

*Man kann gewiss nicht alles simpel sagen,
aber man kann es einfach sagen.
Und tut man es nicht,
so ist das ein Zeichen,
dass die Denkarbeit noch nicht beendet war.*

Tucholsky

Vorwort zur 1. Auflage

Computerorientierte Berechnungsverfahren der Baustatik unterscheiden sich grundlegend von klassischen Berechnungsverfahren, die für die Handrechnung oder für die zeichnerische Lösung einer statischen Aufgabe entwickelt wurden. Zwar sind die mechanischen Grundlagen und deren mathematische Formulierung in der Regel bei beiden Verfahren gleich, jedoch ist die Lösung der mathematischen Aufgabe nach sehr unterschiedlichen Gesichtspunkten optimiert. Bei den klassischen Verfahren werden die zu lösenden Gleichungen so aufbereitet, dass ein Minimum an Rechenaufwand entsteht und ein größtmögliches Maß an Anschaulichkeit in den einzelnen Lösungsschritten gegeben ist. Damit sollen die Bearbeitungszeit für die Durchführung der Berechnung so kurz wie möglich gehalten und die Richtigkeit der Rechenergebnisse sichergestellt werden. Demgegenüber ist der Rechenaufwand bei den computerorientierten Berechnungsverfahren nahezu bedeutungslos. Erst bei Gleichungen mit mehreren tausend Unbekannten wird er hier von Interesse. Computerorientierte Berechnungsverfahren sind in Hinblick auf eine möglichst schematische Durchführung der Rechenaufgabe formuliert. Das gesamte Tragwerk wird hierzu in eine Vielzahl von Abschnitten zerlegt, deren statisches Verhalten verhältnismäßig einfach und leicht überschaubar ist. Erst durch das Zusammenfügen aller Abschnitte entsteht das gesamte Tragwerk mit seinem komplizierten statischen Tragverhalten. Durch diese Vorgehensweise sind die Verfahren sehr übersichtlich und verhältnismäßig leicht zu programmieren. Sie erlauben die Berechnung von komplizierten Tragwerken mit nahezu dem gleichen Aufwand wie bei einfachen statischen Systemen. Darüber hinaus ermöglichen es computerorientierte Verfahren auch, komplizierte Flächentragwerke in sehr guter Näherung statisch zu berechnen, während die klassischen statischen Verfahren sich in der Regel auf Stabtragwerke beschränken müssen.

Computerorientierte Berechnungsverfahren wurden mit einer eher abstrakten, analysierenden Denkweise entwickelt, während die klassischen Verfahren einer eher ganzheitlichen Betrachtung des statischen Systems entsprechen. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die computerorientierten Berechnungsverfahren keiner ganzheitlichen Betrachtung bedürfen. Nach jeder Computerberechnung sind die Ergebnisse – wie im übrigen auch bei der Handrechnung – auf ihre Richtigkeit, zumindest aber auf ihre Plausibilität hin zu überprüfen. Dies erfordert das „ganze“ statische Wissen und die Erfahrung des konstruktiven Ingenieurs.

Für Computerberechnungen in der Baustatik hat sich heute die Finite-Element-Methode in der Praxis durchgesetzt. Für topologisch eindimensionale Systeme wie Durchlaufträger ist noch

das Übertragungsmatrizenverfahren von Bedeutung. Eine gewisse Sonderstellung nimmt auch die Randelementmethode für Flächentragwerke und Kontinua ein. In der vorliegenden Arbeit wird ausschließlich die Finite-Element-Methode behandelt.

Eine statische Berechnung ist nur dann transparent, wenn das zugrunde liegende Verfahren einsichtig und verständlich ist. Dies gilt auch für die Finite-Element-Methode. Daher ist das Verständnis der Grundlagen der Finite-Element-Methode auch für den Anwender baustatischer Berechnungsprogramme unabdingbar. Hierzu werden zunächst als mathematisches Hilfsmittel die Grundzüge der Matrizenrechnung und weiterhin die Grundgleichungen des Stabes, der Scheibe und der Platte behandelt. Daran schließt sich eine Einführung in die Finite-Element-Methode für Stabwerke an. Danach werden die theoretischen Grundlagen der Finite-Element-Berechnung von Scheiben- und Plattentragwerken, für die die Finite-Element-Methode heute zum Standardwerkzeug geworden ist, behandelt. Die Eigenschaften von gängigen, in kommerzielle Finite-Element-Software implementierten Elementtypen werden in einem Überblick dargestellt. Abschließend werden die in der Praxis wichtigen Fragen der Modellbildung und der Qualitätssicherung von Finite-Element-Berechnungen erörtert.

Das Buch richtet sich an praktisch tätige Ingenieure sowie an Studierende der Fachhochschulen und – soweit die Anwendung der Finite-Element-Methode im Vordergrund steht – auch der Technischen Hochschulen und Universitäten. Es hat zum Ziel, zu einem vertieften Verständnis der Finite-Element-Methode und der qualifizierten Interpretation der mit ihr erhaltenen Ergebnisse beizutragen.

Die Arbeit entstand im Zusammenhang mit meiner Lehrtätigkeit an der Fachhochschule Konstanz. Mein Dank für die unermüdete Unterstützung hierbei gilt vor allem Frau Outi Teirikangas-Lerssi sowie Herrn Petri Aitta. Dem Vieweg-Verlag danke ich für die hilfreiche Zusammenarbeit.

Konstanz, im August 1995

Horst Werkle

Vorwort zur zweiten Auflage

Seit dem Erscheinen der ersten Auflage vor sechs Jahre hat das Bewusstsein für die Bedeutung der Modellbildung bei Finite-Element-Berechnungen deutlich zugenommen. Dies kommt in neueren Buchveröffentlichungen und Fachbeiträgen zum Ausdruck. Fragen der Modellbildung zu vermitteln, war neben der Darstellung der grundlegenden Zusammenhänge der Finite-Element-Methode ein wesentliches und damals neues Anliegen der ersten Auflage.

In der vorliegenden zweiten Auflage wurden die Abschnitte über die Modellbildung und die Softwaretechnologie aktualisiert und durch ein neues Kapitel zur Dynamik der Tragwerke, die für spezielle Untersuchungen heute auch in der Praxis von Bedeutung ist, ergänzt.

Für die sorgfältige Durchführung der Zeichenarbeiten danke ich Frau Angelika Appelt. Mein Dank gilt auch wieder dem Vieweg Verlag und hier insbesondere Frau Julia Ehl für die gute, verständnisvolle Zusammenarbeit.

Konstanz, im Mai 2001

Horst Werkle

Vorwort zur dritten Auflage

Für die dritte Auflage wurde das Buch an einer Reihe von Stellen überarbeitet und ergänzt. Neu ist das Kapitel über die nichtlineare Finite-Element-Methode. Gerade in den letzten Jahren hat deren Bedeutung in der Praxis zugenommen. Dies kommt auch in neueren Normen wie der DIN 1045-1 (Ausgabe 2007-05) zum Ausdruck. Neu ist auch der Abschnitt über die Wölbkrafttorsion. Hier besteht im Bereich der praxisgerechten Modellierung von Verbindungen noch Forschungsbedarf.

Für die Durchsicht des Kapitels zu den Materialgesetzen im Stahlbetonbau danke ich Herrn Kollege Prof. Franz Zahn, PhD, für Hinweise zu den numerischen Verfahren Herrn Prof. Dr. Jürgen Garloff, HTWG Konstanz. Frau Karina Danulat und dem Vieweg Verlag danke ich wieder für die konstruktive Zusammenarbeit.

