f(K)$ in Y kompakt. $\square$

Korollar. *Eine stetige reellwertige Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ einer kompakten Menge K nimmt in einem Punkt der kompakten Menge ihren maximalen (und auch den minimalen) Wert an.*

Beweis. Da $f(K)$ in $\mathbb{R}$ eine kompakte Menge ist, ist diese abgeschlossen und beschränkt. Dies bedeutet aber, dass $\inf f(K) \in f(K)$ und $\sup f(K) \in f(K)$. $\square$

Ist insbesondere K ein abgeschlossenes Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$, dann gelangen wir wiederum zum klassischen Extremwertsatz von Weierstraß.

Der Satz von Heine zur gleichmäßigen Stetigkeit lässt sich wörtlich auf Abbildungen, die auf kompakten Mengen stetig sind, übertragen. Wir benötigen dazu aber erst noch eine weitere Definition.

Definition 7. Eine Abbildung $f : X \to Y$ eines metrischen Raumes (X, d_X) in einen metrischen Raum (Y, d_Y) ist *gleichmäßig stetig*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass die Oszillation $\omega(f, E)$ von f auf jeder Menge $E \subset X$, deren Durchmesser kleiner als δ ist, kleiner als ε ist.

Satz 8. (Gleichmäßige Stetigkeit.) *Eine stetige Abbildung $f : K \to Y$ eines kompakten metrischen Raumes K in einen metrischen Raum (Y, d_Y) ist gleichmäßig stetig.*

Ist insbesondere K ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$ und ist $Y = \mathbb{R}$, gelangen wir wiederum zum klassischen Satz von Heine, dessen Beweis in Absatz 4.2.2 sich fast ohne Veränderungen auf diesen allgemeinen Fall übertragen lässt.

Wir wollen nun stetige Abbildungen zusammenhängender Räume betrachten.

Satz 9. *Das Bild eines zusammenhängenden Raumes ist unter einer stetigen Abbildung zusammenhängend.*

Beweis. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung eines zusammenhängenden topologischen Raumes (X, τ_X) auf einen topologischen Raum (Y, d_Y). Sei E_Y eine offen-abgeschlossene Teilmenge von Y. Nach Satz 3 ist das Urbild $E_X = f^{-1}(E_Y)$ der Menge E_Y offen-abgeschlossen in X. Da X zusammenhängend ist, ist entweder $E_X = \varnothing$ oder $E_X = X$. Dies bedeutet aber, dass entweder $E_Y = \varnothing$ oder $E_Y = Y = f(X)$. □

Korollar. *Ist eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ auf einem zusammenhängenden topologischen Raum (X, τ_X) stetig und nimmt sie die Werte $f(a) = A \in \mathbb{R}$ und $f(b) = B \in \mathbb{R}$ an, dann gibt es zu jeder Zahl C zwischen A und B einen Punkt $c \in X$, in dem $f(c) = C$ gilt.*

Beweis. Tatsächlich ist nach Satz 9 $f(X)$ eine zusammenhängende Menge in $\mathbb{R}$. Die einzigen zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind jedoch Intervalle (vgl. den entsprechenden Satz in Abschnitt 9.4). Daher gehört der Punkt C zusammen mit A und B zu $f(X)$. □

Ist insbesondere X ein abgeschlossenes Intervall, dann gelangen wir wiederum zum klassischen Zwischenwertsatz für stetige Funktionen mit reellen Werten.

9.6.3 Übungen und Aufgaben

1. a) Sind die Bilder offener (oder abgeschlossener) Mengen in X offen (oder abgeschlossen) in Y, wenn die Abbildung $f : X \to Y$ stetig ist?

b) Ist das Bild wie auch das inverse Bild einer offenen Menge unter der Abbildung $f : X \to Y$ offen, bedeutet dies notwendigerweise, dass f ein Homöomorphismus ist?

c) Ist eine Abbildung $f : X \to Y$ notwendigerweise ein Homöomorphismus, wenn sie stetig und bijektiv ist?
d) Ist eine Abbildung, die gleichzeitig b) und c) erfüllt, ein Homöomorphismus?

2. Zeigen Sie:

a) Jede stetige bijektive Abbildung eines kompakten Raumes in einen Hausdorff-Raum ist ein Homöomorphismus.
b) Ohne die Anforderung, dass der Wertebereich ein Hausdorff-Raum ist, ist die vorige Aussage im Allgemeinen nicht wahr.

3. Bestimmen Sie, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ (paarweise) als topologische Räume homöomorph sind: Eine Gerade, ein abgeschlossenes Intervall auf der Geraden, eine Kugelschale und ein Torus.

4. Ein topologischer Raum (X, τ) ist *bogenweise* oder *wegweise zusammenhängend*, wenn je zwei seiner Punkte durch einen Weg verbunden werden können, der in X liegt. Genauer formuliert, so bedeutet dies, dass es zu allen Punkten A und B in X eine stetige Abbildung $f : I \to X$ eines abgeschlossenen Intervalls $[a, b] \subset \mathbb{R}$ in X gibt, so dass $f(a) = A$ und $f(b) = B$.

a) Zeigen Sie, dass jeder wegweise zusammenhängende Raum zusammenhängend ist.
b) Zeigen Sie, dass jeder konvexe Raum in $\mathbb{R}^n$ wegweise zusammenhängend ist.
c) Zeigen Sie, dass jede zusammenhängende offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ wegweise zusammenhängend ist.
d) Zeigen Sie, dass eine Kugelschale $S(a, r)$ in $\mathbb{R}^n$ wegweise zusammenhängend ist, dass sie aber in anderen metrischen Räumen, die mit einer völlig anderen Topologie versehen sind, nicht zusammenhängend sein kann.
e) Beweisen Sie, dass es in einem topologischen Raum unmöglich ist, einen inneren Punkt einer Menge mit einem äußeren Punkt zu verbinden, ohne den Rand der Menge zu schneiden.

9.7 Das Prinzip einer kontrahierenden Abbildung

Wir werden hier ein Prinzip aufstellen, das sich trotz seiner Einfachheit als eine effektive Möglichkeit in Beweisen vieler Existenzsätze herausstellen wird.

Definition 1. Ein Punkt $a \in X$ ist ein *Fixpunkt* einer Abbildung $f : X \to X$, falls $f(a) = a$.

Definition 2. Eine Abbildung $f : X \to X$ eines metrischen Raumes (X, d) auf sich selbst wird eine *Kontraktion* genannt, falls es Zahlen q, $0 < q < 1$ gibt, so dass die Ungleichung

$$d\big(f(x_1), f(x_2)\big) \leq q d(x_1, x_2) \tag{9.20}$$

für alle x_1 und x_2 in X gilt.

Satz. (Fixpunktsatz von Banach[5], Fixpunktprinzip.) *Eine kontrahierende Abbildung $f : X \to X$ eines vollständigen metrischen Raumes (X, d) auf sich selbst besitzt einen eindeutigen Fixpunkt a.*

Außerdem konvergiert die rekursiv definierte Folge x_0, $x_1 = f(x_0)$, ..., $x_{n+1} = f(x_n)$,... für jeden Punkt $x_0 \in X$ gegen a. Die Konvergenzgeschwindigkeit ergibt sich aus der Abschätzung

$$d(a, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0) . \tag{9.21}$$

Beweis. Wir greifen einen beliebigen Punkt $x_0 \in X$ heraus und zeigen, dass die Folge x_0, $x_1 = f(x_0)$, ..., $x_{n+1} = f(x_n)$,... eine Cauchy-Folge ist. Die Abbildung f ist eine Kontraktion, so dass nach (9.20) gilt, dass

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq q d(x_n, x_{n-1}) \leq \cdots \leq q^n d(x_1, x_0)$$

und

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \leq \\ &\leq \left(q^n + q^{n+1} + \cdots + q^{n+k-1}\right) d(x_1, x_0) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0) . \end{aligned}$$

Daraus können wir erkennen, dass die Folge $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ tatsächlich eine Cauchy-Folge ist.