Konstanz, im Oktober 2007

Horst Werkle

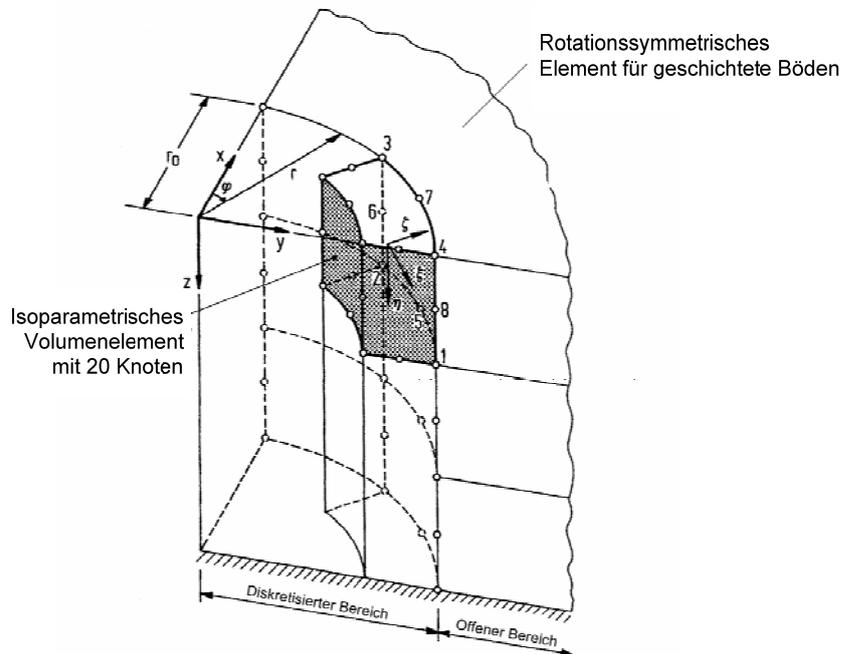


Bild 4-61 Übergang zwischen einem isoparametrischen Volumenelement mit 20 Knoten und einem semifiniten Element zur Darstellung eines „unendlichen“ geschichteten Bodens (1/4 des gesamten Modells) nach [4.43]

4.11 Modellbildung von Bauteilen

4.11.1 Tragwerksmodelle

Die Idealisierung eines Tragwerks bei einer statischen Berechnung erfolgt in zwei Schritten. Im ersten Schritt wird das wirkliche Tragwerk in ein mit den Methoden der Statik berechenbares Tragwerksmodell überführt. Bei Stabwerken bezeichnet man das Tragwerksmodell auch als statisches System. Im zweiten Schritt wird für dieses Tragwerksmodell ein Berechnungsmodell festgelegt und mit einem geeigneten Berechnungsverfahren statisch untersucht.

Dieser Vorgang sei am Beispiel einer Flachdecke erläutert (Bild 4-62). Die Idealisierung der Bauteile „Stütze“ und „Decke“ als ein der Berechnung zugängliches Tragwerksmodell ist nicht eindeutig. So sind etwa – unter Beschränkung auf lineare Modelle – folgende Tragwerksmodelle denkbar:

- Modellierung von Decke und Stütze als dreidimensionales Kontinuum,
- schubstarre oder schubweiche Platte mit elastischer, flächenhafter Stützung,
- schubstarre oder schubweiche Platte mit elastischer oder starrer Punktstützung.

Für die Berechnung dieser Tragwerke kommen unterschiedliche Verfahren, die bestimmte Berechnungsmodelle erfordern in Frage, wie beispielsweise

- die Finite-Element-Methode,
- die Finite-Differenzen-Methode,
- die Randelementmethode und
- analytische Verfahren, die auf Reihenentwicklungen beruhen.

Eine Übereinstimmung der Ergebnisse unterschiedlicher Berechnungsverfahren kann natürlich nur dann erwartet werden, wenn die zugrunde liegenden Tragwerksmodelle übereinstimmen.

Bei den klassischen Verfahren der Baustatik ist die Bildung des Tragwerksmodells meistens offenkundig und wird durch dessen „Berechenbarkeit“ eingeschränkt. Die statische Berechnung von Flächentragwerken erfolgt „von Hand“ mit Hilfe von Tafelwerken, denen bestimmte Tragwerksmodelle zugrunde liegen, die in der Praxis meistens weiter nicht hinterfragt werden.

Bei der Modellbildung und der Ergebnisinterpretation auftretende Probleme, wie z. B. die Behandlung von Singularitäten der Schnittgrößen oder der Randstreifen effekt, sind bereits vom Aufsteller eines Tafelwerks in einer speziellen Weise gelöst worden. Computerorientierte Berechnungsverfahren zeichnen sich hingegen dadurch aus, dass mit ihnen sehr unterschiedliche und komplizierte Tragwerksmodelle der Berechnung zugänglich sind. Damit geht aber auch die Verantwortung für die Bildung des Tragwerksmodells und der Ergebnisinterpretation auf den Anwender des Berechnungsprogramms über.

Darüber hinaus ist das Berechnungsmodell, d. h. bei der Finite-Element-Methode das Finite-Element-Modell, so zu wählen, dass die erforderliche Rechengenauigkeit eingehalten wird.

Ein spezielles Problem bei der Bildung von Tragwerksmodellen, die in den Ergebnissen u.U. auftretenden Singularitäten, werden im nächsten Abschnitt behandelt. Daran schließt sich ein Abschnitt über allgemeine Regeln für die Bildung von Finite-Element-Modellen an. Die nachfolgenden Abschnitte befassen sich mit speziellen Problemen, die bei der Bildung von Tragwerksmodellen bei Scheiben und Platten und deren Ergebnisinterpretation auftreten. Hinweise auf die Modellbildung im Massivbau finden sich in [4.46], allgemeine Hinweise in [4.47, 4.48] und [4.119].

4.11.2 Singularitäten von Zustandsgrößen

Bei der Bildung des Tragwerksmodells und der Interpretation der Ergebnisse der Berechnung ist Stellen, an denen Singularitäten von Schnittgrößen oder Verschiebungen auftreten, besondere Beachtung zu schenken. An einer Singularität nimmt eine Schnittgröße oder eine Verschiebung einen unbeschränkten Wert an, d. h., im Grenzübergang erhält man ∞ . Ein solches Ergebnis ist physikalisch sinnlos und bedarf einer ingenieurmäßigen Interpretation.

Singularitäten treten an Stellen mit einer physikalisch unzureichenden Tragwerksmodellierung oder Lastdarstellung auf. Sie sind also ein Problem der Modellierung von Tragwerk und Lasten und nicht ein Problem des Berechnungsverfahrens. Ein einfaches Beispiel ist der Fall einer Einzellast auf einer Scheibe (Bild 4-63-a). Stellt man die Last F , die beispielsweise durch eine Stütze in die Scheibe eingeleitet wird, realitätsnah als Linienlast $p = F/a$ dar, so erhält man die Spannung in Lastmitte zu $\sigma_y = F/a$. Beim Übergang zur Einzellast erhält man für $a \rightarrow 0$ die Spannung unter der Last zu $\sigma_y \rightarrow \infty$. Eine genauere Untersuchung zeigt, dass nicht nur die Spannung σ_y , sondern auch die Spannungen σ_x und τ_{xy} , sowie die Verschiebungen unter der Einzellast eine Singularität besitzen [4.49, 4.50].