Der Raum (X, d) ist vollständig, so dass diese Folge einen Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \in X$ besitzt.

Aus der Definition einer kontrahierenden Abbildung ist klar, dass eine Kontraktion immer stetig ist und daher gilt

$$a = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f\big(\lim_{n \to \infty} x_n\big) = f(a) .$$

Daher ist a ein Fixpunkt der Abbildung f.

Die Abbildung f kann keinen zweiten Fixpunkt besitzen, da aus den Gleichungen $a_i = f(a_i)$, $i = 1, 2$ folgt, wenn wir dabei (9.20) berücksichtigen, dass

$$0 \leq d(a_1, a_2) = d\big(f(a_1), f(a_2)\big) \leq q d(a_1, a_2) ,$$

was nur möglich ist, wenn $d(a_1, a_2) = 0$, d.h. $a_1 = a_2$.

Als Nächstes finden wir beim Übergang zum Grenzwert für $k \to \infty$ in der Ungleichung

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0) ,$$

dass

$$d(a, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0) . \qquad \square$$

[5] S. Banach (1892–1945) – polnischer Mathematiker, einer der Begründer der Funktionalanalysis.

Der folgende Satz ergänzt den vorigen.

Satz. (Stabilität des Fixpunkts.) *Sei* (X, d) *ein vollständiger metrischer Raum und* (Ω, τ) *ein topologischer Raum, der im Folgenden die Rolle eines Parameterraumes spielt.*

Angenommen, zu jedem Wert des Parameters $t \in \Omega$ *gehöre eine kontrahierende Abbildung* $f_t : X \to X$ *des Raumes* X *auf sich selbst und es gelten die folgenden Bedingungen:*

a) *Die Familie* $\{f_t;\, t \in \Omega\}$ *ist gleichmäßig kontrahierend, d.h., es gibt ein* q, $0 < q < 1$, *so dass jede Abbildung* f_t *eine* q*-Kontraktion ist.*
b) *Zu jedem* $x \in X$ *ist die Abbildung* $f_t : \Omega \to X$ *als eine Funktion von* t *in einem Punkt* $t_0 \in \Omega$ *stetig, d.h.* $\lim\limits_{t \to t_0} f_t(x) = f_{t_0}(x)$.

Dann hängt die Lösung $a(t) \in X$ *der Gleichung* $x = f_t(x)$ *im Punkt* t_0 *stetig von* t *ab, d.h.* $\lim\limits_{t \to t_0} a(t) = a(t_0)$.

Beweis. Wie wir im Beweis des vorigen Satzes gezeigt haben, können wir die Lösung $a(t)$ der Gleichung $x = f_t(x)$, beginnend in jedem Punkt $x_0 \in X$, als Grenzwert der Folge $\{x_{n+1} = f_t(x_n);\, n = 0, 1, \ldots\}$ erhalten. Sei $x_0 = a(t_0) = f_{t_0}\big(a(t_0)\big)$.

Unter Berücksichtigung der Abschätzung (9.21) und Bedingung a) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
d\big(a(t), a(t_0)\big) &= d\big(a(t), x_0\big) \le \\
&\le \frac{1}{1-q} d(x_1, x_0) = \frac{1}{1-q} d\Big(f_t\big(a(t_0)\big), f_{t_0}\big(a(t_0)\big)\Big) \; .
\end{aligned}
$$

Nach Bedingung b) strebt der letzte Ausdruck in dieser Relation für $t \to t_0$ gegen Null. Somit haben wir bewiesen, dass

$$
\lim_{t \to t_0} d\big(a(t), a(t_0)\big) = 0 \; , \quad \text{d.h.} \; \lim_{t \to t_0} a(t) = a(t_0) \; . \qquad \square
$$

Beispiel 1. In den Fußstapfen von Picard[6] wollen wir als ein wichtiges Beispiel für die Anwendung des Prinzips einer kontrahierenden Abbildung einen Existenzsatz[7] für die Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = f\big(x, y(x)\big)$, die eine Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ erfüllt, beweisen.