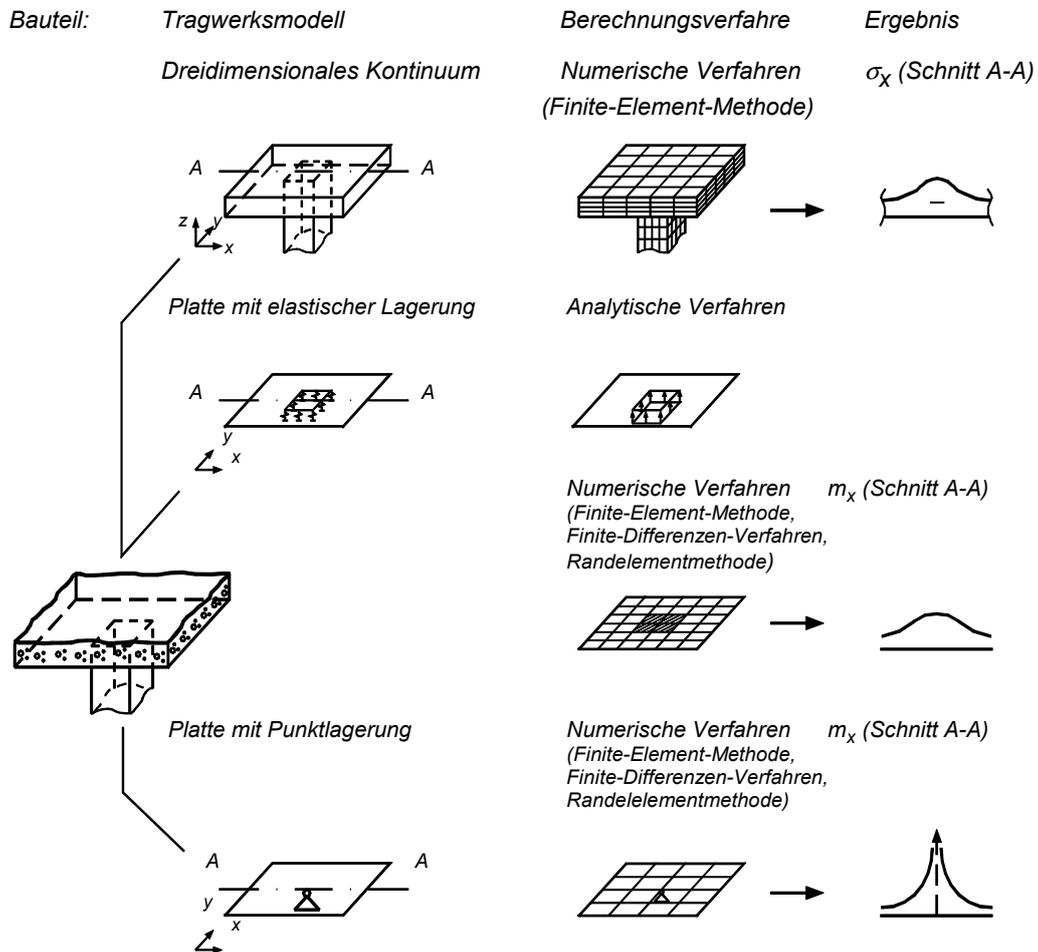


Bild 4-62 Modellbildung von Bauteilen am Beispiel einer Flachdecke mit Stütze

Auch bei Platten können Singularitäten auftreten. Dies zeigt das einfache Beispiel einer gelenkig gelagerten Kreisplatte, die im Mittelpunkt durch die Einzellast F belastet wird (Bild 4-64b). In einem beliebigen Schnitt im Radius r um den Mittelpunkt beträgt die Querkraft aus Gründen der Symmetrie offensichtlich $q_r = F/(2 \cdot \pi r)$. Im Kreismittelpunkt strebt die Querkraft q_r mit $r \rightarrow 0$ gegen ∞ . Eine weitergehende Untersuchung der Kreisplatte zeigt, dass nicht nur die Querkraft, sondern auch die Biegemomente unter der Einzellast eine Singularität besitzen [4.36]. Die Durchbiegungen bleiben aber bei der schubsteifen Platte unter der Einzellast endlich. Bei der schubweichen Platte weisen aber auch die Durchbiegungen unter der Einzellast eine Singularität auf. Stellt man die Einzellast als kreisförmig verteilte Flächenlast dar, so erhält man auch bei der Kreisplatte endliche Werte für die Biegemomente und die Querkraft.

Das in der Statik der starren Körper und der Stabtragwerke erfolgreich verwendete Konzept der Kräfte widerspricht dem Konzept der bezogenen Kräfte (Spannungen und Schnittgrößen pro Längeneinheit), mit dem Kraftgrößen bei Flächentragwerken und dreidimensionalen Körpern dargestellt werden.

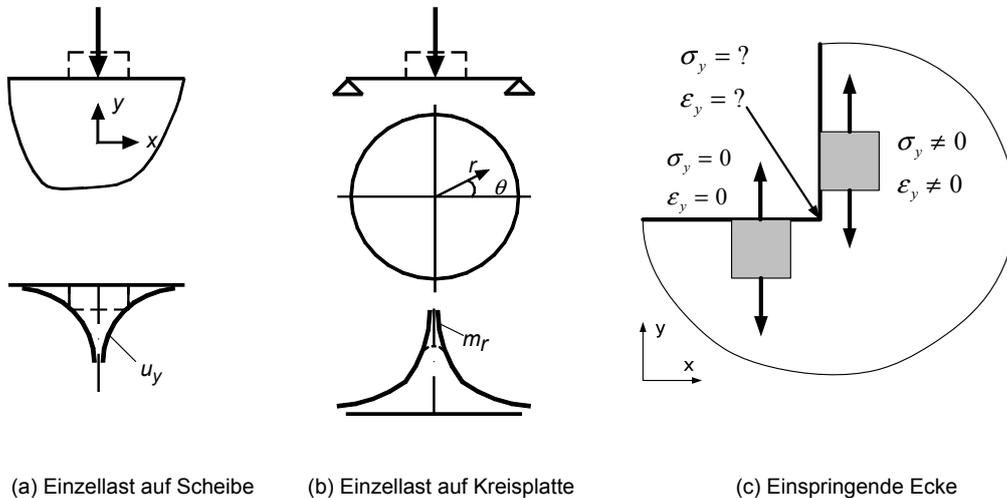


Bild 4-63 Singularitäten im Tragwerksmodell

Die obigen Beispiele zeigen, dass dieser Widerspruch an einzelnen Stellen zu Problemen führen kann. Stellt man Lasten als Strecken- bzw. Flächenlast dar, so nehmen die Spannungen bzw. bezogenen Schnittgrößen endliche Werte an. In einem gewissen Abstand von der Lastfläche stimmen die Ergebnisse nach dem Prinzip von St. Venant mit denjenigen der Einzellast überein. Die Schnittgrößen im Lastmittelpunkt hängen hingegen von der Größe der Lastfläche ab und reagieren - anders als beim Biegebalken - empfindlich auf deren willkürliche Verkleinerung.

Singularitäten von Spannungen und bezogenen Schnittgrößen können nicht nur bei Einzelkräften und -momenten, sondern auch an geometrisch ausgezeichneten Stellen im Tragwerk auftreten. Ein typisches Beispiel sind einspringende Ecken in Platten und Scheiben. Hier führen die Theorie des zweidimensionalen Spannungszustandes bzw. die Plattentheorie zu Singularitäten in den Spannungsverläufen, die wiederum bei einer realitätsnäheren Darstellung nicht auftreten würden. Die Problematik im Tragwerksmodell wird in Bild 4-63 verdeutlicht. Die Spannungen σ_y am horizontalen Rand (parallel zur x-Achse) sind offensichtlich Null, während die Spannungen am vertikalen Rand ungleich Null sind. Am Punkt in der Ecke, der zu beiden Rändern „gehört“ ist die Spannung offensichtlich nicht definiert. Es ergibt sich auch hier eine Singularität der Spannungen, die durch eine Ausrundung der Ecke beseitigt werden kann.