Sei $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ *mit*

$$
|f(u, v_1) - f(u, v_2)| \le M |v_1 - v_2| \; ,
$$

[6] Ch. É. Picard (1856–1941) – französischer Mathematiker, der in der Theorie der Differentialgleichungen und der analytischen Funktionentheorie viele wichtigen Ergebnisse erzielte.

[7] Dieser Satz wird üblicherweise Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard–Lindelöf genannt.

wobei M eine Konstante ist. Dann existiert zu jeder Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0 \tag{9.22}$$

eine Umgebung $U(x_0)$ von $x_0 \in \mathbb{R}$ und eine eindeutige auf $U(x_0)$ definierte Funktion $y = y(x)$, die die Gleichung

$$y' = f(x, y) \tag{9.23}$$

und die Anfangsbedingung (9.22) *erfüllt.*

Beweis. Die Gleichung (9.23) und die Bedingung (9.22) lassen sich in einer einzigen Gleichung gemeinsam formulieren:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\, dt\,. \tag{9.24}$$

Wenn wir die rechte Seite dieser Gleichung mit $A(y)$ bezeichnen, dann erkennen wir, dass $A : C\big(V(x_0), \mathbb{R}\big) \to C\big(V(x_0), \mathbb{R}\big)$ eine Abbildung der Menge der auf einer Umgebung $V(x_0)$ von x_0 definierten stetigen Funktionen auf sich selbst ist. Wenn wir $C\big(V(x_0), \mathbb{R}\big)$ als metrischen Raum mit der gleichförmigen Metrik (vgl. Gl. (9.6) in Abschnitt 9.1) betrachten, erhalten wir

$$\begin{aligned} d(Ay_1, Ay_2) &= \max_{x \in V(x_0)} \left| \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_1(t)\big)\, dt - \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_2(t)\big)\, dt \right| \leq \\ &\leq \max_{x \in V(x_0)} \left| \int_{x_0}^{x} M|y_1(t) - y_2(t)|\, dt \right| \leq M|x - x_0|\, d(y_1, y_2)\,. \end{aligned}$$

Wenn wir annehmen, dass $|x - x_0| \leq \frac{1}{2M}$, dann ist die Ungleichung

$$d(Ay_1, Ay_2) \leq \frac{1}{2} d(y_1, y_2)$$

auf dem entsprechenden abgeschlossenen Intervall I erfüllt, wobei $d(y_1, y_2) = \max\limits_{x \in I} |y_1(x) - y_2(x)|$. Damit ist

$$A : C(I, \mathbb{R}) \to C(I, \mathbb{R})$$

eine kontrahierende Abbildung des (vgl. Beispiel 4 in Abschnitt 9.5) vollständigen metrischen Raumes $\big(C(I, \mathbb{R}), d\big)$ auf sich selbst, die nach dem Prinzip für kontrahierende Abbildungen einen eindeutigen Fixpunkt $y = Ax$ haben muss. Dies bedeutet aber, dass die gerade gefundene Funktion in $C(I, \mathbb{R})$ die auf $I \ni x_0$ definierte eindeutige Funktion ist, die Gl. (9.24) erfüllt. $\square$

Beispiel 2. Zur Veranschaulichung des eben Gesagten wollen wir die Lösung der bekannten Gleichung

$$y' = y$$

mit der Anfangsbedingung (9.22) mit Hilfe des Prinzips für kontrahierende Abbildungen suchen.

In diesem Fall ist

$$Ay = y_0 + \int_{x_0}^{x} y(t)\,dt$$

und das Prinzip ist zumindest für $|x - x_0| \leq q < 1$ anwendbar.