Im Rahmen der Finite-Element-Theorie ist es aufgrund des Verschiebungsansatzes und der daraus sich ergebenden endlichen Spannungswerte nicht möglich, „unendliche“ Spannungen an einer Singularitätenstelle zu erhalten. Vielmehr ergeben sich endliche Spannungswerte, die aber mit zunehmender Elementanzahl nicht zu einem Endwert konvergieren, sondern immer weiter anwachsen (vgl. Spannungen am Auflager in Beispiel 4.6 oder Plattenmoment unter der Einzellast in Beispiel 4.10). Singularitäten lassen sich aber durch entsprechende Tragwerksmodellierung und Lastdarstellung vermeiden.

Vermeidung von Singularitäten

- *Lasten als verteilte Lasten darstellen*
- *Auflager als elastische Flächen- oder Linienlager abbilden*
- *einspringende Ecken (physikalisch sinnvoll) ausrunden*

Für eine genaue Erfassung des Spannungsverlaufs sind meistens aufwändige Netzverfeinerungen der entsprechenden Bereiche erforderlich, die nach neueren Verfahren auch adaptiv erfolgen können [4.51]. Es wurden auch spezielle Finite Elemente entwickelt, die Ansatzfunktionen zur Berücksichtigung von Singularitäten enthalten [4.52].

In der Praxis stellt sich aber oft die Frage, inwieweit eine detaillierte Erfassung des Spannungsverlaufs im Bereich von Singularitäten erforderlich ist. Außerhalb des St. Venantschen Bereichs ist ihr Einfluss auf die Spannungsverläufe vernachlässigbar. Die Genauigkeit, mit der Schnittgrößen oder Spannungen im Bereich der Singularität benötigt werden, ist aber von der Aufgabenstellung abhängig. Beispielsweise werden im Stahlbau oft genauere Ergebnisse gefordert als im Stahlbetonbau, wo man einen gewissen Spannungsausgleich durch Rissebildungen und die Duktilität des Materials voraussetzt. Im Stahlbetonbau verzichtet man daher in der Praxis meistens auf eine aufwändige Modellierung zur Vermeidung von Singularitäten. Vielmehr nimmt man Singularitäten bewusst in Kauf und versucht, im Bereich von Singularitäten durch ingenieurmäßige Abschätzungen zu praxisgerechten Ergebnissen zu gelangen. Vernachlässigt man das Vorhandensein einer Singularität bei einer Finite-Element-Berechnung völlig, so sind die Spannungen an der Singularität äußerst ungenau und unterliegen einem gewissen Zufall. Sie liegen jedoch, wenn man eine im Übrigen sinnvolle Netzaufteilung wählt, im Rahmen der im Stahlbetonbau geforderten Genauigkeit meistens „auf der sicheren Seite“. Einige praktisch verwendete Regeln zur Behandlung von Singularitäten sind in den Abschnitten 4.11.4 und 4.11.5 angegeben.

4.11.3 Elementwahl und Netzbildung

Seit den Anfängen der Finite-Element-Methode in den sechziger Jahren wurde eine Vielzahl unterschiedlicher Elemente entwickelt. So finden sich in Softwareprodukten durchaus unterschiedliche Elementtypen [4.24]. Diese Entwicklung ist noch nicht abgeschlossen. Ziel der Forschung ist es, möglichst robuste und effiziente Elemente zu entwickeln. So ist es durchaus möglich, dass die Entwicklung zukünftig zu einigen wenigen Elementtypen führt, die sich als besonders leistungsfähig erweisen.

Ein Vergleich verschiedener Elementtypen erfordert eine differenzierte Betrachtung, so dass eine allgemeine Beurteilung kaum möglich erscheint. Dennoch sollen im Folgenden einige Regeln für die Elementwahl zusammengestellt werden.

Am Häufigsten werden für die Finite-Element-Modellierung 4-Knoten-Elemente verwendet. Diese erlauben einerseits eine gute Anpassung an die Bauteilgeometrie und besitzen andererseits eine vergleichsweise hohe Genauigkeit. Dreieckelemente sind Viereckelementen hinsichtlich der Anpassungsmöglichkeiten an die Bauteilgeometrie überlegen. Die Genauigkeit ist allerdings bei Viereckelementen höher, da sie bei gleicher Anzahl von Freiheitsgraden (zwei Dreiecke entsprechen einem Viereck) höhere Ansatzfunktionen enthalten. Von den in kommerzielle Software implementierten Typen von Viereckelementen für Platten darf man bezüglich der Biegemomente und Durchbiegungen eine vergleichbare Genauigkeit erwarten, sofern sie von der Rechteckform nicht oder nur unwesentlich abweichen. Bezüglich der Querkräfte,

des Verhaltens bei Singularitäten der Schnittgrößen und bei verzerrten Elementformen sind aber durchaus Unterschiede vorhanden.

Bei den Viereckelementen für Scheiben ist zwischen dem klassischen konformen (isoparametrischen) Element und den Elementen, die die Konformitätsbedingung (- gleiche Verschiebungen an den Grenzen benachbarter Elemente -) nicht erfüllen, zu unterscheiden. Derartige Elemente sind z. B. die Elemente mit nicht konformen Verschiebungsansätzen sowie die hybriden Elemente. Konforme Elemente sind zwar einer theoretischen Behandlung für Fehlerabschätzungen und Konvergenzbeweise leichter zugänglich, erweisen sich allerdings in der Praxis als vergleichsweise „steif“. Wesentliche Unterschiede ergeben sich bei der Berechnung von Scheiben, die - ähnlich wie Balken - auf Biegung beansprucht werden. Bei konformen Elementen ist eine sehr feine Netzeinteilung vorzunehmen, während bei nichtkonformen und hybriden Elementen wesentlich weniger Elemente ausreichen. Bei scheibenähnlichen Beanspruchungszuständen sind die Unterschiede hingegen gering.

Beispiel 4.11

Ein Kragarm nach Bild 4-64 ist als Scheibe für eine Belastung durch ein eingepreßtes Moment und eine Einzellast am Kragarmende sowie durch eine konstante Streckenlast in drei getrennten Lastfällen zu untersuchen. Die Diskretisierung soll mit nur zwei Finiten Elementen nach Bild

4-65 erfolgen. Das Beispiel wurde [4.53] entnommen, wobei jedoch auf die Kopplung der Knotenverschiebungen verzichtet wurde.

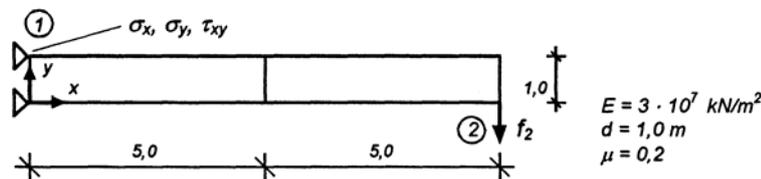


Bild 4-64 Modellierung eines Kragarms mit zwei Scheibenelementen

Die Untersuchungen werden zum Vergleich mit folgenden Elementtypen durchgeführt:

- V_{KO} - konforme Scheibenelemente nach Abschnitt 4.4 [4.7, 4.9]
- V_{NKO} - nichtkonforme Scheibenelemente nach [4.13]
- HYB - hybride Elemente mit Verdrehungsfreiheitsgraden nach [4.18]