Beginnend mit der Anfangsnäherung $y(x) \equiv 0$ konstruieren wir schrittweise die Näherungsfolge $0, y_1 = A(0), \ldots, y_{n+1}(t) = A\bigl(y_n(t)\bigr), \ldots$

$$\begin{array}{rcl}
y_1(t) & = & y_0 \ , \\
y_2(t) & = & y_0\bigl(1 + (x - x_0)\bigr) \ , \\
y_3(t) & = & y_0\bigl(1 + (x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\bigr) \ , \\
\multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
y_{n+1}(t) & = & y_0\bigl(1 + (x - x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n\bigr) \ , \\
\multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}
\end{array}$$

aus der bereits klar wird, dass

$$y(x) = y_0 \mathrm{e}^{x - x_0} \ .$$

Das in diesem Satz formulierte Fixpunktprinzip wird auch als *Prinzip der kontrahierenden Funktion* bezeichnet. Es entsprang einer Verallgemeinerung des Beweises des Existenzsatzes von Picard-Lindelöf für eine Lösung der Differentialgleichung (9.23), die wir in Beispiel 1 untersucht haben. Das Prinzip der kontrahierenden Funktion wurde in voller Allgemeinheit von Banach aufgestellt.

Beispiel 3. Newtonsche Methode zur Nullstellenbestimmung. Angenommen, eine konvexe Funktion mit reellen Werten, die auf einem abgeschlossenen Intervall $[\alpha, \beta]$ eine positive Ableitung besitzt, nehme in den Endpunkten dieses Intervalls Werte mit unterschiedlichen Vorzeichen an. Dann gibt es einen eindeutigen Punkt a im Intervall, in dem $f(a) = 0$ gilt. Zusätzlich zur einfachen Methode zur Auffindung des Punktes a durch schrittweise Bisektion des Intervalls, existieren ausgereiftere und schnellere Methoden zu seiner Bestimmung, die die Eigenschaften der Funktion f ausnutzen. So können wir in diesem Fall die folgende von Newton vorgeschlagen Methode benutzen, die *Newton-Methode* genannt wird. Wir beginnen bei einem beliebigen Punkt $x_0 \in [\alpha, \beta]$ und schreiben die Gleichung $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ der Tangente an

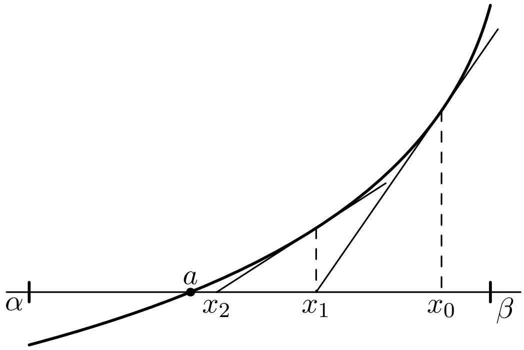

Abb. 9.3.

den Graphen der Funktion im Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$. Wir gelangen so zum Punkt $x_1 = x_0 - \big[f'(x_0)\big]^{-1} \cdot f(x_0)$, in dem die Tangente die x-Achse schneidet (vgl. Abb. 9.3). Wir nehmen nun x_1 als nächste Näherung für die Nullstelle a und wiederholen diesen Vorgang, indem wir x_0 durch x_1 ersetzen. Auf diese Weise erhalten wir eine Folge

$$x_{n+1} = x_n - \big[f'(x_n)\big]^{-1} \cdot f(x_n) \tag{9.25}$$

von Punkten, die, wie sich beweisen lässt, im gegenwärtigen Fall monoton gegen a strebt.

Ist insbesondere $f(x) = x^k - a$, d.h., wenn wir $\sqrt[k]{a}$ für $a > 0$ suchen, nimmt die rekursive Gleichung (9.25) die folgende Gestalt an:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - a}{k x_n^{k-1}} \,.$$

Für $k = 2$ erhalten wir die bekannte Gleichung

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) .$$

Die Methode (9.25) zum Aufstellen der Folge $\{x_n\}$ wird *Newton-Methode* genannt.