An der Einspannstelle ergibt sich für alle in Tabelle 4-11 dargestellten Lastfälle ein Biegemoment von 250 [kNm] und somit nach der Theorie des Biegebalkens eine Normalspannung von $\sigma_x = 0,25 / (1^3 / 6) = 1,50$ [MN/m²]. Die Durchbiegung am Kragarmende erhält man zu:

$$\text{Lastfall 1 (Moment):} \quad f = \frac{M \cdot l^2}{2 EI} = \frac{250 \cdot 10^2}{2 \cdot 3 \cdot 10^7 \cdot \frac{1}{12}} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ [m]}$$

$$\text{Lastfall 2 (Einzelkraft): } f = \frac{F \cdot l^3}{3EI} + \frac{F \cdot l}{GA_s} = \frac{25 \cdot 10^3}{3 \cdot 3 \cdot 10^7 \cdot \frac{1}{12}} + \frac{25 \cdot 10}{1.25 \cdot 10^7 \cdot 0.8 \cdot 1} = 3.36 \cdot 10^{-3} [m]$$

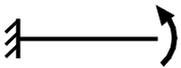
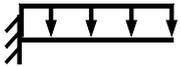
$$\text{Lastfall 3 (Streckenlast): } f = \frac{ql^4}{8EI} + \frac{ql^2}{2GA_s} = \frac{5 \cdot 10^4}{8 \cdot 3 \cdot 10^7 \cdot \frac{1}{12}} + \frac{5 \cdot 10^2}{2 \cdot 1.25 \cdot 10^7 \cdot 0.8 \cdot 1} = 2.53 \cdot 10^{-3} [m]$$

Die Finite-Element-Berechnungen wurden mit den Programmen [P1] und [P2] durchgeführt. Bei Verwendung konformer oder nichtkonformer Elemente besitzt das Modell acht Freiheitsgrade, bei Verwendung hybrider Elemente mit zusätzlichen Verdrehungsfreiheitsgraden nach [4.18] und [P2] 12 Freiheitsgrade. Die Spannungen an der Einspannstelle, Punkt 1, sowie die Durchbiegungen am Kragarmende sind in Tabelle 4-11 zusammengestellt. Grundsätzlich müssen die Spannungen der Scheibe nicht mit denjenigen eines Biegebalkens übereinstimmen, da die Bernoulli-Hypothese des Ebenbleibens der Querschnitte hier nicht gilt. Bei der gewählten Diskretisierung verlaufen aber beim konformen Element die Spannungen aufgrund der Verschiebungsansätze linear über die Höhe (vgl. Bild 4-14), so dass sich ein scheibenartiger Spannungsverlauf über die Querschnittshöhe mit einer Spannungsspitze in der Ecke nicht einstellen kann. Hierzu müsste der Kragarm über die Querschnittshöhe in erheblich mehr Elemente diskretisiert werden. Die Scheibenspannungen an der Einspannstelle sind daher in diesem Fall mit den Spannungen des Balkens vergleichbar. Wesentlich kritischer ist die Darstellbarkeit des Spannungsverlaufs in Richtung der Längsachse des Kragarms durch die Ansatzfunktionen der Finiten Elemente, wie die Ergebnisse der Spannung σ_x an der Einspannstelle und der Durchbiegungen f_2 am Kragarmende zeigen.

Bei der Momentenbelastung des Kragarms (Lastfall 1) sind die Normalspannungen σ_x am oberen bzw. unteren Rand in Richtung des Kragarms konstant, die Schubspannungen sind gleich Null, und die Biegelinie des Balkens ist eine Parabel zweiter Ordnung. Beim konformen Element kann aber aufgrund des Verschiebungsansatzes die „Biegelinie“ nur durch zwei lineare Funktionen dargestellt werden. Die fehlerhafte Spannung von 0.14 gegenüber 1.5 [MN/m²] und die fehlerhafte Durchbiegung von 0.44 gegenüber 5.0 [mm] zeigen, dass diese Näherung völlig unzureichend ist. Beim nichtkonformen Element sind die Ansatzfunktionen der Verschiebungen um quadratische Terme erweitert, so dass die Verschiebung durch eine Parabel zweiter Ordnung approximiert wird. Die Ansatzfunktionen enthalten damit die exakte Lösung für konstante Momentenbeanspruchung und führen hier somit zu den exakten Spannungen und der exakten Verschiebung des Balkens. Auch die Spannungs- und Verschiebungsansätze des hybriden Elements enthalten die exakte Lösungsfunktionen des Balkens. Mit dem hybriden Element erhält man daher ebenfalls die Werte der Balkentheorie.

Bei Belastung durch eine Einzellast haben die Normalspannungen entlang des oberen bzw. unteren Trägerrandes eine linearen, die Schubspannungen über die Balkenhöhe einen quadratischen Verlauf. Die Biegelinie ist eine Parabel dritter Ordnung. Das nichtkonforme Element kann aufgrund seines Verschiebungsansatzes quadratische „Biegelinien“ darstellen und nähert damit die Lösung an.

Tabelle 4-11 Biegebalkenberechnung mit Scheibenelementen

Belastung	Berechnung	σ_x [MN/m ²]	σ_y [MN/m ²]	τ_{xy} [MN/m ²]	f_2 [MN/m ²]
 $M = 250 \text{ kNm}$	Balkentheorie	1.50	0	0	5.00
	FEM V_KO	0.14	0.03	0.027	0.44
	FEM V_NKO	1.50	0	0	5.00
	FEM HYB	1.50	0	0	5.00
 $F = 25 \text{ kN}$	Balkentheorie	1.50	0	$V/A=0.025$	3.36
	FEM V_KO	0.10	0.02	0.230	0.29
	FEM V_NKO	1.13	0	0.025	3.25
	FEM HYB	1.13	0.01	0.028	3.24
 $q = 5 \text{ kN/m}$	Balkentheorie	1.50	0	$V/A=0.025$	2.53
	FEM V_KO	0.09	0.02	0.21	0.24
	FEM V_NKO	0.94	0	0.04	2.52
	FEM HYB	0.95	0.02	0.01	2.52

Während der Fehler bei den Verschiebungen mit $(3.33-3.14)/3.33=5.7\%$ noch mäßig ist, ist die Abweichung der Randspannung σ_x mit $(1.50-1.13)/1.5=24.7\%$ bereits deutlich höher.

Das hybride Element besitzt quadratische Spannungsansätze und senkrecht zu den Rändern kubische Verschiebungsansätze. Daher überrascht zunächst, dass die Spannungen und Verschiebungen nicht besser als beim nichtkonformen Element angenähert werden. Die Ursache hierfür liegt im Verschiebungsansatz in Richtung des Randes. Dieser ist lediglich linear, was am unteren bzw. oberen Rand des Kragarms einer konstanten Normalspannung σ_x entspricht. Diese Restriktion ist die Ursache dafür, dass die Genauigkeit des Elements im betrachteten Beispiel trotz höherer Anzahl von Freiheitsgraden nicht höher ist als beim nichtkonformen Element. Der Fehler der Randspannung nimmt mit zunehmender Anzahl von Elementen ab und liegt z. B. bei einer Einteilung in zehn hybride Elemente in Längsrichtung (anstelle von zwei Elementen) bei $(1.443-1.500)/1.500 = 3.8\%$. Die Schubspannungen nähern beim nichtkonformen und beim hybriden Element aufgrund der Ansatzfunktionen (Bild 4-14) den Mittelwert $\tau_{xy} = V/A$ an. Um den parabelförmigen Schubspannungsverlauf über die Querschnittshöhe und das Maximum von $\tau_{xy} = 1.5 \cdot V/A$ darzustellen, müssten wieder erheblich mehr Elemente verwendet werden.