Wenn wir anstelle der Folge (9.25) die Folge betrachten, die durch die rekursive Gleichung

$$x_{n+1} = x_n - \big[f'(x_0)\big]^{-1} \cdot f(x_n) \tag{9.26}$$

gegeben wird, sprechen wir von der *modifizierten Newton-Methode*[8]. Die Modifikation besteht darin, dass wir die Ableitung nur einmal im Punkt x_0 berechnen.

[8] Sie besitzt in der Funktionalanalysis zahlreiche Anwendungen und wird dann *Newton-Kantorowitsch Verfahren* genannt. L.W. Kantorovich (1912–1986) – bekannter russischer Mathematiker, dessen Verdienste in der mathematischen Ökonomie (optimale Ressourcen-Verteilung) ihm zum Nobelpreis verhalfen.

Wir betrachten die Abbildung

$$x \mapsto A(x) = x - \left[f'(x_0)\right]^{-1} \cdot f(x) . \tag{9.27}$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es einen Punkt ξ zwischen x_1 und x_2, so dass

$$|A(x_2) - A(x_1)| = \left|\left[f'(x_0)\right]^{-1} \cdot f'(\xi)\right| \cdot |x_2 - x_1| .$$

Gelten daher die Bedingungen

$$A(I) \subset I \tag{9.28}$$

und

$$\left|\left[f'(x_0)\right]^{-1} \cdot f'(x)\right| \leq q < 1 \tag{9.29}$$

auf einem abgeschlossenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$, dann ist die durch (9.27) definierte Abbildung $A : I \to I$ auf diesem Intervall eine Kontraktion. Folglich besitzt sie nach dem allgemeinen Prinzip einen eindeutigen Fixpunkt auf diesem Intervall. Wie wir allerdings an (9.27) erkennen können, ist die Bedingung $A(a) = a$ zu $f(a) = 0$ äquivalent.

Sind daher die Bedingungen (9.28) und (9.29) für eine Funktion f erfüllt, dann führt uns die modifizierte Newton-Methode (9.26) nach dem Prinzip für kontrahierende Abbildungen zur gewünschten Lösung $x = a$ für $f(x) = 0$.

9.7.1 Übungen und Aufgaben

1. Zeigen Sie, dass die Bedingung (9.20) im Prinzip der kontrahierenden Abbildung nicht durch die schwächere Bedingung

$$d\Big(f(x_1), f(x_2)\Big) < d(x_1, x_2)$$

ersetzt werden kann.

2. a) Sei $f : X \to X$ eine Abbildung eines vollständigen metrischen Raumes (X, d) auf sich selbst, so dass die Iteration $f^n : X \to X$ eine Kontraktion ist. Beweisen Sie, dass dann f einen eindeutigen Fixpunkt besitzt.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $A : C(I, \mathbb{R}) \to C(I, \mathbb{R})$ in Beispiel 2 derart ist, dass für jedes abgeschlossene Intervall $I \subset \mathbb{R}$ eine Iteration A^n der Abbildung A eine Kontraktion ist.

c) Folgern Sie aus b), dass die lokale Lösung $y = y_0 \mathrm{e}^{x - x_0}$ in Beispiel 2 tatsächlich auf der gesamten reellen Geraden eine Lösung der Ausgangsgleichung ist.

3. a) Zeigen Sie, dass im Fall einer konvexen Funktion mit einer positiven Ableitung auf $[\alpha, \beta]$, die in den Endpunkten unterschiedliche Vorzeichen annimmt, die Newton-Methode tatsächlich eine Folge $\{x_n\}$ ergibt, die gegen den Punkt $a \in [\alpha, \beta]$ konvergiert, für den $f(a) = 0$.

b) Schätzen Sie die Konvergenzgeschwindigkeit der Folge (9.25) gegen den Punkt a ab.