Im Fall der Streckenlast ist die Biegelinie nach der Balkentheorie eine Parabel vierter Ordnung. Alle betrachteten Finiten Elemente können nur noch eine Näherungslösung liefern. Bei der vorgegebenen Diskretisierung mit zwei Elementen ist der Fehler in den Spannungen mit $(0.95-1.50)/1.50 = 36.7\%$ höher als bei Belastung mit einer Einzellast. Bei einer Elementierung in zehn Elemente in Längsrichtung (ein Element über die Höhe) erhält man mit den o. g. hybriden Elementen eine Normalspannung von $1.39 \text{ [MN/m}^2\text{]}$, d. h. immer noch einen Fehler von $(1.39-1.50)/1.50 = 7.3\%$. Erst bei einer Einteilung des Kragarms in 18 hybride Elemente erhält man an der Einspannung eine Randspannung σ_x von $1.452 \text{ [MN/m}^2\text{]}$ und somit einen Fehler von $(1.45-1.50)/1.50 = 3.3\%$.

Das Beispiel zeigt, dass konforme Scheibenelemente für biegebeanspruchte scheibenartige Tragwerke nur dann geeignet sind, wenn eine feine Netzeinteilung vorgenommen wird. Aber auch nichtkonforme und hybride Elemente erfordern, wenn Diskretisierungsfehler vermieden werden sollen, eine hinreichend hohe Anzahl von Elementen in Balkenlängsrichtung.

Beispiel 4.12

Für die in Beispiel 4.6 mit konformen Elementen berechnete Scheibe ist zum Vergleich die Spannung am unteren Scheibenrand mit nichtkonformen Elementen zu ermitteln.

Tabelle 4-12 Spannung am unteren Scheibenrand [MN/m²]

Elementierung	Konforme Elemente	Nichtkonforme Elemente
2 x 2	1.64	2.28
4 x 4	4.32	4.72
8 x 8	4.22	4.22

Die Ergebnisse sind für verschiedene Diskretisierungen in Tabelle 4-12 zusammengestellt. Sie zeigen, dass bei typischen Scheibenproblemen, bei denen keine biegeähnliche Beanspruchung vorliegt, die Unterschiede zwischen konformen und nichtkonformen Elementen gering sind.

Die Genauigkeit einer Berechnung wird von der Form der Finiten Elemente beeinflusst. Zu deren Beurteilung wurden Faktoren vorgeschlagen, die in Tabelle 4-13 erläutert sind [4.54]:

Formfaktoren von Finiten Elementen

- Seitenverhältnis a/b
- Winkel α
- Verjüngung t

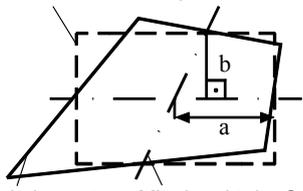
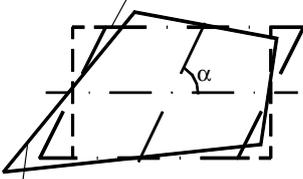
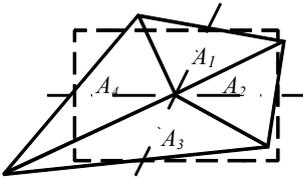
Der Wert a/b gibt bei Rechteckelementen das Seitenverhältnis an. Er wurde nach der Definition in Tabelle 4-13 für die allgemeine Viereckform erweitert. Als optimaler Wert gilt 1. Lange, schmale Elemente, z. B. mit $a/b > 2$, sollen vermieden werden.

Der Wert α gibt den Innenwinkel an. Als optimal gilt der rechte Winkel. Abweichungen von mehr als 45°, d. h. Innenwinkel mit $\alpha < 45^\circ$ oder $\alpha > 135^\circ$, sind zu vermeiden.

Die Verjüngung eines Vierecks ist ein Maß für seine Stellung zwischen der Rechteck- und Dreieckform. Der optimale Wert der Verjüngung $t = 1$ gilt für Rechteckelemente. Die Verjüngung $t = 0$ steht für Dreieckelemente.

Allgemein gilt das Quadrat als beste Form eines Finiten Elements. Es folgen als zweitbeste Form das Rechteck, als drittbeste das Parallelogramm und anschließend das allgemeine Viereck. Extrem verzerrte Elementformen, wie Vierecke mit einspringenden Ecken, sind unzulässig (Bild 4-31). Inwieweit Abweichungen der Formfaktoren von denjenigen des Quadrats die Ergebnisse einer Finite-Element-Berechnung quantitativ beeinflussen, hängt vom Elementtyp und den betrachteten Ergebniswerten (Verschiebungsgrößen, Spannungen, Momente, Querkräfte) ab. Die Eigenschaften von Finiten Elementen können anhand von Musteraufgaben, wie sie z. B. in [4.55] angegeben sind, beurteilt und mit denjenigen anderer Elementtypen verglichen werden.

Tabelle 4-13 Formfaktoren für Finite Elemente

Geometriekennwerte	Formfaktor	Optimaler Wert
<p>Rechteck durch die Mittelpunkte der Seiten</p>  <p>Viereckelement Mittelpunkt der Seite</p>	<p>Seitenverhältnis</p> $\frac{a}{b} \quad \text{mit } a > b$	$\frac{a}{b} = 1$
<p>Parallelogramm</p>  <p>Viereckelement</p>	<p>Winkel α</p>	$\alpha = 90^\circ$
 <p>$A_1 \dots A_4$: Teilflächen</p>	<p>Verjüngung</p> $t = 4 \cdot \frac{\text{Minimum}(A_1, A_2, A_3, A_4)}{(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)}$	$t = 1$

Beispiel 4.13

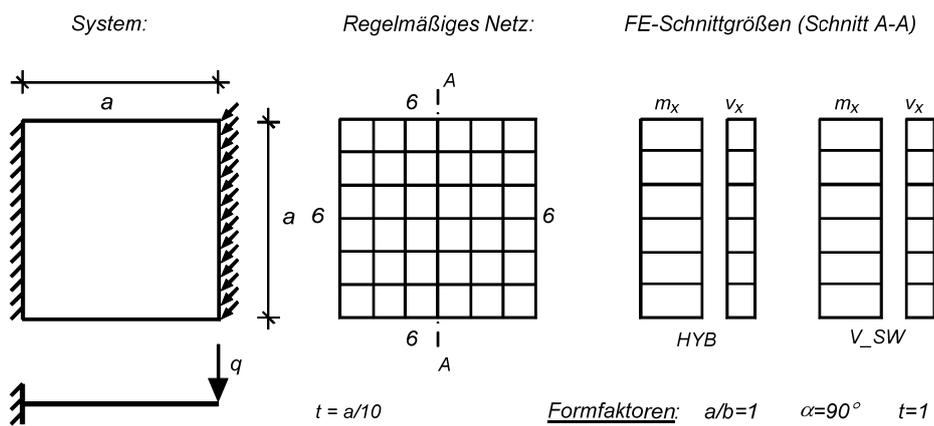


Bild 4-65 Auskragende Platte mit regelmäßigem Finite-Element-Netz

Bei der in Bild 4-65 dargestellten auskragenden Platte mit einer gleichförmigen Randlast ist der Einfluss von Unregelmäßigkeiten des Netzes zu untersuchen.

Die quadratische Platte wird mit einem regelmäßigen und zwei unregelmäßigen Finite-Element-Netzen abgebildet (Bilder 4-65 - 4-66). Das unregelmäßige Netz 1 hat eine aus Dreieck- und Viereckelementen gemischte Elementtopologie, während das unregelmäßige Netz 2 ausschließlich aus Viereckelementen besteht. Die unregelmäßigen Netze besitzen deutlich mehr Elemente und Freiheitsgrade als das regelmäßige Netz und sind für Aufweitungsbereiche von Finite-Element-Netzen typisch.

Die Untersuchung erfolgt zum Vergleich mit folgenden Elementtypen:

- a) *HYB* - hybrides Plattenelement nach [P2], [4.18]
- b) *V_SW* - schubweiches Plattenelement mit Verschiebungsansatz nach [P1]

Mit dem regelmäßigen 6x6-Raster erhält man bei beiden Elementtypen im Schnitt A-A in der Mitte der Kragplatte die exakten Schnittgrößen mit $m_x = q \cdot a / 2$ und $v_x = q$ (Bild 4-65). Die Ergebnisse für die beiden unregelmäßigen Netze unterscheiden sich hiervon deutlich (Bild 4-66).

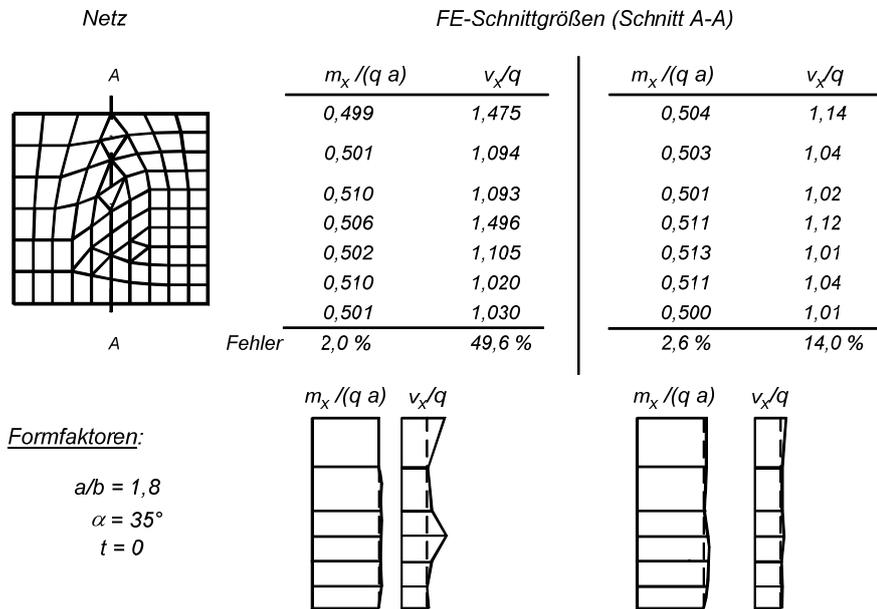
Beim Netz mit der aus Dreiecken und Vierecken gemischten Elementtopologie zeigt sich bei den Biegemomenten ein Fehler von ca. 3% (Bild 4-66-a). Sehr deutlich tritt der Fehler bei den Querkraften hervor. Er beträgt beim schubweichen Element 12% und beim hybriden Element 50%. Die Querkraften werden damit trotz der großen Elementanzahl praktisch unbrauchbar.

Beim unregelmäßigen Netz 2 nach Bild 4-66-b, in dem ausschließlich Viereckelemente zur Netzaufweitung verwendet werden, sind die Fehler bei den Querkraften in der Regel geringer. Sie betragen beim hybriden Element 33% und beim schubweichen Element 15%. Die Ergebnisse zeigen, dass die untersuchten Elemente in einer verzerrten Form, d. h. bei ungünstigen Formfaktoren, nicht in der Lage sind, die Querkraft hinreichend genau wiederzugeben. Da dies für einen konstanten Wert der Querkraft gilt, ist auch bei einer Netzverfeinerung keine Erhöhung der Genauigkeit der Querkraften zu erwarten (vgl. Patch-Test).

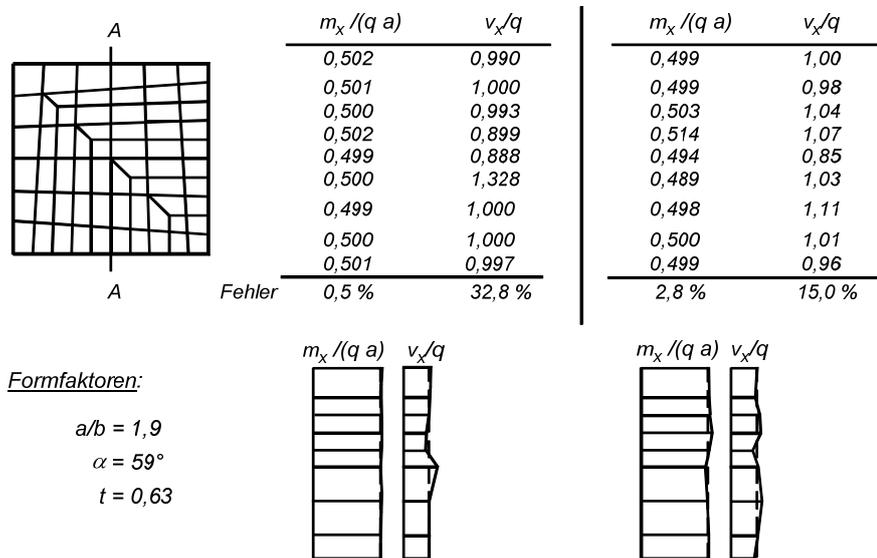
Beim schubweichen Element (*V_SW*) hängen die FE-Schnittgrößen von der Plattenstärke ab, was beim hybriden Element (*HYB*) nicht der Fall ist. Dies gilt insbesondere für die Querkraften, die bei schubweichen Elementen direkt aus den Schubverzerrungen (Scherwinkeln) abgeleitet werden. Im Beispiel erhält man bei einer Variation der Plattenstärke t folgende Querkraften mit den größten Abweichungen von q :

Elementtyp	v_x/q - FE-Netz 1	v_x/q - FE-Netz 2
<i>HYB</i>	1.52 (52%)	1.33 (33%)
<i>V-SW</i> $t = 0.02 a$	2.15 (115%)	1.52 (52%)
$t = 0.05 a$	1.45 (45%)	0.76 (24%)
$t = 0.10 a$	1.14 (14%)	0.85 (15%)
$t = 0.30 a$	1.03 (3%)	1.03 (3%)

Danach nimmt beim schubweichen Element die Genauigkeit mit der Plattenstärke deutlich zu.



(a) Unregelmäßiges Finite-Element-Netz 1 mit gemischter Elementtopologie



(b) Unregelmäßiges Finite-Element-Netz 2 mit Viereckelementen

Bild 4-66 Schnittgrößen einer Kragplatte

Zur Bildung von Finite-Element-Netzen sollen folgende allgemeine Regeln als Orientierung dienen:

Regeln für die Bildung von Finite-Element-Netzen

- a) *Anzustreben sind regelmäßige Netze, möglichst mit quadratischen oder rechteckförmigen Elementen.*
- b) *Viereckelemente sind Dreieckelementen vorzuziehen.*
- c) *Eine Elementtopologie aus Viereckelementen ist einer gemischten Elementtopologie aus Dreieck- und Viereckelementen vorzuziehen.*
- d) *Elemente sind in Bereichen mit hohem Spannungsgradienten zu verdichten, wenn eine gleichbleibende Genauigkeit gewünscht wird.*
- e) *Die Elementverdichtung soll gleichmäßig erfolgen, um „künstliche Steifigkeitssprünge zu vermeiden.*
- f) *Steifigkeitssprünge, wie z. B. infolge von Dickenänderungen bei Platten, dürfen nicht willkürlich groß sein.*

Die Bedeutung der Regelmäßigkeit von Finite-Element-Netzen ist aus Beispiel 4.13 ersichtlich. Vor allem bei Platten und Schalen können Unregelmäßigkeiten des Netzes die Schnittgrößenverläufe beeinflussen, wobei jedoch Biegemomente und Normalspannungen weniger empfindlich sind, während Querkräfte leicht bis zur praktischen Unbrauchbarkeit verfälscht werden können. Zur Beurteilung der Regelmäßigkeit eines Netzes können die Formfaktoren dienen.

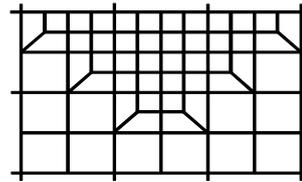
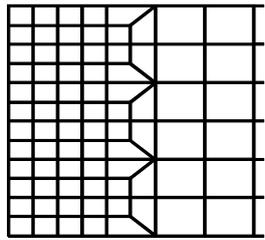
Netze aus Viereckelementen sind im Allgemeinen Netzen aus Dreieckelementen vorzuziehen. Auch dreieck- und kreisförmige Bereiche lassen sich unter ausschließlicher Verwendung von Viereckelementen modellieren (Bild 4-67).

Ausnahmen bilden Platten mit aus Dreieckelementen zusammengesetzten Finiten Viereckelementen (Bild 4-44) sowie komplizierte zweiachsig gekrümmte Schalentragswerke, die sich mit ebenen Viereckelementen nicht abbilden lassen. Bei regelmäßigen Netzen aus Dreieckelementen sollten die Diagonalen alternieren, um einen Richtungseinfluss der Diagonalneigung auf die Ergebnisse zu verhindern (Bild 4-68). Spitze nadelförmige Elemente sind unzulässig.

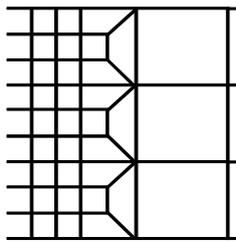
Das Finite-Element-Netz sollte in Bereichen mit hohen Spannungsgradienten verdichtet werden, sofern dort nicht ein größerer Diskretisierungsfehler akzeptiert werden kann. Die Abmessungen benachbarter Elemente sollten sich aber nicht zu sprunghaft ändern. Da Finite Elemente sich aufgrund des Verschiebungsansatzes zu „steif“ verhalten, würde dies einer künstlichen Steifigkeitsänderung des Systems entsprechen. Als Regel kann gelten, dass das Größenverhältnis benachbarter Elemente den Wert von 1.5 nicht überschreiten sollte. Der Wert 1.5 ist als vom Elementtyp und vom untersuchten System und dessen Belastung abhängiger Richtwert zu verstehen.

Steifigkeitssprünge dürfen nicht willkürlich groß gewählt werden, da sie zu numerischen Schwierigkeiten führen können (vgl. Abschnitt 3.8.1). Dies gilt insbesondere für Dickenänderungen von Platten. Als Richtwert kann das Verhältnis von 10:1 für die Dicken benachbarter Plattenelemente gelten, das nicht überschritten werden sollte.

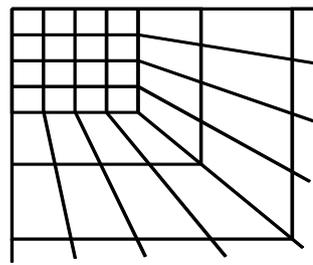
Die Regeln für die Bildung von Finite-Element-Netzen werden auch als A-Priori-Kriterien bezeichnet. Sie lassen zwar keine quantitative Beurteilung der Güte der Berechnungsergebnisse zu, sollen aber dennoch eingehalten werden, um Fehlerquellen zu vermeiden. Eine genauere Fehlerabschätzung liefern Verfahren, die von den Berechnungsergebnissen ausgehen.



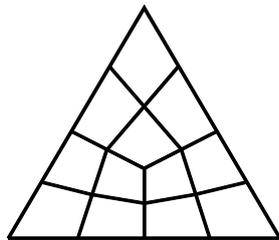
Netzverfeinerung an einem Punkt



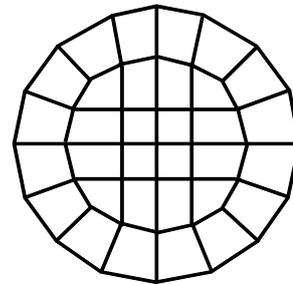
Netzverfeinerung in einer Richtung



Übergang zum Halbraum



Dreieck



Kreis

Bild 4-67 Beispiele für die Elementierung mit Viereckelementen

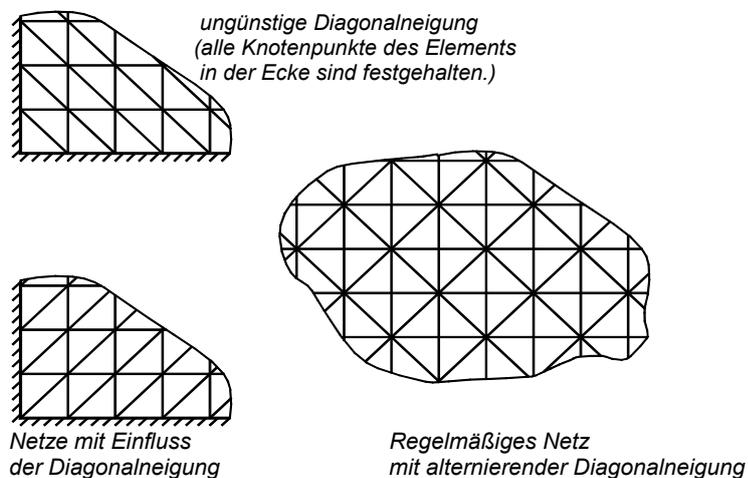


Bild 4-68 Elementierung mit Dreieckselementen

4.11.4 Modellbildung bei Scheiben

Eine typische Anwendung der Finite-Element-Methode im konstruktiven Ingenieurbau ist die Berechnung von Wandscheiben und wandartigen Trägern aus Stahlbeton. Im Stahl- und Holzbau wird die Finite-Element-Methode meist im Rahmen von Grundsatzstudien mit eher wissenschaftlichem Charakter, z. B. zur Untersuchung von scheibenartigen Beanspruchungen in Lasteinleitungsbereichen, eingesetzt (vgl. z. B. [4.56, 4.57]). Im Folgenden werden Regeln, die bei der Bildung des Tragwerksmodells und des Finite-Element-Modells zu beachten sind, angegeben. Sie beziehen sich im Wesentlichen auf Scheiben aus Stahlbeton.

Scheibfelder

Unter Scheibefeldern versteht man Viereckbereiche von Scheiben ohne größere Öffnungen. Scheibfelder sind mit einem möglichst gleichmäßigen Raster gemäß den in Abschnitt 4.9.3 angegebenen Regeln zu diskretisieren. Die Anzahl der Elemente ist vom Elementtyp und der Belastung abhängig. Beim konformen Viereckelement mit vier Knoten sollten in der Regel zwischen zwei Auflagern mindestens acht bis zwölf Elemente liegen. Bei einfach gestützten Scheiben kann die Anzahl u. U. auf sechs Elemente reduziert werden (vgl. Beispiel 4.6). Beispiele für die mit unterschiedlichen Programmen erhaltene Genauigkeit eines regelmäßigen Scheibfeldes sind in [4.58] gegeben.

Scheibenbereiche mit biegeähnlichen Beanspruchungen erfordern bei konformen 4-Knoten-Viereckelementen eine sehr feine Netzeinteilung in Richtung der „Längsachse“, um Spannungsänderungen in dieser Richtung darstellen zu können. Bei CST-Dreieckselementen ist zusätzlich eine sehr feine Diskretisierung mit ca. zehn Elementlagen über die „Höhe“ erforderlich. Bei einer weniger feinen Netzeinteilung besteht die Gefahr, dass die Spannungen grob unterschätzt werden. Bei hybriden Elementen oder konformen Elementen mit quadratischem Verschiebungsansatz genügen in Scheibenbereichen mit biegeähnlichen Beanspruchungen weniger Elemente, um die Spannungen mit gleicher Genauigkeit zu ermitteln (vgl. Beispiel 4.11).